

ORSAY, Numéro d'ordre:

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

ECOLE SUPERIEURE
D'ELECTRICITE

THESE

Spécialité : Electronique

présentée

par Monsieur Min ZHANG

pour obtenir le titre de DOCTEUR EN SCIENCE

Sujet de la thèse :

Modélisation de structures en hyperfréquences par la
méthode des éléments finis

soutenue le 14 Novembre 1990

devant le jury composé de :

M. Michel SAUZADE	Président
M. Walid TABBARA	Rapporteur
M. Gérard MEUNIER	Rapporteur
M. Raymond DUPERDU	Examineur
M. Philippe LEPRINCE	Examineur

à ma femme et à mes parents

Remerciements

Les études présentées dans cette thèse ont été effectuées au sein du Service des Mesures de l'Ecole Supérieure d'Electricité en collaboration avec le Laboratoire de Physique des Gaz et des Plasmas (C.N.R.S.) de l'Université Paris-XI. Je tiens à remercier tout d'abord Monsieur M. Sauzade, qui m'a fait l'honneur de présider le Jury de ma thèse.

Je remercie particulièrement Monsieur R. Duperdu, Professeur et chef du Service des Mesures de l'Ecole Supérieure d'Electricité, de m'avoir accueilli dans son Service et encouragé tout au long de ce travail.

Je témoigne toute ma gratitude à Monsieur P. Leprince, Directeur de recherche au Laboratoire de Physique des Gaz et des Plasmas (C.N.R.S.), directeur scientifique de cette thèse, qui m'a dirigé et conseillé tout au long de cette thèse.

Mes remerciements vont également à Madame M.E. Davoust, Messieurs M. Cazabat et M. Cheaib du Groupe Physique du Service des Mesures pour les discussions que nous avons eu et les encouragements qu'ils m'ont apportés, à Messieurs P. Chollet et S. Saada, anciens membres du Service des Mesures, pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette thèse.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur J.C. Sabonnadière, Professeur et Directeur du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble (C.N.R.S.), pour m'avoir accueilli dans son équipe de C.A.O. pendant mon stage à Grenoble . Egalement, mes remerciements vont à Monsieur G. Meunier, chargé de recherche au C.N.R.S., qui m'a aidé à réaliser une grande partie du calcul numérique pour obtenir des résultats fructueux et d'avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse .

Je remercie Monsieur W. Tabbara, Professeur de l'Université de Paris VI, qui a bien voulu être rapporteur de cette thèse. Ses nombreuses suggestions m'ont aidé à mener à bien ce travail.

Il faut aussi mentionner mon ami Z. Ren du Laboratoire de Génie Electrique de Paris(C.N.R.S.) qui m'a fait profiter de ses connaissances sur la modélisation des phénomènes électromagnétiques par la méthode des éléments finis.

Que tout le personnel du Service des Mesures et tous mes amis qui m'ont aidé et encouragé tout au long de ce travail trouvent ici mes remerciements les plus sincères.

Liste des notations principales:

Alphabet français:

- $\vec{B}$: induction magnétique
- $\vec{D}$: champ de déplacement
- $\vec{E}$: champ électrique($E_x E_y E_z$) ou ($E_r E_\phi E_z$)
- $\vec{E}_t$: champ électrique transversal($E_x E_y$) ou ($E_r E_\phi$)
- $\vec{e}_t$: variation transversale du champ $\vec{E}_t$
- $\vec{H}$: champ magnétique($H_x H_y H_z$) ou ($H_r H_\phi H_z$)
- $\vec{H}_t$: champ magnétique transversal($H_x H_y$) ou ($H_r H_\phi$)
- $\vec{h}_t$: variation transversale du champ $\vec{E}_t$
- I : courant équivalent de la ligne *TEM*
- $\vec{J}$: densité de courant électrique
- k_0 : nombre d'onde dans l'espace libre
- k_c : nombre d'onde coupure
- N_i : fonction d'interpolation
- $[s]$: matrice de répartition
- U : tension équivalente de la ligne *TEM*
- v_g : vitesse de groupe
- v_p : vitesse de phase
- Y_{en} : admittance d'entrée
- Y_1 : admittance par unité de longueur
- $[Y],[y]$: matrice d'admittance, normalisée
- Z_c : impédance caractéristique
- z_{en} : impédance d'entrée
- Z_w : impédance d'onde
- $[Z],[z]$: matrice d'impédance, normalisée
- Z_1 : impédance par unité de longueur

Alphabet grec:

- α : coefficient d'atténuation

β : nombre d'onde dans les guides d'onde
 Γ : coefficient de réflexion
 γ : constant de propagation $\gamma = \alpha + j\beta$
 ϵ : permittivité
 ϵ_r : permittivité relative
 ϵ_p : permittivité relative de plasma
 ϵ_0 : permittivité du vide
 η_0 : impédance d'onde du vide $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$
 λ : valeur propre
 λ_e : longueur d'onde d'excitation
 λ_c : longueur d'onde de coupure
 μ : perméabilité
 μ_0 : perméabilité du vide
 ρ : densité de charge
 σ : conductivité
 ν : fréquence de collision
 ϕ, ψ : potentiel scalaire
 ω : pulsation de l'onde
 ω_p : pulsation de plasma

Expression mathématique:

$\vec{A}^*$: complexe conjugué du vecteur $\vec{A}$
 $\vec{A} \cdot \vec{B}$: produit scalaire de $\vec{A}$ et $\vec{B}$
 ∇u : gradient d'un scalaire u
 $\nabla \cdot \vec{A}$: divergence d'un vecteur $\vec{A}$
 $\nabla \times \vec{A}$: rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$
 ∇^2 : opérateur laplacien

Résumé

Le sujet de cette thèse porte sur la modélisation de structures électromagnétiques (microonde) par la méthode des éléments finis. Deux types de problème: celui aux valeurs propres (pour un système fermé) et celui de répartition (scattering), ont été traités soit avec la fonctionnelle vectorielle soit avec la fonctionnelle scalaire.

Pour le problème aux valeurs propres, on peut résoudre les modes de propagation dans les guides d'onde et les modes de résonance dans les cavités de forme quelconque avec un milieu inhomogène. Pour tester la validité du programme plusieurs structures ont été calculées. Des modes non-physiques peuvent apparaître lorsque l'on résout certaines structures par la fonctionnelle vectorielle (par exemple le guide d'onde chargé de diélectrique); grâce à la méthode de "pénalité", on peut réduire le nombre de ces modes.

Pour étudier la répartition des champs, une méthode originale, appelée la méthode de la charge adaptée (simulation de la mesure du Taux d'Onde Stationnaire), a été développée; elle permet d'obtenir des résultats beaucoup plus rapidement qu'en utilisant la méthode matricielle. Deux structures avec obstacles ont été calculées par les deux méthodes et leurs résultats ont été comparés.

La méthode de la charge adaptée a été également appliquée pour calculer des excitateurs de plasma. Cela a permis de mettre en évidence les conditions de transfert de l'énergie sur le mode propre plasma par rapport à celui du mode sans plasma, ainsi que le rôle des divers paramètres des excitateurs.

Abstract

The modelization of microwave propagation problems, including eigen-value problem and scattering problem, is accomplished by the finite element method with vector functional and scalar functional.

For eigen-value problem, propagation modes in waveguides and resonant modes in cavities can be calculated in a arbitrarily-shaped structure with inhomogeneous material. Several microwave structures are resolved in order to verify the program. One drawback associated with the vector functional is the appearance of spurious or non-physical solutions. A penalty function method has been introduced to reduce spurious solutions.

The adaptive charge method is originally proposed in this thesis to resolve waveguide scattering problem. This method, similar to VSWR measuring technique, is more efficient to obtain the reflection coefficient than the matrix method. Two waveguide discontinuity structures are calculated by the two methods and their results are compared.

The adaptive charge method is also applied to a microwave plasma excitor. It allows us to understand the role of different physical parameters of excitor in the coupling of microwave energy to plasma mode and the mode without plasma.

Table des matières

Introduction	1
 I Rappel d'électromagnétisme	 7
1 Equations de base en hyperfréquences	9
1.1 Equations de Maxwell	9
1.2 Propagation des ondes sur une ligne de transmission	11
1.3 Ligne de transmission <i>TEM</i>	14
1.4 Courant et tension équivalents des lignes dispersives <i>TE</i> et <i>TM</i>	16
 2 Formulations variationnelles	 21
2.1 Introduction	21
2.2 La méthode variationnelle	22

2.3	Construction de la fonctionnelle	24
2.4	Les conditions aux limites	26
2.5	Formulation pour la matrice d'impédance	29
2.6	Formulation pour l'impédance caractéristique	30
2.7	Discussion	32
3	Résolution par la méthode des éléments finis	35
3.1	Introduction	35
3.2	La méthode des éléments finis	36
3.2.1	Approximation nodale	36
3.2.2	Approximation par éléments finis	38
3.3	La discrétisation des fonctionnelles	40
3.4	Les modes non-physiques	43
3.5	Deux types de problèmes en hyperfréquences	45
3.6	Utilisation de la fonctionnelle	46
3.7	Description du programme FLUXLAB	47

II	Application à la modélisation des structures classiques en hyperfréquences	51
4	Guides d'onde homogènes et inhomogènes	53
4.1	Guide d'onde homogène à deux dimensions	53
4.1.1	Guide d'onde rectangulaire	54
4.1.2	Guide d'onde circulaire	58
4.1.3	Guide d'onde triangulaire	61
4.2	Guide d'onde inhomogène à deux dimensions	66
5	Impédance caractéristique de ligne <i>TEM</i>	81
6	Cavité cylindrique et coaxiale	87
6.1	Cavité cylindrique	87
6.2	Cavité coaxiale	92
6.3	Cavité coaxiale dissymétrique	94
7	Composants hyperfréquences	97
7.1	Introduction	97

7.2	Méthode matricielle	99
7.3	Méthode de la charge adaptée	102
7.4	Conclusion	108

III Application à la modélisation d'excitateur de plasma 109

8	Excitateur de plasma	111
8.1	Introduction	111
8.2	Principe de décharge microonde	113
8.3	Modes de propagation dans l'excitateur	115
8.3.1	Modes dans le guide d'onde rectangulaire	115
8.3.2	Modes dans le guide de plasma	117
8.4	Approche qualitative pour optimiser le couplage	124
9	Modélisation de l'excitateur de plasma à deux dimensions	127
9.1	Modèle simplifié à deux dimensions	127
9.2	Mode de plasma dans la ligne <i>TEM</i> "verticale"	128
9.3	Etude du couplage de l'énergie	132

9.4	Excitation du plasma non-collisionnel	134
9.5	Excitation du plasma collisionnel	148
Conclusion		157
A Annexe		161
B Annexe		163
C Annexe		165
Bibliographie		167

Introduction

Du fait de la grande variété d'application, le développement des méthodes pour modéliser les champs électromagnétiques des structures en hyperfréquences s'est accru surtout pendant ces deux dernières décennies avec l'utilisation plus répandue d'ordinateur performant.

Etant la base des hyperfréquences, les équations de Maxwell ont été établies il y a un siècle. Cependant, la résolution de ces équations demeure toujours un grand sujet de recherche. Traditionnellement, les méthodes de résolution sont classées en deux grandes familles: les méthodes analytiques et les méthodes numériques. Il existe aussi des méthodes dites semi-analytiques qui combinent les deux méthodes. Les méthodes analytiques consistent à représenter les champs électromagnétiques dans une structure par des expressions mathématiques analytiques. Ces méthodes sont exactes et rigoureuses, mais limitées à quelques géométries simples. Dans la plupart des cas elles cèdent la place aux méthodes numériques. Les méthodes numériques utilisées en hyperfréquences sont nombreuses. Plusieurs articles[1][2][3] résument les caractéristiques et les particularités de chaque méthode numérique.

Due à sa généralité et sa souplesse, la méthode des éléments finis a connu un essor très rapide ces vingt dernières années. Cette méthode a été tout d'abord exploitée dans le domaine mécanique et pénètre actuellement tous les domaines de l'ingénierie. C'est une méthode qui s'adapte bien au problème de la résolution d'équations différentielles avec des conditions aux limites. Au lieu de résoudre les équations différentielles, la méthode des éléments finis travaille avec des formulations intégrales. En électromagnétisme,

la méthode variationnelle est utilisée pour construire la formulation intégrale. Elle consiste à trouver une fonctionnelle équivalente aux équations de Maxwell différentielles. Les points stationnaires de cette fonctionnelle représentent la solution des équations de Maxwell. La fonctionnelle est la formulation de base pour la méthode des éléments finis. Comme nous étudions le problème de propagation dans les structures hyperfréquences, nous rappelons les différents types de fonctionnelles de l'équation de propagation. Selon leur type de variable, les fonctionnelles sont classées en deux grands groupes: les fonctionnelles scalaires et les fonctionnelles vectorielles. Les différentes fonctionnelles ont toutes leurs avantages particuliers et leur domaine d'application.

Les fonctionnelles scalaires sont en fonction des composantes longitudinales H_z et E_z . Ce sont les fonctionnelles les plus simples et celles qui ont été utilisées premièrement. L.Arlett et O.C.Zienkiewicz[4] ont proposé les fonctionnelles scalaires à une composante $F(H_z)$ et $F(E_z)$ pour calculer les cavités vides. Les mêmes fonctionnelles ont été exploitées par S.Ahmed et P.Daly[5] pour traiter les guides d'onde homogènes. Ces fonctionnelles scalaires permettent de calculer les modes propres non-hybrides du guide d'onde et de la cavité homogènes. Lorsqu'un milieu inhomogène intervient dans la structure une seule composante H_z ou E_z ne suffit plus pour représenter les champs. D'autres types de fonctionnelle doivent être utilisés.

La fonctionnelle à deux composantes longitudinales $F(H_z, E_z)$ a été employée par S.Ahmed et P.Daly[6] et par P.Daly[7] pour résoudre le problème de guide d'onde chargé de diélectrique inhomogène. Ils ont constaté l'existence de points singuliers dans la courbe de dispersion autour de $(\beta/k_0) = 1$. Ce défaut fait abandonner cette fonctionnelle.

Actuellement la plupart des chercheurs utilisent les fonctionnelles vectorielles en fonction du champ magnétique $\vec{H}$ et du champ électrique $\vec{E}$. A.D.Berk[8] a donné une formulation variationnelle pour la fréquence de résonance de la cavité et la constante de propagation du guide d'onde. Dans sa formulation le champ magnétique $\vec{H}$ ou le champ électrique $\vec{E}$ est intervenu. A.Konrad [9] a trouvé dans sa thèse une fonction-

nelle énergétique en fonction des champs $F(\vec{H})$ et $F(\vec{E})$. Ces fonctionnelles à trois composantes, ayant la même forme que celles de Berk ont été appliquées pour calculer les guides d'onde chargés de matériaux inhomogènes, anisotropes. Par le principe de "moindre action" K.Morishita et N.Kumakai[10] ont déduit non seulement la fonctionnelle de Konrad mais aussi une formulation variationnelle pour l'impédance. Cette dernière est la formulation de base pour traiter les composants hyperfréquences. Le plus grave problème posé lors de l'utilisation de $F(\vec{H})$ ou $F(\vec{E})$ est la présence des modes non-physiques. On croit que la condition de divergence nulle n'est pas impliquée dans la fonctionnelle. Les techniques pour limiter ces modes non-physiques sont discutées dans le chapitre 3.

Il existe aussi la fonctionnelle à 6 composantes $F(\vec{H}, \vec{E})$. Très récemment Jan A.M.Svedin[11] a résolu avec cette fonctionnelle plusieurs problèmes de propagation dans les guides d'onde chargés de diélectrique inhomogène sans modes non-physiques. Bien entendu, la construction de la matrice devient complexe et sa dimension augmente.

La fonctionnelle relative au potentiel a fait aussi son apparition. I.Bardi[12] utilise une fonctionnelle en potentiel vectoriel $F(\vec{A})$ pour résoudre le problème de guide d'onde chargé de diélectrique. Etant donné que $\vec{H} = \mu \nabla \times \vec{A}$, la condition de divergence nulle est automatiquement imposée. Les résultats sans mode non-physique ont été montrés dans son article.

Dans cette thèse les fonctionnelles $F(\vec{H})$, $F(\vec{E})$, $F(H_z)$ et $F(E_z)$ sont utilisées pour résoudre les différents types de problème en hyperfréquences. La première partie composée des trois premiers chapitres concerne le rappel de la théorie et de la notion fondamentales de cette thèse: la théorie de base en hyperfréquences, la méthode variationnelle et la méthode des éléments finis. Dans le premier chapitre, nous commençons par une présentation des équations de Maxwell dans les milieux linéaires et isotropes, à partir desquelles nous obtenons l'équation de propagation, l'équation de base pour tous les phénomènes de propagation. Ensuite la solution générale de l'équation de

propagation sur la ligne de transmission est donnée et les différents types de modes de propagation sont montrés. La ligne de transmission *TEM* est discutée afin d'introduire le courant et la tension équivalents. Basés sur les composantes transversales, le courant et la tension équivalents des lignes dispersives *TE* et *TM* sont aussi introduits. Dans le deuxième chapitre, après un bref rappel de la méthode variationnelle, nous donnons les fonctionnelles vectorielles $F(\vec{H})$ et $F(\vec{E})$ utilisées dans cette thèse. Les différentes conditions aux limites de ces fonctionnelles, ainsi que leurs significations physiques, sont expliquées. Pour modéliser les composants hyperfréquences, une formulation variationnelle permettant de calculer les éléments de la matrice d'impédance $[z]$ est mise sous forme explicite. La formulation pour l'impédance caractéristique de ligne *TEM* est également proposée. A la fin de ce chapitre plusieurs discussions sont faites sur ces formulations variationnelles. Nous utilisons, dans le troisième chapitre, la notion des éléments finis pour discrétiser les fonctionnelles du deuxième chapitre et les mettre sous forme matricielle. Les techniques pour supprimer les modes non-physiques sont discutées. Ensuite le logiciel, dans lequel les différentes fonctionnelles sont intégrées, est décrit. Avant de terminer ce chapitre, plusieurs problèmes relatives à la résolution des structures hyperfréquences sont discutés.

La deuxième partie divisée en quatre chapitres(chapitre 4, chapitre 5, chapitre 6, chapitre 7) est destinée à l'application de la méthode des éléments finis à différents types de problèmes en hyperfréquence. Dans le quatrième chapitre, nous traitons tout d'abord les problèmes aux valeurs propres en deux dimensions, c'est à dire les modes de propagation dans les guides d'onde. Les fonctionnelles scalaires $F(H_z)$ et $F(E_z)$ sont utilisées pour calculer les guides d'onde homogènes de différentes sections transversales. Le choix de la géométrie de travail est illustré. Nous utilisons les fonctionnelles vectorielles $F(\vec{H})$ avec le terme de pénalité pour analyser un guide d'onde rectangulaire chargé de diélectrique. Les modes de guide et les modes non-physiques sont trouvés. Un petit chapitre est réservé à la ligne *TEM*. Nous illustrons par deux exemples, la méthode pour calculer l'impédance caractéristique. Nous abordons ensuite, dans le sixième chapitre, les problèmes de trois dimensions en essayant de trouver les modes de résonance d'une cavité cylindrique, d'une cavité coaxiale et d'une cavité coaxiale

dissymétrique. L'évolution des modes par rapport à la structure de chaque cavité est expliquée. Dans le septième chapitre, nous étudions le problème de répartition. Il s'agit de calculer la matrice d'impédance $[z]$, la matrice d'admittance $[y]$ et la matrice de répartition $[s]$. Deux méthodes: la méthode matricielle et la méthode de la charge adaptée, sont proposées. La méthode matricielle consiste à calculer la matrice d'impédance ou la matrice d'admittance du composant hyperfréquence par une formulation variationnelle. La méthode de la charge adaptée, développée originalement dans cette thèse, consiste à calculer par les fonctionnelles directement le coefficient de réflexion d'une entrée du composant. Les deux méthodes sont comparées.

Après l'application et la vérification du logiciel des éléments finis sur les différentes structures hyperfréquences classiques, nous commençons, dans la dernière partie(chapitre 8, chapitre 9), la modélisation de l'excitateur de plasma; ce dernier est considéré comme un diélectrique sans ou avec perte(non-collisionnel ou collisionnel). Le modèle de l'excitateur de plasma est décrit dans le huitième chapitre. Les modes de propagation fondamentaux dans les deux guides d'onde de l'excitateur sont montrés. Les approches qualitatives sont faites pour optimiser le transfert de l'énergie. L'analyse du champ à la jonction de l'excitateur ne peut s'effectuer que par la méthode numérique. Dans le dernier chapitre, le modèle de l'excitateur est simplifié à deux dimensions. Avant d'utiliser la méthode des éléments finis pour modéliser l'excitateur, nous recalculons par la méthode analytique les modes de propagation du modèle simplifié et les comparons aux ceux du modèle original pour justifier notre simplification. Avec la méthode des éléments finis , nous voyons que le mode de plasma est excité, accompagné d'un mode supplémentaire *TEM*. Le mode de plasma correspond à celui trouvé par la méthode analytique. Afin de comprendre le couplage de l'énergie, le coefficient de réflexion à l'entrée de l'excitateur est calculé en fonction de plusieurs paramètres physiques pour le cas non-collisionnel et collisionnel.

Partie I

Rappel d'électromagnétisme

Les trois chapitres de cette partie concerne le rappel de la théorie et de la notion fondamentales de cette thèse: la théorie de base en hyperfréquences, la méthode variationnelle et la méthode des éléments finis. Dans le premier chapitre, nous commençons par une présentation des équations de Maxwell dans les milieux linéaires et isotropes, à partir desquelles nous obtenons l'équation de propagation, l'équation de base pour tous les phénomènes de propagation. Ensuite la solution générale de l'équation de propagation sur la ligne de transmission est donnée et les différents types de modes de propagation sont montrés. La ligne de transmission TEM est discutée afin d'introduire le courant et la tension équivalents. Basés sur les composantes transversales, le courant et la tension équivalents des lignes dispersives TE et TM sont aussi introduits. Dans le deuxième chapitre, après un bref rappel de la méthode variationnelle, nous donnons les fonctionnelles vectorielles $F(\vec{H})$ et $F(\vec{E})$ utilisées dans cette thèse. Les différentes conditions aux limites de ces fonctionnelles, ainsi que leurs significations physiques, sont expliquées. Pour modéliser les composants hyperfréquences, une formulation variationnelle permettant de calculer les éléments de la matrice d'impédance est mise en forme explicite. La formulation pour l'impédance caractéristique de ligne TEM est également proposée. A la fin de ce chapitre plusieurs discussions sont faites sur ces formulations variationnelles. Nous utilisons, dans le troisième chapitre, la notion des éléments finis pour discrétiser les fonctionnelles du deuxième chapitre et les mettre sous forme matricielle. Les techniques pour supprimer les modes non-physiques sont discutées. Ensuite le logiciel, dans lequel les différentes fonctionnelles sont intégrées, est décrit. Avant de terminer ce chapitre, plusieurs problèmes relatives à la résolution des structures hyperfréquences sont discutés.

Chapitre 1

Equations de base en hyperfréquences

1.1 Equations de Maxwell

Les équations qui définissent les relations fondamentales entre des grandeurs électromagnétiques sont les équations de Maxwell. Ces équations nous permettent de décrire complètement tous les phénomènes électromagnétiques. Nous considérons leurs formes exprimées en régime harmonique $e^{j\omega t}$:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D} + \vec{J} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.4)$$

Auxquelles il faut ajouter les relations constitutives dans les milieux linéaires et isotropes:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.6)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (1.7)$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_{r1}$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

La permittivité complexe est introduite pour garder la symétrie des équations:

$$\epsilon_r = \epsilon_{r1} - j\epsilon_{r2} = \epsilon_{r1} - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon_0} \quad (1.8)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_r\epsilon_0\vec{E} \quad (1.9)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_r\mu_0\vec{H} \quad (1.10)$$

A l'interface de deux milieux (ϵ_1, ϵ_2 ou μ_1, μ_2) sans charge de surface, les relations qui définissent les composantes transversales et normales sont [13] :

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \quad (1.11)$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (1.12)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (1.13)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \quad (1.14)$$

En prenant les rotationnels (1.1)(1.2) et utilisant (1.3)(1.4), nous obtenons les équations de Helmholtz :

$$\nabla \times \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H} - \mu_r k_0^2 \vec{H} = 0 \quad (1.15)$$

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} - \epsilon_r k_0^2 \vec{E} = 0 \quad (1.16)$$

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

où k_0 est le nombre d'onde dans l'espace libre. Les équations (1.3) et (1.4) sont satisfaites implicitement dans (1.15)(1.16). Les équations (1.15) (1.16), appelées aussi équations de propagation, caractérisent tous les phénomènes de propagation.

Considérons un volume V fermé par une frontière S . A partir de l'identité vectorielle suivante:

$$\nabla \cdot (\vec{E}^* \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E}^* - \vec{E}^* \cdot \nabla \times \vec{H} \quad (1.17)$$

puis en tenant compte de (1.9) (1.10), nous avons:

$$\nabla \cdot (\vec{E}^* \times \vec{H}) = -j\omega\mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* + j\omega\epsilon \vec{E}^* \cdot \vec{E} \quad (1.18)$$

En appliquant le théorème de divergence en (1.18), nous trouvons:

$$\int_S (\vec{E}^* \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = -j\omega \int_V (\mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* - \epsilon \vec{E}^* \cdot \vec{E}) dV \quad (1.19)$$

(1.19) est la loi de conservation de l'énergie: la puissance incidente à travers la frontière S dans le volume V est la somme de la puissance électrique, puissance magnétique et puissance dissipée dans ce volume. La puissance dissipée est caractérisée par la partie imaginaire de ϵ_r .

Nous allons ici nous orienter vers la propagation des ondes guidées en hyperfréquence et rappeler les principales caractéristiques de propagation sur une ligne de transmission.

1.2 Propagation des ondes sur une ligne de transmission

La ligne de transmission utilisée ici est un support destiné à transporter les signaux hyperfréquences. Elle comporte soit plusieurs conducteurs métalliques isolés les uns des autres, soit une paroi métallique, soit des surfaces séparant des milieux diélectriques de propriétés différentes (figure 1.1). Nous étudions la répartition de champs et les caractéristiques de propagation sur une ligne de transmission. Pour simplifier, plusieurs hypothèses sont faites:

- La structure est uniforme dans la direction de propagation z .
- Dans les différents milieux de la section transversale, les matériaux sont linéaires, isotropes, homogènes.
- La structure ne contient pas de densité de charge électrique ($\rho = 0$).

- Les conducteurs dans la structure sont parfaits.

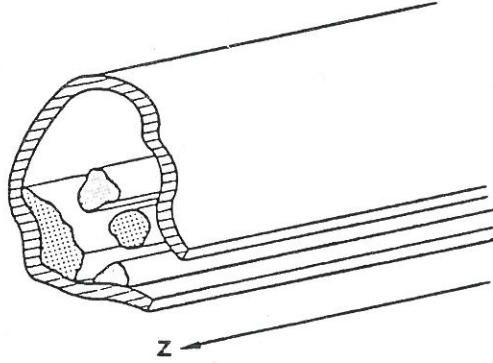


Figure 1.1: Modèle de la ligne de transmission

En utilisant la relation vectorielle:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla \nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} \quad (1.20)$$

les équations (1.15) et (1.16) deviennent:

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \quad (1.21)$$

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (1.22)$$

$$k^2 = \mu_r \epsilon_r k_0^2$$

Pour résoudre les équations (1.21) (1.22) nous choisissons z comme la direction de propagation de l'onde en décomposant $\vec{H}$ et $\vec{E}$ en composantes longitudinales et transversales:

$$\vec{H} = (\vec{H}_t + \hat{z} H_z) e^{-\gamma z} e^{j\omega t} \quad (1.23)$$

$$\vec{E} = (\vec{E}_t + \hat{z} E_z) e^{-\gamma z} e^{j\omega t} \quad (1.24)$$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

et en définissant:

$$\nabla = \nabla_t + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

où γ est la constante de propagation, α l'atténuation de l'onde, β le nombre d'onde.

A partir des équations (1.21) et (1.22), on obtient les équations de propagation des champs H_z et E_z :

$$\nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0 \quad (1.25)$$

$$\nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0 \quad (1.26)$$

$$k_c^2 = \gamma^2 + k^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon \quad (1.27)$$

Les champs transversaux sont obtenus en fonction des champs longitudinaux et s'expriment de la façon suivante [14]:

$$\vec{H}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t H_z - \frac{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}{k_c^2} \hat{z} \times \nabla_t E_z \quad (1.28)$$

$$\vec{E}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t E_z + \frac{j\omega\mu_0\mu_r}{k_c^2} \hat{z} \times \nabla_t H_z \quad (1.29)$$

Les équations (1.25) (1.26) (1.28) (1.29) nous permettent de calculer tous les modes sur la ligne de propagation (figure 1.1). D'après (1.27) ces modes sont généralement dispersifs.

Une cavité est considérée comme un cas particulier de la ligne de transmission: un tronçon de ligne court-circuité par deux plaques métalliques constitue une cavité. Les ondes se réfléchissent entre ces deux plaques provoquant des ondes stationnaires.

La résolution des équations de propagation (1.25) (1.26) en présence des conditions aux limites pour la structure de la figure 1.1 est un problème aux valeurs propres à deux dimensions. Ce problème admet plusieurs solutions différentes que l'on appelle modes de propagation. Ce sont les fonctions propres du problème à chacune desquelles est associée une valeur propre. Il existe un nombre infini de modes de propagation.

Selon qu'il possède ou non une composante longitudinale pour les champs électrique ou magnétique, un mode a des caractéristiques différentes. On obtient ainsi quatre catégories de modes définis de la manière suivante:

1. $E_z = 0, H_z = 0$ Mode transverse électromagnétique *TEM*
2. $E_z = 0, H_z \neq 0$ Modes transverses électriques *TE_{mn}* ou *H_{mn}*

3. $E_z \neq 0, H_z = 0$ Modes transverses magnétiques TM_{mn} ou E_{mn}

4. $E_z \neq 0, H_z \neq 0$ Modes hybrides

1.3 Ligne de transmission TEM

La ligne de transmission TEM joue un rôle important dans les circuits hyperfréquences. Grâce à elle les grandeurs physiques hyperfréquences tels que le champ magnétique $\vec{H}$ et le champ électrique $\vec{E}$ sont décrites par des grandeurs électriques: le courant I et la tension U . De cette manière la théorie relatives aux circuits peut être utilisée afin de simplifier l'analyse. C'est pourquoi nous donnons quelques résultats se rapportant à la ligne TEM .

Nous constatons d'après (1.28) et (1.29) que pour le mode $TEM(H_z = 0, E_z = 0)$ les composantes transversales n'ont de solution que si la condition suivante est vérifiée:

$$k_c^2 = 0 \text{ ou } k^2 + \gamma^2 = 0$$

la vitesse de propagation est alors donnée par:

$$v_p = v_g = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (1.30)$$

Il en résulte que la ligne de transmission TEM est non-dispersive. Les champs transversaux peuvent s'écrire(Annexe A):

$$\vec{H}_t = I(z) \nabla_t \psi(u, v) = I(z) \vec{h}_t(u, v) \quad (1.31)$$

$$\vec{E}_t = U(z) \nabla_t \phi(u, v) = U(z) \vec{e}_t(u, v) \quad (1.32)$$

ψ et ϕ sont les deux potentiels scalaires utilisés pour décrire la variation transversale de la ligne TEM . Ils sont parfois représentés directement par deux vecteurs transversaux $\vec{h}_t$ et $\vec{e}_t$. $I(z)$ et $U(z)$ sont les amplitudes du champ magnétique et électrique utilisés comme le courant et la tension équivalents. Ainsi les champs $\vec{H}_t, \vec{E}_t$ sont dévisés en deux parties: la variation longitudinale et transversale du champ que nous rappelons succesivement.

- Variation transversale du champ

La variation transversale est définie par les deux équations de Laplace en deux dimensions (Annexe A):

$$\nabla_t^2 \psi(u, v) = 0 \quad (1.33)$$

$$\nabla_t^2 \phi(u, v) = 0 \quad (1.34)$$

Pour trouver la répartition de champs transversaux on se ramène à la résolution d'un problème statique en appliquant sur les deux conducteurs deux potentiels différents.

Pour un guide d'onde creux (sans conducteur central), la condition aux limites sur la surface métallique y impose un potentiel constant. A l'intérieur du guide le potentiel doit aussi être constant, en vertu des propriétés de l'équation de Laplace. Il en résulte que le guide d'onde creux ne permet pas la propagation d'un mode *TEM*. Par contre un mode *TEM* peut se propager sur une structure à deux conducteurs, car entre ces deux conducteurs un gradient de potentiel peut s'établir, donc une répartition de champs statique dans la section transversale.

- Variation longitudinale du champ

La variation longitudinale du champ de la ligne *TEM* est définie par les deux équations de propagation suivantes (Annexe A):

$$\frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 I(z) = 0 \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 U(z) = 0 \quad (1.36)$$

$$-\gamma^2 = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad (1.37)$$

dont les solutions sont:

$$I(z) = A_1 e^{\gamma z} + A_2 e^{-\gamma z} \quad (1.38)$$

$$U(z) = B_1 e^{\gamma z} + B_2 e^{-\gamma z} \quad (1.39)$$

Les coefficients A_1, A_2, B_1, B_2 sont déterminés par les conditions aux limites.

Pour la ligne de transmission *TEM*, les deux paramètres fondamentaux sont l'impédance caractéristique Z_c et la constante de propagation γ exprimées par:

$$Z_c = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}} \quad (1.40)$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = (R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1) \quad (1.41)$$

où $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$ est l'impédance en série par unité de longueur, $Y_1 = G_1 + j\omega C_1$ est l'admittance en parallèle par unité de longueur. L'impédance caractéristique est définie par la répartition transversale du champ de la ligne *TEM*. Elle peut être trouvée par la résolution des équations (1.33) ou (1.34) (voir chapitre 5). La constante de propagation définit la variation longitudinale sur la ligne *TEM*. Ce paramètre est associé aux matériaux chargés dans la ligne et à la fréquence de l'onde.

1.4 Courant et tension équivalents des lignes dispersives *TE* et *TM*

Dans le paragraphe précédent, nous avons défini le courant et la tension équivalents d'une ligne *TEM*. Ces deux paramètres du circuit électrique peuvent être introduits sur les lignes dispersives *TE* et *TM*. Pour les lignes dispersives *TE* et *TM*, il existe non seulement des composantes transversales mais aussi des composantes longitudinales. Selon le principe d'équivalence de puissance entre la ligne originelle et la ligne équivalente, nous considérons seulement les composantes transversales qui contribuent à la transmission de puissance dans la direction de propagation z .

Pour le mode *TE* ($E_z = 0$), les composantes transversales (1.28) et (1.29) deviennent:

$$\vec{H}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t H_z \quad (1.42)$$

$$\vec{E}_t = \frac{j\omega\mu_0\mu_r}{k_c^2} \hat{z} \times \nabla_t H_z \quad (1.43)$$

Nous pouvons, d'une part, définir un potentiel transverse $\phi(u, v)$ pour le mode TE en réécrivant (1.42) et (1.43) dans les deux directions de propagation $\pm z$.

$$\vec{H}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t \phi(u, v) (Ae^{-\gamma z} - Be^{\gamma z}) \quad (1.44)$$

$$\vec{E}_t = \frac{j\omega\mu_0\mu_r}{k_c^2} \hat{z} \times \nabla_t \phi(u, v) (Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z}) \quad (1.45)$$

où $\phi(u, v)$ satisfait à l'équation de propagation:

$$\nabla_t^2 \phi(u, v) + k_c^2 \phi(u, v) = 0 \quad (1.46)$$

Nous décomposons, d'autre part, les champs $\vec{E}_t$ et $\vec{H}_t$ en produit d'une fonction à dépendance longitudinale par une fonction à dépendance transversale:

$$\vec{H}_t = I(z) \vec{h}_t(u, v) = [I^+(z) - I^-(z)] \vec{h}_t(u, v) \quad (1.47)$$

$$\vec{E}_t = U(z) \vec{e}_t(u, v) = [U^+(z) + U^-(z)] \vec{e}_t(u, v) \quad (1.48)$$

Nous introduisons ensuite deux coefficients C_1 et C_2 en écrivant:

$$\vec{h}_t = C_1 \nabla_t \phi(u, v) \quad (1.49)$$

$$\vec{e}_t = C_2 \hat{z} \times \nabla_t \phi(u, v) \quad (1.50)$$

où C_1 et C_2 sont à déterminer par les conditions de normalisation. En comparant (1.44)(1.45) avec (1.47)(1.48) et tenant compte de (1.49)(1.50), nous avons:

$$I(z) = -\frac{\gamma}{k_c^2} \left(\frac{A}{C_1} e^{-\gamma z} - \frac{B}{C_1} e^{\gamma z} \right) \quad (1.51)$$

$$U(z) = \frac{j\omega\mu_0\mu_r}{k_c^2} \left(\frac{A}{C_2} e^{-\gamma z} + \frac{B}{C_2} e^{\gamma z} \right) \quad (1.52)$$

Ainsi l'impédance caractéristique est définie:

$$Z_c = \left| \frac{U^\pm(z)}{I^\pm(z)} \right| = \frac{C_1 j\omega\mu}{C_2 \gamma} = \frac{C_1}{C_2} Z_w^{TE} \quad (1.53)$$

Si l'on dérive (1.51) (1.52), on a:

$$\frac{dI(z)}{dz} = \frac{\gamma}{Z_c} U(z)$$

$$\frac{dU(z)}{dz} = \gamma Z_c I(z)$$

d'où les équations de propagation:

$$\frac{d^2 I(z)}{dz^2} - \gamma^2 I(z) = 0 \quad (1.54)$$

$$\frac{d^2 U(z)}{dz^2} - \gamma^2 U(z) = 0 \quad (1.55)$$

Pour les modes TM , on définit un potentiel transverse $\psi(u, v)$ tel que:

$$\vec{H}_t = -\frac{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}{k_c^2} \hat{z} \times \nabla_t \psi(u, v) (Ae^{-\gamma z} - Be^{\gamma z}) \quad (1.56)$$

$$\vec{E}_t = -\frac{\gamma}{k_c^2} \nabla_t \psi(u, v) (Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z}) \quad (1.57)$$

où $\psi(u, v)$ satisfait à l'équation de propagation:

$$\nabla_t^2 \psi(u, v) + k_c^2 \psi(u, v) = 0 \quad (1.58)$$

En tenant compte de nouveau (1.47) à (1.50), nous avons:

$$I(z) = -\frac{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}{k_c^2} \left(\frac{A}{C_1} e^{-\gamma z} - \frac{B}{C_1} e^{\gamma z} \right) \quad (1.59)$$

$$U(z) = -\frac{\gamma}{k_c^2} \left(\frac{A}{C_2} e^{-\gamma z} + \frac{B}{C_2} e^{\gamma z} \right) \quad (1.60)$$

$$Z_c = \frac{U^\pm(z)}{I^\pm(z)} = \frac{C_1}{C_2} \frac{j\gamma}{j\omega\epsilon} = \frac{C_1}{C_2} Z_w^{TM}$$

Nous arrivons aux mêmes résultats:

$$\frac{d^2 I(z)}{dz^2} - \gamma^2 I(z) = 0$$

$$\frac{d^2 U(z)}{dz^2} - \gamma^2 U(z) = 0$$

Ainsi le courant et la tension équivalents sont introduits sur les lignes dipersives TE et TM . Il faut signaler que le courant et la tension sont les grandeurs équivalentes définies à partir des composantes transversales. D'une manière générale, on utilise les deux conditions suivantes pour définir $\vec{h}_t$ et $\vec{e}_t$ et puis le courant et la tension équivalents $I(z)$ et $U(z)$:

1. La première condition est la normalisation de puissance. On réécrit le vecteur de Poynting en utilisant (1.47) (1.48):

$$\int_S (\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*) \cdot d\vec{S} = U(z) I^*(z) \int_S (\vec{e}_t \times \vec{h}_t^*) \cdot d\vec{S} \quad (1.61)$$

Si l'on pose:

$$\int_S (\vec{e}_t \times \vec{h}_t^*) \cdot d\vec{S} = 1 \quad (1.62)$$

la puissance transmise se calcule par $U(z) I^*(z)$. (1.62) est la première condition.

2. Reprenons (1.47) et (1.48), nous avons:

$$\left| \frac{\vec{E}_t^\pm}{\vec{H}_t^\pm} \right| = Z_c \left| \frac{\vec{e}_t}{\vec{h}_t} \right| = Z_w$$

donc:

$$\left| \frac{\vec{e}_t}{\vec{h}_t} \right| = \frac{Z_w}{Z_c} \quad (1.63)$$

(1.63) est la deuxième condition qui définit le rapport entre les champs transversaux.

En utilisant les deux conditions (1.62)(1.63), nous avons:

$$\int_S (\vec{e}_t \times \vec{h}_t^*) \cdot d\vec{S} = \frac{Z_w}{Z_c} \int_S |h_t|^2 dS$$

$$\int_S (\vec{e}_t \times \vec{h}_t^*) \cdot d\vec{S} = \frac{Z_c}{Z_w} \int_S |e_t|^2 dS$$

soit:

$$\int_S |h_t|^2 dS = \frac{Z_c}{Z_w} \quad (1.64)$$

$$\int_S |e_t|^2 dS = \frac{Z_w}{Z_c} \quad (1.65)$$

Maintenant, les lignes dispersives sont considérées comme une ligne *TEM* équivalente. Il reste la définition des deux paramètres importants: la constante de propagation γ et l'impédance caractéristique Z_c de la ligne *TEM* équivalente. Nous prenons la constante de propagation de la ligne dispersive originale comme celle de la ligne *TEM* équivalente. Quant à l'impédance caractéristique des lignes *TE* et *TM*, il existe

plusieurs moyens pour la définir. Une fois choisie cette impédance caractéristique Z_c des lignes TE et TM , on définit $\vec{h}_t$ et $\vec{e}_t$ ainsi que le courant et la tension $I(z)$ et $U(z)$. Dans le chapitre 7, nous allons utiliser les deux conditions (1.62) (1.63) pour normaliser le mode TE_{10} du guide d'onde rectangulaire.

Chapitre 2

Formulations variationnelles

2.1 Introduction

Une des caractéristiques de la méthode des éléments finis réside dans le fait qu'elle est basée sur une représentation intégrale du phénomène analysé plutôt que sur une représentation différentielle donnée par les équations aux dérivées partielles et les conditions aux limites. Cette formulation intégrale est souvent du type variationnel. Mathématiquement le principe variationnel nous permet d'exprimer des équations différentielles avec leurs conditions aux limites sous une forme intégrale: *la fonctionnelle*. En appliquant la condition de stationnarité à cette fonctionnelle nous retrouvons les solutions qui satisfont les équations différentielles originelles.

Dans la pratique lorsque cette fonctionnelle est utilisée dans la méthode des éléments finis, elle conduit à une matrice symétrique, ce qui réduit fortement le temps de calcul. De plus la valeur de la fonctionnelle aux points stationnaires est souvent reliée aux grandeurs physiques telles que l'énergie, l'impédance et la constante de propagation.

Dans ce chapitre, nous commençons par la description générale de la méthode

variationnelle. Ensuite nous utilisons cette méthode pour trouver la fonctionnelle associée aux équations de propagation. Les fonctionnelles pour les éléments de la matrice d'impédance et l'impédance caractéristique sont aussi proposées et discutées. Ces fonctionnelles seront exploitées par la méthode des éléments finis dans les chapitres suivants.

2.2 La méthode variationnelle

La méthode variationnelle s'applique à une très grande variété de problèmes dans différents domaines comme la mécanique, la thermique et l'électromagnétisme. Prenons un exemple simple: on dit qu'une ligne droite est la plus courte distance entre deux points. C'est à dire que la fonction définissant cette ligne droite peut être trouvée en fixant les deux points extrêmes, en faisant varier la fonction jusqu'à ce que la distance soit minimale; la fonctionnelle est alors stationnaire.

Les équations aux dérivées partielles qui définissent les phénomènes électromagnétiques telles que l'équation de Poisson, l'équation de Laplace et l'équation de Helmholtz scalaires et vectorielles peuvent être généralisées sous la forme:

$$L\vec{A} = 0 \quad (2.1)$$

où L est un opérateur et $\vec{A}$ représente un certain nombre de composantes de champ. Nous considérons le problème général défini par (2.1) dans un certain volume V , soumis aux conditions aux limites. Nous supposons que l'opérateur L agissant sur $\vec{A}$ est linéaire et cherchons la solution de (2.1) dans un certain espace Ω (par exemple l'espace des fonctions définies et différentiables dans le volume V). Appelons Ω_1 le sous espace de Ω dont les éléments vérifient les conditions aux limites.

Nous définissons ensuite un produit interne, noté $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ entre deux éléments de Ω , doté des deux propriétés suivantes:

1. Si $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle + \langle \vec{B}, \vec{A} \rangle \equiv 0$ quelque soit $\vec{A} \in \Omega$, alors $\vec{B} = 0$
2. L est auto-adjoint dans le sous-espace Ω_1 , c'est à dire qu'on a

$$\langle L\vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{A}, L\vec{B} \rangle$$

pour toutes les fonctions $\vec{A}$ et $\vec{B}$ vérifiant les conditions aux limites

Considérons alors la fonctionnelle:

$$F(\vec{A}) = \langle \vec{A}, L\vec{A} \rangle \quad (2.2)$$

Si l'on accroît $\vec{A}$ de la quantité infinitésimale $\delta\vec{A}$, la variation correspondante de $F(\vec{A})$ s'écrit:

$$\delta F(\vec{A}) = \langle \delta\vec{A}, L\vec{A} \rangle + \langle \vec{A}, L\delta\vec{A} \rangle = \langle \delta\vec{A}, L\vec{A} \rangle + \langle L\vec{A}, \delta\vec{A} \rangle \quad (2.3)$$

Si $\vec{A}$ et $\delta\vec{A}$ sont tous deux dans Ω , la propriété (1) assure ensuite que $\delta F = 0$ quel que soit $\delta\vec{A}$ dans Ω , c'est à dire que la stationnarité de la fonctionnelle équivaut à l'équation $L\vec{A} = 0$ du problème posé. Donc les points stationnaires de la fonctionnelle sont vraiment les solutions de l'équation (2.1).

Si l'opérateur L n'est pas auto-adjoint, on définit un opérateur adjoint et un problème adjoint[16]:

$$\langle \vec{A}, L\vec{B} \rangle = \langle L^a\vec{B}, \vec{A} \rangle \quad (2.4)$$

$$L^a\vec{A}^a = 0 \quad (2.5)$$

La fonctionnelle fournissant la solution devient:

$$F(\vec{A}) = \langle \vec{A}^a, L\vec{A} \rangle \quad (2.6)$$

En effet, la variation de cette fonctionnelle:

$$\delta F(\vec{A}) = \langle \delta\vec{A}^a, L\vec{A} \rangle + \langle \vec{A}^a, L\delta\vec{A} \rangle = \langle \delta\vec{A}^a, L\vec{A} \rangle + \langle L^a\vec{A}^a, \delta\vec{A} \rangle$$

et la condition de stationnarité nécessite que:

$$L\vec{A} = 0 \quad (2.7)$$

$$L^a\vec{A}^a = 0 \quad (2.8)$$

Ce qui correspond à la résolution du problème original et du problème adjoint.

2.3 Construction de la fonctionnelle

Nous reprenons les équations de propagation (1.15) et (1.16)

$$\nabla \times \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H} - \mu_r k_0^2 \vec{H} = L_H(\vec{H}) = 0 \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} - \epsilon_r k_0^2 \vec{E} = L_E(\vec{E}) = 0 \quad (2.10)$$

en définissant deux opérateurs linéaires L_H et L_E . Afin d'exploiter la méthode variationnelle nous définissons ensuite un produit interne complexe:

$$\langle \vec{A}^*, \vec{B} \rangle = \int_V \vec{A}^* \cdot \vec{B} dV \quad (2.11)$$

où V est le volume du problème étudié et $*$ denote le complexe conjugué.

Nous cherchons tout d'abord la fonctionnelle de (2.9) en posant $\vec{A} = \vec{H}$. Pour la fonction $\vec{H}$ deux fois différentiable et intégrable dans le volume, nous pouvons vérifier que L_H est auto-adjoint lorsque ϵ_r et μ_r sont réelles (pas de perte) et isotropes. Donc d'après (2.2) nous avons immédiatement la fonctionnelle:

$$F(\vec{H}) = \int_V [\vec{H}^* \cdot (\nabla \times \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H} - \mu_r k_0^2 \vec{H})] dV \quad (2.12)$$

Afin de mettre (2.12) sous forme explicite, nous utilisons $A^* = H^*$ et $B = \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H}$ dans l'identité suivante:

$$\int_S (\vec{A}^* \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \int_V [(\nabla \times \vec{A}^*) \cdot \vec{B} - \vec{A}^* \cdot (\nabla \times \vec{B})] dV \quad (2.13)$$

pour obtenir:

$$\int_V [\vec{H}^* \cdot (\nabla \times \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H})] dV = \int_V [\frac{1}{\epsilon_r} (\nabla \times \vec{H}^*) \cdot (\nabla \times \vec{H})] dV - \int_S [\vec{H}^* \times (\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H})] \cdot d\vec{S} \quad (2.14)$$

Avec (2.14), la fonctionnelle (2.12) se réécrit:

$$F(\vec{H}) = \int_V [\frac{1}{\epsilon_r} (\nabla \times \vec{H}^*) \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \mu_r k_0^2 \vec{H}^* \cdot \vec{H}] dV - \int_S [(\vec{H}^* \times (\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H})) \cdot d\vec{S}] \quad (2.15)$$

Remarquons que l'intégrale de surface dans (2.15) peut être écrite:

$$-\int_S [\vec{H}^* \times (\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H})] \cdot d\vec{S} = j\omega \int_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S} \quad (2.16)$$

Le produit $(\vec{E} \times \vec{H}^*)$ est le vecteur de Poynting qui représente le flux de puissance. L'intégrale de surface (2.16) représente le flux de puissance à travers la surface S de volume V . Si la surface est un conducteur parfait, le vecteur de Poynting est tangent à la surface et l'intégrale de surface s'annule: aucune puissance ne sera transférée. (2.15) devient:

$$F(\vec{H}) = \int_V [\frac{1}{\epsilon_r} (\nabla \times \vec{H}^*) \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \mu_r k_0^2 \vec{H}^* \cdot \vec{H}] dV \quad (2.17)$$

Le cas L_H non-auto-adjoint correspond à la présence du matériau dissipatif, ϵ_r et μ_r complexes. J.P.Webb[16][18] a indiqué que dans cette situation L_H^a est simplement L_H^* et qu'il faut en plus assurer la condition d'injection de puissance dans le système. Il a montré que la fonctionnelle (2.17) devient:

$$F(\vec{H}) = \int_V [\frac{1}{\epsilon_r} (\nabla \times \vec{H}) \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \mu_r k_0^2 \vec{H} \cdot \vec{H}] dV \quad (2.18)$$

La fonctionnelle (2.18) est plus générale que (2.17).

La même démarche est suivie pour $L_E(\vec{E}) = 0$. On aboutit à la même forme de fonctionnelle où la variable $\vec{H}$ est remplacée par $\vec{E}$, et μ_r et ϵ_r sont échangés.

$$F(\vec{E}) = \int_V [\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{E}) \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \epsilon_r k_0^2 \vec{E} \cdot \vec{E}] dV \quad (2.19)$$

(2.18) et (2.19) sont les deux fonctionnelles relatives au champ magnétique $\vec{H}$ et au champ électrique $\vec{E}$. Elle sont utilisées pour résoudre les problèmes de propagation dans les lignes de transmission et dans les cavités. Dans un milieu homogène, les modes se décomposent en TE et TM , une seule composante longitudinale H_z ou E_z nous permet de définir la répartition de champs. Nous décomposons (2.18) et (2.19) en trois composantes et donnons les fonctionnelles scalaires en fonction de H_z et E_z :

$$F(H_z) = \int_V [\frac{1}{\epsilon_r} (\nabla H_z) \cdot (\nabla H_z) - \mu_r k_0^2 H_z^2] dV \quad (2.20)$$

$$F(E_z) = \int_V [\frac{1}{\mu_r} (\nabla E_z) \cdot (\nabla E_z) - \epsilon_r k_0^2 E_z^2] dV \quad (2.21)$$

Les composantes transversales sont déduites par (1.28) et (1.29).

2.4 Les conditions aux limites

Etant donné que les fonctionnelles $F(\vec{H})$ et $F(\vec{E})$ prennent la même forme, les études suivantes se dérouleront parallèlement pour $\vec{H}$ et $\vec{E}$. En fait la symétrie des équations de Maxwell permet de passer facilement de la formulation en $\vec{H}$ à la formulation en $\vec{E}$. Les deux types de conditions aux limites sont la condition de Dirichlet et la condition de Neumann.

Dans le paragraphe 2.3, au cours de la construction de la fonctionnelle, nous avons utilisé la condition suivante dans (2.15):

$$\vec{H}^* \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H} \right) \cdot \vec{n} = \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.22)$$

Cette condition équivaut à l'une des deux conditions suivantes:

$$\vec{n} \times \vec{H}^* = 0 \text{ ou } \vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad (2.23)$$

La première est la condition sur le "conducteur magnétique" parfait sans courant de surface, si l'on accepte cette notion. La deuxième est la condition sur le conducteur électrique parfait; elle est incluse dans la fonctionnelle.

On peut vérifier cette condition naturelle en prenant la variation de la fonctionnelle (2.17)[16][24]:

$$\delta F(\vec{H}) = \int_V [\delta \vec{H}^* \cdot (\nabla \times \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H} - \mu_r k_0^2 \vec{H})] dV - \int_S \delta \vec{H}^* \cdot (\vec{n} \times \frac{1}{\epsilon_r} \delta \times \vec{H}) dS \quad (2.24)$$

Dans un système fermé par le conducteur parfait, l'intégration surfacique de (2.23) s'annule. La condition de stationnarité $\delta F(\vec{H}) = 0$ quel que soit $\delta \vec{H}$ revient à annuler l'équation de propagation, d'où nécessairement:

$$\nabla \times \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H} - \mu_r k_0^2 \vec{H} = 0 \text{ dans } V$$

$$\vec{n} \times \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H} = \vec{n} \times \vec{E} = 0 \text{ sur conducteur parfait } S$$

La stationnarité de cette fonctionnelle équivaut donc au problème posé et à sa condition aux limites de Neumann.

La même procédure permet de montrer que la condition naturelle de $F(\vec{E})$ est aussi du type Neumann:

$$\vec{n} \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} = \vec{n} \times \vec{H} = 0 \quad (2.25)$$

Le deuxième type de condition aux limites, la condition de Dirichlet, détermine les différents modes de propagation et doit être appliquée lors de la résolution du problème. Il suffit de l'appliquer aux composantes tangentielles sur la surface, car les composantes normales leur sont liées. Une forme générale de la condition de Dirichlet a été introduite par J.P.Webb[16]:

$$\vec{n} \times \vec{H} = p \quad (2.26)$$

$$\vec{n} \times \vec{E} = p \quad (2.27)$$

où p est un vecteur défini sur la surface S du volume V . Le cas inhomogène $p \neq 0$ est utilisé pour décrire le mode d'excitation de ligne de transmission.

Nous résumons ci-après les différents types de conditions aux limites de $F(\vec{H})$ et $F(\vec{E})$ et ainsi que leurs significations physiques.

- Pour la fonctionnelle $F(\vec{H})$, la condition naturelle est du type Neumann:

$$\vec{n} \times \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H} = \vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad (2.28)$$

Elle n'a pas besoin d'être imposée. Comme le champ électrique tangentiel s'annule, elle correspond à une surface de conducteur électrique ou "court circuit". La surface soumise à cette condition constitue un plan de symétrie du champ magnétique ou un plan d'antisymétrie du champ électrique.

Quant à la condition de Dirichlet $\vec{n} \times \vec{H} = p$, lorsque $p \neq 0$, un mode décrit par les composantes tangentielles du champ magnétique est appliqué sur cette surface S , tandis que pour $p = 0$, la surface est un "circuit ouvert" ou un "conducteur magnétique". La surface soumise à cette condition constitue un plan de symétrie du champ électrique ou un plan d'antisymétrie du champ magnétique.

- Pour la fonctionnelle $F(\vec{E})$, la condition naturelle est aussi du type Neumann en échangeant les variables $\vec{E}$ et $\vec{H}$:

$$\vec{n} \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} = \vec{n} \times \vec{H} = 0 \quad (2.29)$$

Ici c'est le champ magnétique tangentiel qui s'annule; cette condition correspond à une surface de "conducteur magnétique" ou un "circuit ouvert". La surface soumise à cette condition constitue un plan de symétrie du champ électrique ou un plan d'antisymétrie du champ magnétique.

Quant à la condition de Dirichlet $\vec{n} \times \vec{E} = p$, lorsque $p \neq 0$, un mode décrit par les composantes tangentielles du champ électrique est appliqué sur cette surface S , tandis que pour $p = 0$ la surface est un "court circuit" ou un conducteur électrique. La surface soumise à cette condition constitue un plan de symétrie du champ magnétique ou un plan d'antisymétrie du champ électrique.

A l'intérieur du domaine V , il existe souvent plusieurs milieux caractérisés par différents ϵ_r et μ_r . Les conditions qui assurent la continuité de champs entre différents milieux sont toujours (1.11), (1.12), (1.13) et (1.14).

Il est préférable de choisir $F(\vec{H})$ pour un volume dont la permittivité ϵ_r est discontinue et $F(\vec{E})$ pour un volume dont la perméabilité μ_r est discontinue afin de garder la condition de continuité de champs entre différents milieux et faciliter éventuellement le calcul.

Les conditions aux limites relatives aux fonctionnelles scalaires $F(H_z)$ et $F(E_z)$ sont:

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \text{ et } \frac{\partial E_z}{\partial n} = 0 \quad (2.30)$$

$$H_z = p \text{ et } E_z = p \quad (2.31)$$

Elles sont respectivement la condition naturelle de Neumann et la condition de Dirichlet.

2.5 Formulation pour la matrice d'impédance

La formulation qu'on va discuter dans ce paragraphe est destinée au composant hyperfréquence décrit sur la figure (2.1). Supposons que le composant, connecté à n lignes de transmission, ne contient que des matériaux linéaires, isotropes. Les plans de référence S_i se trouvent suffisamment loins de la jonction du composant pour que les modes supérieurs soient atténués et que seuls les modes fondamentaux puissent se propager dans les n lignes de transmission. La formulation pour calculer les éléments

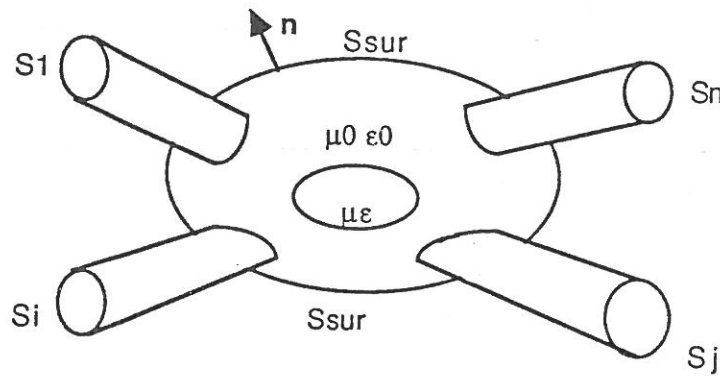


Figure 2.1: Composant hyperfréquence à n -entrées

de la matrice d'impédance du composant à n entrée a été originellement proposée par K. Morishita[10]:

$$Z_{ij} = j\omega \int_V [\mu_r \mu_0 \vec{H}_i^* \cdot \vec{H}_j - \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}_i^* \cdot \vec{E}_j] dV \quad (2.32)$$

où $\vec{H}_i$ et $\vec{E}_i$ sont les champs électromagnétiques dans le composant lorsqu'un mode est appliqué à la i ème entrée et les autres entrées sont en circuit ouvert. $\vec{H}_j$ et $\vec{E}_j$ sont les champs électromagnétiques dans le composant lorsqu'un mode est appliqué à la j ème entrée et que les autres entrées sont en circuit ouvert. En raison de la linéarité du système, les champs dans le système qui correspondent au mode de la i ème entrée et de la j ème entrée s'écrivent:

$$\vec{H} = \vec{H}_i + \vec{H}_j \quad (2.33)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_j \quad (2.34)$$

Les champs $\vec{H}_i$ et $\vec{E}_i$, $\vec{H}_j$ et $\vec{E}_j$ sont calculés par l'une des fonctionnelles (2.18) et (2.19) en appliquant les conditions aux limites correspondantes. Dans la pratique on

écrit (2.31) de la façon suivante:

$$Z_{ij} = -j \frac{\eta_0}{k_0} \int_V \left[\frac{1}{\epsilon_r} (\nabla \times \vec{H}_i^*) \cdot (\nabla \times \vec{H}_j) - \mu_r k_0^2 \vec{H}_i^* \cdot \vec{H}_j \right] dV \quad (2.35)$$

La matrice d'admittance est déduite en échangeant $\vec{H}$ et $\vec{E}$, ϵ_r et μ_r .

$$Y_{ij} = \frac{-j}{k_0 \eta_0} \int_V \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{E}_i^*) \cdot (\nabla \times \vec{E}_j) - \epsilon_r k_0^2 \vec{E}_i^* \cdot \vec{E}_j \right] dV \quad (2.36)$$

Cependant, ici $\vec{E}_i$ est le champ électrique dans le composant lorsqu'un mode est appliqué à la i ème entrée et que les autres entrées sont en court circuit. $\vec{E}_j$ est le champ électrique dans le système lorsqu'un mode est appliqué à la j ème entrée et les autres entrées sont en court circuit. Les deux expressions (2.34) et (2.35) ont été également généralisées au cas du matériau dissipatif en supprimant le complexe conjuguée $*$ et en utilisant ϵ_r et μ_r complexes[35].

La notion de matrices d'impédance et d'admittance est tout à fait semblable à celle des circuits électriques. Les éléments Z_{ij} et Y_{ij} sont respectivement les paramètres en circuit ouvert et les paramètres en court circuit. Lorsqu'on excite chaque entrée avec le champ normalisé, on obtient les éléments z_{ij} et y_{ij} normalisés.

2.6 Formulation pour l'impédance caractéristique

La notion d'impédance caractéristique a été introduite au paragraphe 1.3 . Elle consiste à définir la relation entre le champ électrique et le champ magnétique d'une ligne de transmission *TEM*. Nous avons déjà montré au paragraphe 1.3 que la répartition de champ transversale de ligne *TEM* est un problème statique caractérisé par l'équation de Laplace:

$$\nabla_t^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.37)$$

$\phi = c$ sur les conducteurs

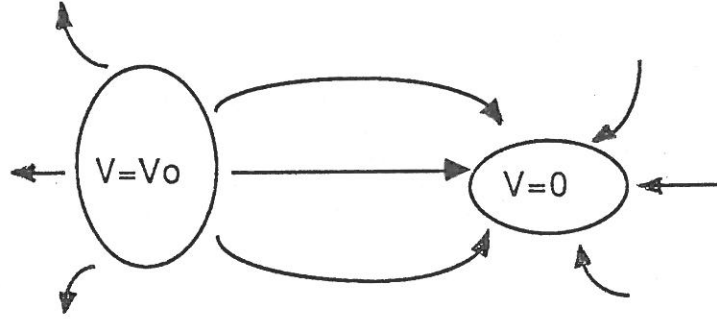


Figure 2.2: Section transversale de ligne *TEM*

dont la forme variationnelle associée est:

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_S \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.38)$$

La solution du potentiel scalaire ϕ_0 de la ligne *TEM* peut être trouvée en minimisant la fonctionnelle (2.37) et en appliquant les potentiels correspondants.

Afin de trouver la formulation pour l'impédance caractéristique, nous écrivons tout d'abord l'énergie électrique par unité de longueur de ligne *TEM*:

$$W_e = \frac{1}{2} C_0 \Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{Z_c} \Delta V^2 \quad (2.39)$$

où C_0 est la capacité par unité de longueur et ΔV la différence potentielle entre les deux conducteurs de ligne *TEM*. L'impédance caractéristique est donc donnée par:

$$Z_c = \frac{1}{2} \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\Delta V^2}{W_e} \quad (2.40)$$

Exprimons l'énergie électrique W_e et la différence potentielle ΔV par le potentiel ϕ_0 trouvé, nous avons:

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\left[\int_l \left(\hat{x} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \phi_0}{\partial y} \right) \cdot d\vec{l} \right]^2}{\int_S \left[\left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy} \quad (2.41)$$

2.7 Discussion

La fonctionnelle est associée normalement à une grandeur physique. La stationnarité de la fonctionnelle révèle un point stationnaire du système physique. A l'égard des fonctionnelles des paragraphes précédents, nous faisons les remarques suivantes:

1. La fonctionnelle (2.15) est plus générale que la fonctionnelle (2.17). La fonctionnelle (2.15) relève la loi de conservation de l'énergie (1.19); elle est simplifiée en forme de (2.17) pour un système fermé par le conducteur parfait, sans aucun échange de l'énergie avec l'extérieur. Si l'on prend la variation de (2.15), l'intégration surfacique est neutralisée par celle de (2.23). En utilisant la condition de stationnarité, on retrouve l'équation de propagation. Pour conclure, le problème originel: l'équation de propagation avec la condition de Dirichlet et la condition de Neumann, équivaut aux points stationnaires de la fonctionnelle avec la condition de Dirichlet:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_H(\vec{H}) = 0 \\ \text{Condition de Dirichlet} \\ \text{Condition de Neumann} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \delta F(\vec{H}) = 0 \\ \text{Condition de Dirichlet} \end{array} \right. \quad (2.42)$$

2. En utilisant (1.19), on peut exprimer (2.31) de la façon suivante:

$$Z_{ij} = - \int_S (\vec{E}_{ii}^* \times \vec{H}_{ij}) \cdot d\vec{S} \quad (2.43)$$

On remarque que Z_{ij} est associée à une puissance à travers la surface S de l'entrée du composant. Avec la notion de courant et tension équivalents (1.47) (1.48), en tenant compte de la condition de normalisation (1.62), cette puissance est proportionnelle à l'impédance du composant:

$$Z_{ij} = -I_i^* U_j = -I_i^* Z'_{ij} I_j$$

De même pour Y_{ij} (2.35).

Les fonctionnelles $F(\vec{H})$ et $F(\vec{E})$ sont aussi des grandeurs associées à la puissance dans le volume. Supposons que $\vec{H}_{ii}$ et $\vec{E}_{ii}$ sont les champs trouvés quand la i

ème entrée est excitée. Mettons ces champs dans les foctionnelles $F(\vec{H})$ et $F(\vec{E})$, nous obtenons:

$$F(\vec{H}) = -j\omega\epsilon_0 \int_S (\vec{E}_{ii}^* \times \vec{H}_{ii}) \cdot d\vec{S} = -j\omega\epsilon_0 Z_{ii} \quad (2.44)$$

$$F(\vec{E}) = -j\omega\mu_0 \int_S (\vec{E}_{ii}^* \times \vec{H}_{ii}) \cdot d\vec{S} = -j\omega\mu_0 Y_{ii} \quad (2.45)$$

On voit que $F(\vec{H})$ et $F(\vec{E})$ sont proportionnelles à la puissance incidente de cette entrée, de plus, aux éléments diagonaux Z_{ii} et Y_{ii} .

3. Les éléments diagonaux de la matrice d'impédance sont proportionels aux impédances d'entrée des accès correspondants du composant[16]. En écrivant (1.31) et (1.32):

$$\vec{E}_{ii} = I^+ Z_c (1 + \Gamma_i) \vec{e}_{ii} \quad (2.46)$$

$$\vec{H}_{ii} = I^+ (1 - \Gamma_i) \vec{h}_{ii} \quad (2.47)$$

où le coefficient de reflexion:

$$\Gamma_i = \frac{U^-}{U^+} = -\frac{I^-}{I^+}$$

(2.41) devient:

$$z_{ii} = -I^{+2} Z_c (1 - \Gamma_i^2) \int_S (\vec{e}_{ii}^* \times \vec{h}_{ii}) \cdot d\vec{S} \quad (2.48)$$

Si l'on applique à la i ème entrée un champ magnétique transversal de l'amplitude A_i :

$$\vec{H}_{ii} = A_i \vec{h}_{ii} \quad (2.49)$$

En comparant (2.45) et (2.47), nous avons:

$$I^+ = \frac{A_i}{1 - \Gamma_i}$$

Avec la condition de normalisation:

$$\int_S (\vec{e}_{ii}^* \times \vec{h}_{ij}) \cdot d\vec{S} = 1$$

(2.46) devient:

$$\frac{Z_{ii}}{Z_c} = -A_i^2 \frac{1 + \Gamma_i}{1 - \Gamma_i} = -A_i^2 z_{en} \quad (2.50)$$

De la même manière les éléments diagonaux de la matrice d'admittance sont proportionnels aux admittances d'entrée des accès correspondants du composant.

$$\frac{Y_{ii}}{Y_c} = -B_i^2 \frac{1 - \Gamma_i}{1 + \Gamma_i} = -B_i^2 y_{en} \quad (2.51)$$

A_i et B_i sont les amplitudes du champ magnétique et du champ électrique appliqués. Il en résulte que les fonctionnelles $F(\vec{H})$ et $F(\vec{E})$ sont aussi proportionnelles à l'impédance d'entrée et à l'admittance d'entrée du composant.

$$F(\vec{H}) = -j\omega\epsilon_0 z_{en} \quad (2.52)$$

$$F(\vec{E}) = -j\omega\mu_0 y_{en} \quad (2.53)$$

Chapitre 3

Résolution par la méthode des éléments finis

3.1 Introduction

Les équations de Maxwell conduisent à des équations de propagation(1.15)(1.16). Si les systèmes étudiés sont simples, leur solution analytique ne peut être obtenue que dans de rares configurations. Dans la plupart des cas pratiques, l'emploi de méthodes numériques de résolution s'impose donc. Trois catégories de méthode ont été successivement développées: la méthode des différences finies, la méthode des équations intégrales de frontière et la méthode des éléments finis. Nous utilisons dans cette thèse la méthode des éléments finis.

Concept introduit vers les années cinquante, la méthode des éléments finis a connu depuis l'année soixante une expansion très rapide. Actuellement cette méthode est très répandue dans les industries, en particulier dans les applications mécanique, thermique et hydraulique et surtout pendant ces vingt dernières années dans le domaine de l'électromagnétisme. C'est une méthode qui s'adapte facilement à la modélisation des phénomènes régis par des équations aux dérivées partielles. Nous allons tenter dans cette thèse d'utiliser cette méthode pour résoudre quelques problèmes en hy-

perfréquences régis par l'équation de propagation. Cette méthode a été développée et décrite dans de nombreux ouvrages[37][38][39], c'est pourquoi nous la présentons très brièvement.

3.2 La méthode des éléments finis

Un modèle mathématique d'un système physique fait intervenir plusieurs variables ou fonctions dites exactes $A_{ex}(x, y, z)$: champ électrique, champ magnétique, potentiel etc. Celles-ci sont représentées pour les méthodes numériques par des fonctions approchées $A(x, y, z)$ telles que la différence:

$$e(x, y, z) = A(x, y, z) - A_{ex}(x, y, z) \quad (3.1)$$

soit assez petite pour l'objet visé.

3.2.1 Approximation nodale

Pour construire une fonction approchée, nous pouvons choisir un ensemble fini de fonction dépendantes des n paramètres a_i :

$$A(x, y, z, a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (3.2)$$

Les fonctions $A(x, y, z, a_1, a_2, \dots, a_n)$ sont souvent choisies de manière à être faciles à évaluer sur ordinateur, à intégrer ou dériver explicitement. Elles peuvent s'écrire:

$$A(x, y, z) = P_1(x, y, z)a_1 + P_2(x, y, z)a_2 + \dots + P_n(x, y, z)a_n = [P(x, y, z)][a]^t \quad (3.3)$$

où $P_1, P_2, \dots, P_n$ sont des fonctions connues, linéairement indépendantes, telles que des polynômes ou des fonctions trigonométriques; $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont les paramètres de l'approximation. Ils sont déterminés pour satisfaire la condition (3.1), par exemple en faisant coïncider $A_{ex}(x, y, z)$ et $A(x, y, z)$ en n points $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$,

c'est à dire en annulant $e(x)$ en ces n points. Ainsi nous avons un système algébrique de dimension n . La résolution du système nous donne les n coefficients $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Les paramètres $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont les paramètres généraux de l'approximation. Les fonctions $P_1, P_2, \dots, P_n$ sont les fonctions de base de l'approximation. La relation (3.3) définit une approximation non nodale.

Les paramètres $a_1, a_2, \dots, a_n$ n'ont pas en général de sens physique. Cependant nous pouvons choisir comme paramètres a_i les valeurs de la fonction $A_{ex}(x, y, z)$ en n points $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$, appelés noeuds de coordonnées. Imposons de plus que la fonction approchée $A(x, y, z)$ coïncide avec la fonction exacte $A_{ex}(x, y, z)$ en ces noeuds:

$$\begin{aligned} A(x_1, y_1, z_1) &= A_{ex}(x_1, y_1, z_1) = A_1 \\ A(x_2, y_2, z_2) &= A_{ex}(x_2, y_2, z_2) = A_2 \\ &\dots\dots\dots \\ A(x_n, y_n, z_n) &= A_{ex}(x_n, y_n, z_n) = A_n \end{aligned} \quad (3.4)$$

Les fonctions approchées (3.3) s'écrivent alors:

$$A(x, y, z) = N_1(x, y, z)A_1 + N_2(x, y, z)A_2 + \dots + N_n(x, y, z)A_n = [N(x, y, z)][A_n]^t \quad (3.5)$$

Les paramètres A_i sont les paramètres nodaux de l'approximation. Les fonctions $N_i(x, y, z)$ sont les fonctions d'interpolation. La relation (3.5) définit une approximation nodale.

L'approximation nodale possède deux propriétés fondamentales qui découlent des relations (3.4) et (3.5):

1. Comme $A(x_i, y_i, z_i) = A_i$, les fonctions d'interpolation N_j vérifient:

$$N_j(x_i, y_i, z_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases} \quad (3.6)$$

2. L'erreur d'approximation définie par:

$$e(x, y, z) = A(x, y, z) - A_{ex}(x, y, z) \quad (3.7)$$

s'annule en tous les noeuds (x_i, y_i, z_i) , c'est à dire $e(x_i, y_i, z_i) = 0$.

3.2.2 Approximation par éléments finis

La construction d'une fonction approchée $A(x, y, z)$ est difficile lorsque le nombre n de noeuds et donc de paramètres A_i devient important. Le problème se complique encore si le domaine V a une forme complexe et si la fonction $A(x, y, z)$ doit satisfaire des conditions aux limites sur la frontière de domaine V . La méthode d'approximation nodale par sous-domaine simplifie la construction de $A(x, y, z)$ et s'adapte très bien au calcul sur ordinateur. Elle consiste à

- identifier un ensemble de sous-domaine V^e dits des éléments du domaine V
- définir une fonction approchée $A^e(x, y, z)$ différente sur chaque sous-domaine V^e par la méthode d'approximation nodale

Les points en lesquels la fonction approchée $A^e(x, y, z)$ coïncide avec la fonction exacte $A_{ex}(x, y, z)$ sont les noeuds d'interpolation ou points nodaux. Les valeurs $A(x_i, y_i, z_i) = A_{ex}(x_i, y_i, z_i) = A_i$ sont les variables nodales. Nous illustrons cette notion par un système de deux éléments à deux dimensions dans la figure 3.1:

Définition de la géométrie des éléments:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Noeuds :} & 1, 2, 3, 4 \\
 \text{Coordonnées :} & x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4 \\
 \text{Eléments :} & V^1 : 1 - 2 - 4, \quad V^2 : 2 - 3 - 4
 \end{array} \tag{3.8}$$

Construction des fonctions approchées $A^e(x, y)$

Supposons que les variables nodales sont: A_1, A_2, A_3, A_4 . Les fonctions approchées sur chaque éléments sont:

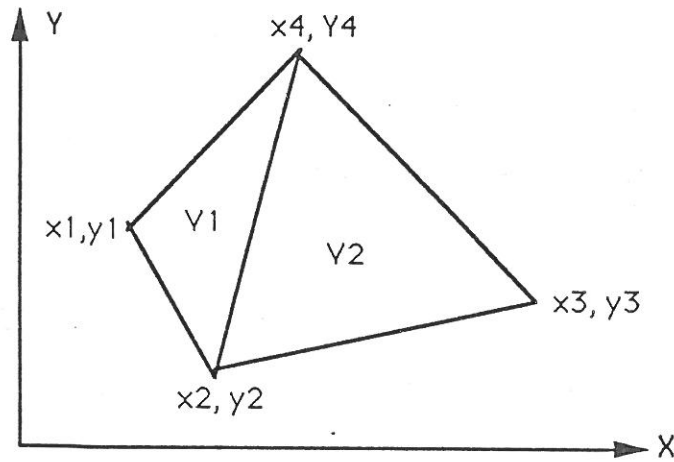


Figure 3.1: Approximation à deux dimensions par éléments finis

- Sur élément 1 (domaine V^1)

$$A^1(x, y) = N_1(x, y)A_1 + N_2(x, y)A_2 + N_3(x, y)A_4 \quad (3.9)$$

$A^1(x, y)$ est une fonction linéaire en x et y qui prend les valeurs A_1, A_2, A_4 aux points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_4, y_4)$. Cette fonction est nulle en dehors du domaine V^1 . La fonction N_1 est une fonction linéaire en x et y qui prend la valeur 1 en (x_1, y_1) et la valeur 0 en $(x_2, y_2), (x_4, y_4)$. N_1 est nulle en dehors de V^1 .

- Sur élément 2 (domaine V^2)

$$A^2(x, y) = N_1(x, y)A_2 + N_2(x, y)A_3 + N_3(x, y)A_4 \quad (3.10)$$

Généralement nous pouvons écrire l'approximation par élément:

$$A^e(x, y, z) = [N_1(x, y, z), N_2(x, y, z), \dots, N_n(x, y, z)][A^e_1, A^e_2, \dots, A^e_n]^t = [N][A^e]^t \quad (3.11)$$

3.3 La discrétisation des fonctionnelles

Avant de discrétiser les fonctionnelles du chapitre 2, il est nécessaire de les mettre sous forme explicite. Dans cette thèse, nous allons résoudre les problèmes dans les milieux isotropes. Donc les grandeurs tensoriels ϵ et μ se réduisent aux grandeurs scalaires, mais peuvent être complexes dans le cas où les matériaux sont dissipatifs. Suivant les types de problèmes à aborder dans cette thèse, nous discrétisons la fonctionnelle $F(\vec{H})$.

La fonctionnelle (2.17) peut être utilisée pour traiter une cavité chargée de diélectrique ϵ_r sans perte. En coordonnées cartésiennes elle s'exprime[9]:

$$\begin{aligned}
 F(\vec{H}) = & \int_V \left[\frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\partial H_x^*}{\partial y} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\partial H_y^*}{\partial z} - \frac{\partial H_x^*}{\partial y} \frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{\partial H_y}{\partial z} \frac{\partial H_y^*}{\partial z} \right) \right. \\
 & + \frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} \frac{\partial H_x^*}{\partial z} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \frac{\partial H_y^*}{\partial x} - \frac{\partial H_x^*}{\partial z} \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\partial H_y^*}{\partial x} \right) \\
 & + \frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\partial H_y^*}{\partial x} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\partial H_x^*}{\partial y} - \frac{\partial H_y^*}{\partial x} \frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\partial H_x^*}{\partial y} \right) \\
 & \left. - k_0^2 (H_x H_x^* + H_y H_y^* + H_z H_z^*) \right] dx dy dz
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

où $\vec{H}$ est un vecteur complexe avec la dépendance de $e^{j\omega t}$.

Pour les problèmes de propagation dans un guide d'onde, nous supposons que l'onde se propage dans la direction z avec une constante de propagation β . En séparant la dépendance transversale et longitudinale, nous écrivons le champ magnétique de la forme:

$$\vec{H} = [\hat{x}H_x(x, y) + \hat{y}H_y(x, y) + j\hat{z}H_z(x, y)]e^{-j\beta z} \tag{3.13}$$

(3.12) devient donc:

$$\begin{aligned}
 F(\vec{H}) = & \frac{2\pi}{\beta} \int_S \left[\frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} + \beta H_y \right)^2 + \frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} + \beta H_x \right)^2 + \frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{\partial H_y^*}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)^2 \right. \\
 & \left. - k_0^2 (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) \right] dx dy
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

où la constante $\frac{2\pi}{\beta}$ provient de l'intégration par rapport à z sur une période de l'onde.

Nous utilisons la notion des éléments finis définie précédemment pour discrétiser la fonctionnelle 3.14. En définissant sur chaque élément du domaine les composantes du champ magnétique:

$$H_x^e(x, y, z) = [N_1, N_2, \dots, N_n][H_{x1}^e, H_{x2}^e, \dots, H_{xn}^e]^t = [N^e][H_x^e]^t \quad (3.15)$$

$$H_y^e(x, y, z) = [N_1, N_2, \dots, N_n][H_{y1}^e, H_{y2}^e, \dots, H_{yn}^e]^t = [N^e][H_y^e]^t \quad (3.16)$$

$$H_z^e(x, y, z) = [N_1, N_2, \dots, N_n][H_{z1}^e, H_{z2}^e, \dots, H_{zn}^e]^t = [N^e][H_z^e]^t \quad (3.17)$$

la fonctionnelle (3.14) devient:

$$F(\vec{H}) = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} - k_0^2 \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} N_{11} & & \\ & N_{22} & \\ & & N_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

H_x, H_y, H_z sont des vecteurs de dimension égale au nombre de noeuds n du domaine. Définies dans l'Annexe C, les matrices $[M]$ et $[N]$ proviennent de l'assemblage des matrices partielles définies sur chaque élément. La fonctionnelle $F(\vec{H})$ est mise forme matricielle dont la dimension totale est de $3n \times 3n$. Elle est en fonction des coefficients H_x, H_y, H_z définis en chacun des n noeuds des éléments du domaine

$$F(\vec{H}) = f(H_{x1} \dots H_{xi} \dots H_{xn}, H_{y1} \dots H_{yi} \dots H_{yn}, H_{z1} \dots H_{zi} \dots H_{zn}) \quad (3.19)$$

dont l'extremum est donné par la résolution des $3n$ équations linéaires suivantes:

$$\frac{\partial F(\vec{H})}{\partial H_k} \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, 3n \quad (3.20)$$

Explicitement (3.11) s'écrit:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} - k_0^2 \begin{pmatrix} N_{11} & & \\ & N_{22} & \\ & & N_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

soit:

$$[M - k_0^2 N][H]^t = 0 \quad (3.22)$$

Les conditions d'extrémum combinées aux relations matricielles fournissent une équation matricielle unique qui regroupe en un vecteur $[H_{3n}]$ tous les coefficients définis aux noeuds du domaine.

La fonctionnelle (3.12) destinée à la cavité peut être discrétisée d'une même manière. Nous arriverons à la même forme de matrice dont les éléments sont modifiés.

Pour les cavités et guides d'onde homogènes dans lesquels existent seulement les modes non-hybrides, on utilise directement les fonctionnelles de l'équation de Helmholtz scalaire (2.20 ou 2.21) à deux dimensions et à trois dimensions.

$$F(H_z) = \int_V \left[\frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \right) - \mu_r k_0^2 H_z^2 \right] dx dy dz \quad (3.23)$$

$$F(H_z) = \int_S \left[\frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} \right) - \mu_r k_c^2 H_z^2 \right] dx dy \quad (3.24)$$

De la même manière, pour discrétiser (3.23), on définit la composante longitudinale sur chaque élément:

$$H_z^e(x, y, z) = [N_1, N_2, \dots, N_n][H_{z1}^e, H_{z2}^e, \dots, H_{zn}^e]^t = [N^e][H_z^e]^t \quad (3.25)$$

La condition d'extremum nous permet d'obtenir la même relation matricielle que (3.21) dont les deux matrices sont simplifiées:

$$[M] = \sum_e \int \int_e \frac{1}{\epsilon_r} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (3.26)$$

$$[N] = \sum_e \int \int_e N_i N_j dx dy dz \quad (3.27)$$

où $[M]$ et $[N]$ sont de dimension n . Pour la forme discrétisée de (3.24), il ne reste que les deux premiers termes dans la matrice $[M]$ de (3.26) et l'intégration se fait sur une surface.

Les fonctionnelles en fonction de champ électrique $F(\vec{E})$ et $F(E_z)$ s'obtiennent à partir de la symétrie des équations de Maxwell en échangeant $\vec{H}$ et $\vec{E}$, ϵ_r et μ_r .

La fonctionnelle, une fois discrétisée selon la méthode des éléments finis, conduit à une relation matricielle qui inclut, dans les matrices M et N , la géométrie, les conditions aux limites et les valeurs locales de la permittivité et de la perméabilité. Le système algébrique comme (3.22) sera traité ensuite par les méthodes numériques afin de sortir les valeurs propres, les vecteurs propres et les paramètres associés.

3.4 Les modes non-physiques

Le phénomène des modes non-physiques a été étudié dans de nombreuses publications dès l'utilisation de la fonctionnelle vectorielle [19][20] [21][22][23][24][25][26]. Les modes non-physiques, étant solutions de la fonctionnelle, satisfaisant les conditions aux limites, se mélangent dans les modes physiques et polluent les valeurs et vecteurs propres. Ils peuvent être identifiés par leur répartition de champs non régulière et le non respect de la condition de divergence nulle. De nombreux chercheurs pensent que la condition de divergence nulle n'est pas impliquée directement dans la fonctionnelle. C'est ainsi que les méthodes proposées pour supprimer ces modes non-physiques s'appuient sur l'application de cette condition de divergence.

De mise en oeuvre relativement simple, la méthode de pénalité consiste à ajouter un terme de divergence dans la fonctionnelle (2.17) [19][20].

$$F(\vec{H}) = \int_V \left[\frac{1}{\epsilon_r} (\nabla \times \vec{H}^*) \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \mu_r k_0^2 \vec{H}^* \cdot \vec{H} \right] dV + p \int_V [(\nabla \cdot \vec{H}^*) \cdot (\nabla \cdot \vec{H})] dV \quad (3.28)$$

où p est le coefficient de pénalité à ajuster d'après l'expérience. Au niveau de la discrétisation et de la construction de la matrice, une matrice de pénalité $[P]$ correspondant au terme de divergence est ajoutée à la matrice $[M]$

$$[M + P - k_0^2 N][H]^t = 0 \quad (3.29)$$

Les éléments de la matrice $[P]$ sont montrés dans l'Annexe C. Cette méthode sera mise en oeuvre dans le chapitre 4 pour calculer les guides d'onde rectangulaire chargé de diélectrique.

Une autre méthode consiste à introduire directement la condition de divergence nulle dans la fonctionnelle[25][26]. Par exemple dans un guide d'onde on peut écrire la condition de divergence $\nabla \times \vec{H} = 0$ sous la forme:

$$H_z = \frac{1}{j\beta} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) \quad (3.30)$$

Appliquons la procédure de Galerkin[37] sur (3.30) et la discrétisons pour obtenir:

$$\int \int_e [N][N]^t dx dy [H_z] = \frac{1}{j\beta} \int \int_e \left([N] \frac{\partial [N]^t}{\partial x} \quad [N] \frac{\partial [N]^t}{\partial y} \right) dx dy [H_x \quad H_y]^t \quad (3.31)$$

soit:

$$[D_z][H_z] = [D_{tx} \quad D_{ty}][H_x \quad H_y]^t \quad (3.32)$$

On peut présenter maintenant avec (3.32) le champ par ses composantes transversales:

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ [D_z]^{-1}[D_{tx}] & [D_z]^{-1}[D_{ty}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

soit:

$$[H] = [D][H_t]^t$$

La formulation matricielle (3.22) devient:

$$[M_t - k_0^2 N_t][H_t]^t = 0 \quad (3.34)$$

où

$$[M_t] = [D]^t [M] [D]$$

$$[N_t] = [D]^t [N] [D]$$

Par rapport à sa forme originelle, la dimension de la matrice est réduite d'un tiers . Par rapport à (3.28) on n'a plus besoin d'ajuster le coefficient de pénalité p . Mais la construction de la matrice devient compliquée. Cette méthode peut être généralisée à trois dimensions pour les cavités

Il existe d'autres types de méthodes qui permettent de traiter les modes non-physiques. Bien que nous pouvons pas les détailler, nous préférons de les mentionner quand même dans cette thèse afin de donner quelques traces aux autres chercheurs.

La mesure pour imposer la condition de divergence nulle peut être prise directement sur les éléments. Nous pouvons utiliser les éléments spéciaux, par exemple les éléments d'arêtes, dans lesquels la condition de divergence nulle est impliquée dans ses fonctions d'interpolation. Décrite déjà dans l'introduction, l'utilisation de la fonctionnelle en fonction du potentiel vectorielle $F(\vec{A})$ [12] est un autre moyen faisable. Au prix de l'augmentation de mémoire et de la complexité de la formulation, la fonctionnelle complète [11] $F(\vec{H}, \vec{E})$ a été prouvée valable pour supprimer les modes non-physiques. En outre, il est à remarquer que la méthode numérique la plus ancienne, la méthode des différences finis, possède un avantage particulier pour calculer les guides d'onde sans modes non-physique [40][41]. Elle travaille directement avec les équations différentielles sans passer par la formulation intermédiaire: la fonctionnelle.

3.5 Deux types de problèmes en hyperfréquences

L'ensemble de problèmes de propagation est classé en deux types: : le problème aux valeurs propres et le problème de répartition. Leurs formes matricielles s'écrivent respectivement:

$$(1) [M_1] - \lambda_1 [N_1] [A_1]^t = 0 \quad (3.35)$$

$$(2) [M_2] - \lambda_2 [N_2] [A_2]^t = [C] \quad (3.36)$$

Le premier consiste à résoudre un système fermé et trouver les valeurs propres et les vecteurs propres du système. Ce type de problème concerne les modes de propagation dans les guides d'onde et les modes de résonance dans les cavités. Dans (3.35) $[A_1]$ et λ_1 sont respectivement le vecteur propre et la valeur propre à rechercher. $[M_1]$ et $[N_1]$ sont des mêmes matrices que $[M]$ et $[N]$ décrites dans (3.22).

Pour le deuxième type de problème, on applique directement un mode ou des modes à une entrée ou plusieurs entrées d'un système, résoud un problème de déterministe, trouve la répartition de champ du système à partir de laquelle on déduit les paramètres

du système tels que le coefficient de réflexion et le coefficient de transmission. Ce type de problème concerne principalement les composants hyperfréquences à multiples entrées. Dans (3.36) $[C]$ est un vecteur connu provenant du mode d'excitation, λ_2 est la fréquence d'excitation du système. $[M_2]$, $[N_2]$ sont les matrices réduites des matrices $[M_1]$, $[N_1]$. $[A_2]$ est un vecteur inconnu à calculer, décrivant la répartition du champ du système.

En effet, les deux types de problèmes se sont liés. Ils utilisent la même fonctionnelle. En donnant une valeur connue à λ_1 (λ_2 par exemple) et en affectant certains éléments du vecteur $[A_1]$ de valeurs connues (mode d'excitation), le premier type de problème est transformé au deuxième type avec un second membre $[C]$. (3.36) peut se réécrire:

$$[Q][A_2] = [C] \quad (3.37)$$

Les dimensions de $[Q]$ et $[A_2]$ sont réduites par rapport à celles de $[M_1]$ et $[A_1]$.

3.6 Utilisation de la fonctionnelle

Avant de commencer à appliquer la méthode des éléments finis aux problèmes hyperfréquences, il est nécessaire de discuter deux étapes préliminaires importantes. Il s'agit du choix du type de fonctionnelle et de la géométrie de travail, les deux étapes qui méritent une certaine connaissance du phénomène physique.

Nous avons parlé déjà du choix du type de fonctionnelle dans les paragraphes précédents. Cela implique en effet deux aspects: le choix du type de fonctionnelle (vectorielle ou scalaire) et le choix du type de variable de la fonctionnelle ($\vec{H}$ ou $\vec{E}$, H_z ou E_z).

1. Puisque nous travaillons dans cette thèse avec les fonctionnelles vectorielles $F(\vec{H})$, $F(\vec{E})$ et les fonctionnelles scalaires $F(H_z)$ et $F(E_z)$, nous parlons donc

de l'utilisation de ces deux types de fonctionnelle. Dans un système au milieu homogène on utilise les fonctionnelles scalaires car il ne peut s'y propager que les modes non-hybrides tandis que dans un système au milieu inhomogène l'utilisation des fonctionnelles vectorielles est nécessaire pour traiter les modes hybrides. Mais il est possible d'utiliser les fonctionnelles scalaires pour traiter certains modes non-hybrides du système au milieu inhomogène. Il n'empêche pas non-plus d'utiliser les fonctionnelles vectorielles pour traiter un système homogène, mais les modes non-physiques sont toujours présents.

2. Le choix du type de variable de la fonctionnelle dépend premièrement de la nature des matériaux (ϵ_r , μ_r) dans le système. Pour profiter de la continuité de la variable entre les matériaux on choisit $F(\vec{H})$ ou $F(H_z)$ dans le système du matériau μ_r homogène, ϵ_r inhomogène et $F(\vec{E})$ ou $F(E_z)$ dans le système du matériau μ_r inhomogène, ϵ_r homogène. Le choix du type de variable dépend deuxièmement pour les fonctionnelles scalaires, du type de mode à résoudre. On choisit H_z pour trouver les modes TE et E_z pour les modes TM .

La géométrie de travail est la géométrie du problème à utiliser par le programme. Il arrive souvent que la géométrie possède une certaine symétrie et l'on s'intéresse alors seulement à un certain mode. Un bon choix de la géométrie de travail en tenant compte de ces conditions nous permet de travailler seulement sur une portion de la géométrie globale du problème et réduire ainsi le temps de calcul. Nous allons illustrer le choix de la géométrie de travail dans le chapitre suivant par des problèmes concrets.

3.7 Description du programme FLUXLAB

Les fonctionnelles destinées à résoudre les problèmes de propagation ont été programmées et intégrées dans un logiciel d'éléments finis FLUXLAB, que nous allons présenter.

Développé depuis une dizaine d'année par l'équipe de C.A.O du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, le programme FLUXLAB est un logiciel réalisé en FORTRAN 77. Ce logiciel, basé sur la méthode des éléments finis, permet de résoudre une grande gamme de problèmes électrotechniques. La partie hyperfréquence a été intégrée en utilisant les environnements déjà existants. Le changement essentiel se trouve dans la partie concernant l'équation physique. Nous utilisons la méthode de sous-espace pour résoudre le problème aux valeurs propres. La structure du programme est indiquée dans la figure 3.2 Nous décrivons brièvement les différentes étapes pour traiter un problème.

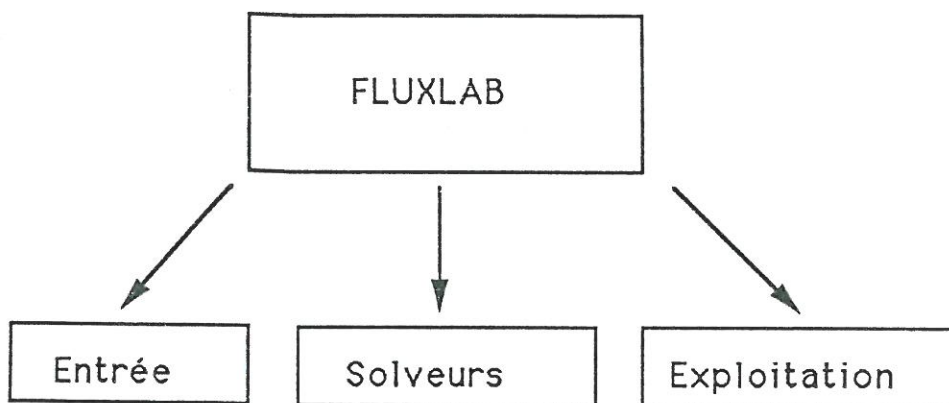


Figure 3.2: La structure du programme FLUXLAB

1. L'entrée des "points" constitue la première étape. Toute extrémité de ligne ou d'arc de cercle, décrivant la géométrie du problème, ainsi que les centres des cercles, doivent être entrés dans le programme sous forme de points. Les coordonnées cartésiennes ou polaires peuvent être utilisées et les axes de symétrie précisés.
2. L'entrée des "lignes" (segments de droite, ou arcs de cercle joignant deux points) vient ensuite, puis leur discrétisation. La figure 3.3 nous montre les points, les lignes et les noeuds discrétisés sur ces lignes. Une discrétisation plus fine doit être

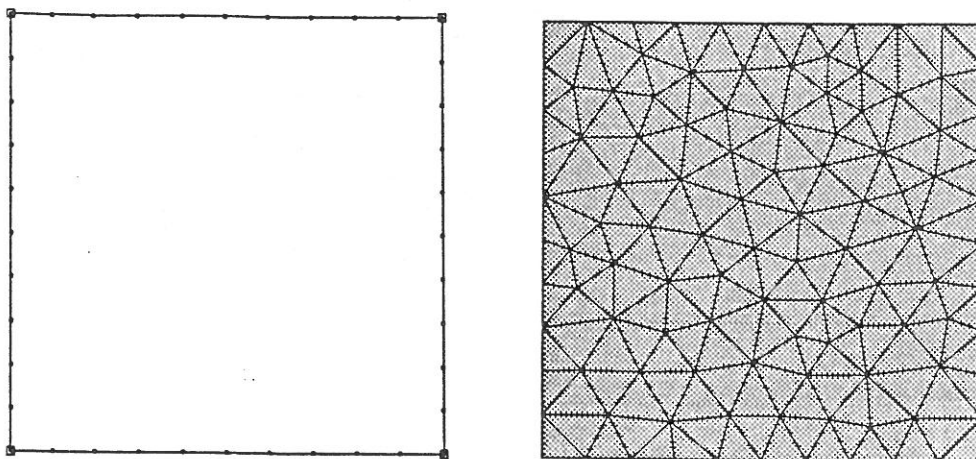


Figure 3.3: Le maillage d'une géométrie

faite aux endroits du problème où les propriétés physiques sont plus accentuées, ce qui demande une certaine expérience de l'utilisateur.

3. L'étape suivante consiste en la description des "frontière", lignes sur lesquelles on connaît les conditions aux limites du problème, puis de ces conditions aux limites elles-mêmes: la condition de Dirichlet ou la condition de Neumann.
4. C'est ensuite qu'intervient le mailleur automatique. Le domaine du problème est découpé en éléments finis, ici des triangles générés automatiquement sur lesquels les variables physiques seront approximées.
5. La dernière étape avant la résolution est la description des "régions" et leurs propriétés physiques (permittivité et perméabilité) et l'affectation du type de problème physique aux régions sur lesquelles va porter l'étude.
6. Il est ensuite possible de résoudre le problème, puis d'exploiter les résultats: tracer les courbes et les champs, faire l'intégration sur une frontière ou sur une région, calculer les valeurs ponctuelles, le gradient, le divergence et le rotationnel d'une variable physique, etc.

Partie II

Application à la modélisation des structures classiques en hyperfréquences

La deuxième partie divisée en quatre chapitres(chapitre 4, chapitre 5, chapitre 6, chapitre 7) est destinée à l'application de la méthode des éléments finis à différents types de problèmes en hyperfréquence. Dans le quatrième chapitre, nous traitons tout d'abord les problèmes aux valeurs propres en deux dimensions, c'est à dire les modes de propagation dans les guides d'onde. Les fonctionnelles scalaires $F(H_z)$ et $F(E_z)$ sont utilisées pour calculer les guides d'onde homogènes de différentes sections transversales. Le choix de la géométrie de travail est illustré. Nous utilisons les fonctionnelles vectorielles $F(\vec{H})$ avec le terme de pénalité pour analyser un guide d'onde rectangulaire chargé de diélectrique. Les modes de guide et les modes non-physiques sont trouvés. Un petit chapitre est réservé à la ligne *TEM*. Nous illustrons par deux exemples, la méthode pour calculer l'impédance caractéristique . Nous abordons ensuite, dans le sixième chapitre, les problèmes de trois dimensions en essayant de trouver les modes de résonance d'une cavité cylindrique, d'une cavité coaxiale et d'une cavité coaxiale dissymétrique. L'évolution des modes par rapport à la structure de chaque cavité est expliquée. Dans le septième chapitre, nous étudions le problème de répartition. Il s'agit de calculer la matrice d'impédance $[z]$, la matrice d'admittance $[y]$ et la matrice de répartition $[s]$ du composant hyperfréquence. Deux méthodes: la méthode matricielle et la méthode de la charge adaptée, sont proposées. La méthode matricielle consiste à calculer la matrice d'impédance ou la matrice d'admittance du composant hyperfréquence par une formulation variationnelle. La méthode de la charge adaptée, développée originalement dans cette thèse, consiste à calculer par les fonctionnelles directement le coefficient de réflexion d'une entrée du composant. Les deux méthodes sont comparées.

Chapitre 4

Guides d'onde homogènes et inhomogènes

Nous traitons dans ce chapitre les guides d'onde homogènes et inhomogènes en recherchant les valeurs propres(k_c ou k_0) et les vecteurs propres(la répartition de champ). Les résultats numériques sont comparés aux résultats analytiques.

4.1 Guide d'onde homogène à deux dimensions

Nous commençons par les structures simples(guide rectangulaire, guide circulaire) pour lesquelles nous connaissons bien les résultats analytiques afin de nous permettre de comparer les résultats et tester le programme. Nous traitons ensuite le guide triangulaire. Puisqu'on utilise les fonctionnelles scalaires dans les guides d'onde vides, les valeurs propres à trouver sont les nombres d'onde à coupure au carré k_c^2 (voir 3.15) et les vecteurs correspondants sont les répartitions de champ H_z ou E_z . Afin de mieux distinguer les modes, nous calculons le gradient de H_z ou E_z pour obtenir la répartition du champ transversal(1.28)(1.29). Donc les modes TM sont calculés par la fonctionnelle $F(E_z)$, les répartitions de champ magnétique transversal sont schématisées; les modes TE sont calculés par la fonctionnelle $F(H_z)$, les répartitions

de champ électrique transversal sont schématisées.

4.1.1 Guide d'onde rectangulaire

Nous considérons tout d'abord un guide d'onde rectangulaire vide, de dimension $a = 2\pi, b = \pi$. Pour les modes TM nous choisissons $F(E_z)$, utilisons le contour du guide comme la géométrie de travail (figure 4.1). La condition de Dirichlet ($E_z = 0$) est appliquée sur la frontière de la géométrie. Les cinq premiers modes TM sont sortis en ordre par le programme et leur répartition de champ magnétique est montrée dans la figure 4.1. Leur nombre d'onde de coupure k_{ce}^2 calculé par la méthode des éléments finis est donné dans le tableau 4.1 et comparé à celui k_{ca}^2 calculés par la formulation analytique (4.1).

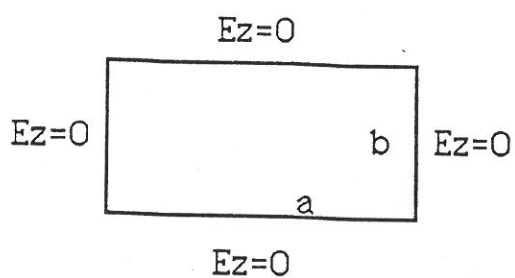
$$k_{ca}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (4.1)$$

L'information concernant le maillage et la matrice du problème est donnée dans le même tableau.

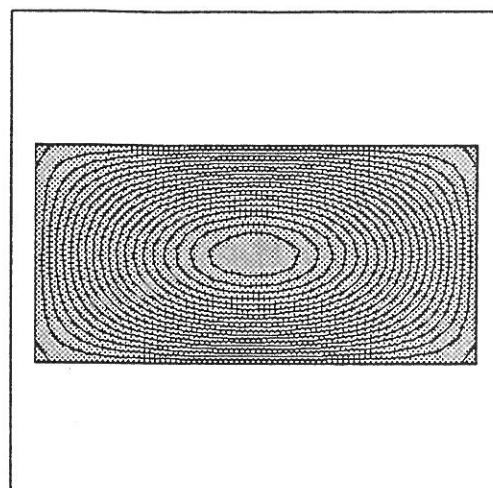
TM modes du guide rectangulaire vide
($a = 2\pi, b = \pi$)

	TM_{11}	TM_{21}	TM_{31}	TM_{12}	TM_{41}
k_{ce}^2	1.25	2.00	3.26	4.26	5.02
k_{ca}^2	1.25	2.00	3.25	4.25	5.00
nombre d'équations:	263				
nombre de coefficients inconnus:	5010				
nombre de noeuds:	339				
nombre de triangles:	176				

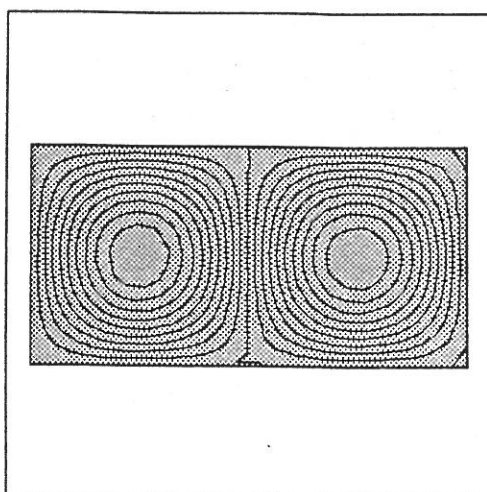
Tableau 4.1



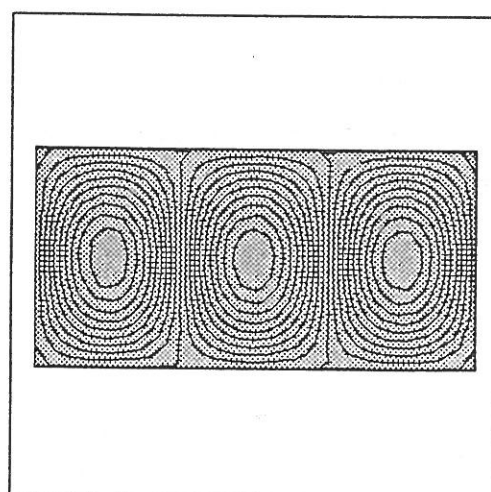
Géométrie de travail



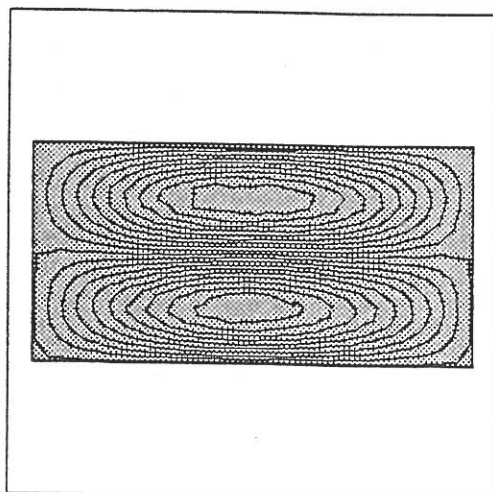
TM_{11}



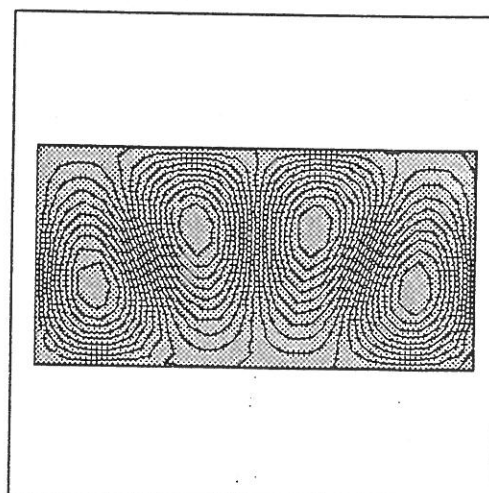
TM_{21}



TM_{31}

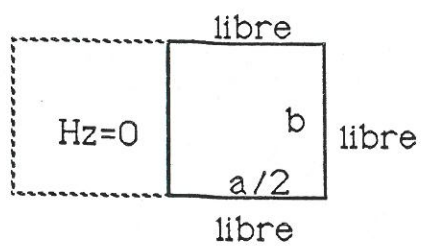


TM_{12}

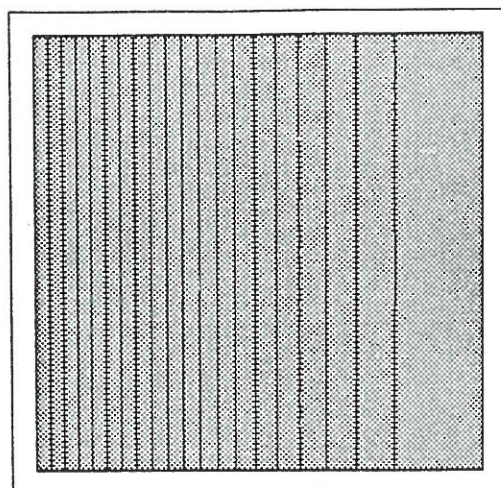


TM_{41}

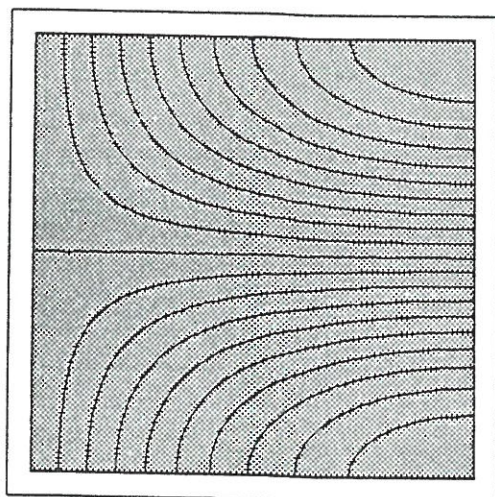
Figure 4.1: Le champ magnétique des modes TM du guide rectangulaire



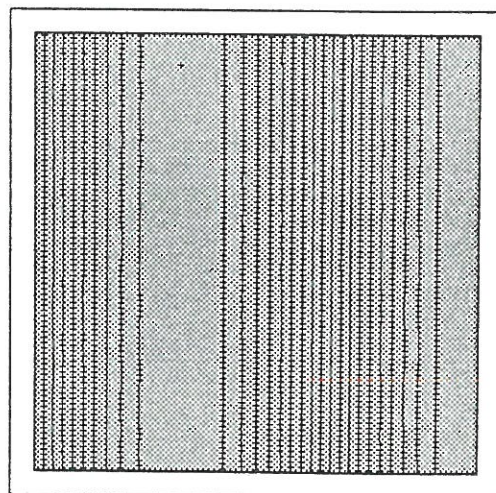
Géométrie de travail



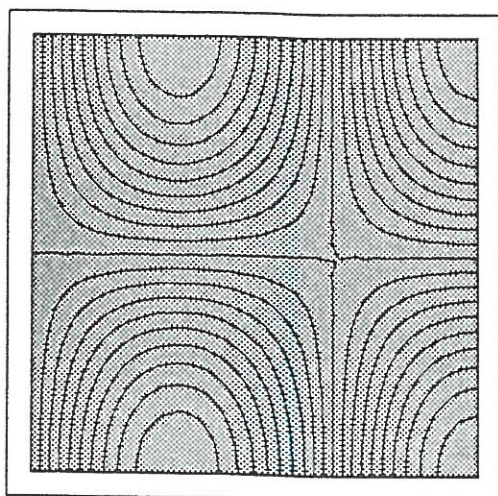
TE_{10}



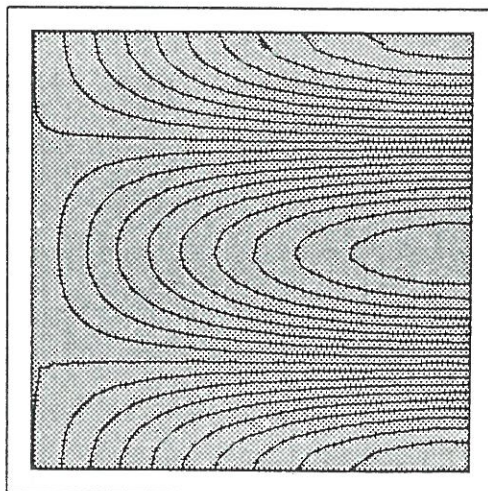
TE_{11}



TE_{30}



TE_{31}



TE_{12}

Figure 4.2: Le champ électrique des modes TE du guide rectangulaire

TE modes du guide rectangulaire vide
($a = 2\pi, b = \pi$)

	TE_{10}	TE_{11}	TE_{30}	TE_{31}	TE_{12}
k_{ce}^2	0.25	1.25	2.25	3.25	4.25
k_{ca}^2	0.25	1.25	2.25	3.25	4.25
nombre d'équations:	372				
nombre de coefficients inconnus:	7203				
nombre de noeuds:	393				
nombre de triangles:	176				

Tableau 4.2

Nous utilisons $F(H_z)$ pour calculer les modes TE . Comme la condition aux limites de la variable H_z sur le contour du guide est du type Neumann $\partial H_z / \partial n = 0$, impliquée dans la fonctionnelle elle-même, nous n'avons pas besoin de l'appliquer. Mais nous devons appliquer au moins sur une frontière la condition non-naturelle de Dirichlet nulle. Mathématiquement cela va éviter la singularité de la matrice et le nombre infini de solution. Nous prenons la moitié de la section du guide comme géométrie de travail (figure 4.2) et appliquons sur le plan de symétrie la condition de Dirichlet ($H_z = 0$). Nous laissons libre les trois autres cotés. Pour les cinq premiers modes calculés par cette géométrie de travail, les valeurs de k_{ce}^2 sont comparées aux résultats analytiques dans le tableau 4.2.

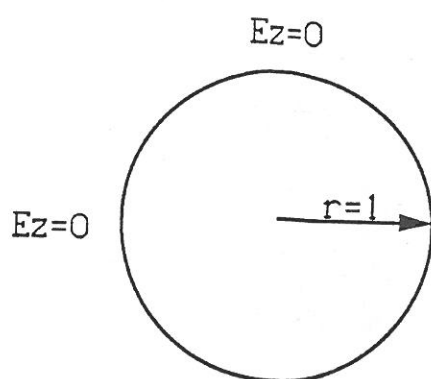
Nous remarquons tout de suite qu'entre le mode TE_{10} et TE_{11} , le mode TE_{20} est perdu. Ceci est dû à la définition de la géométrie de travail et l'application de la condition aux limites de Dirichlet. Afin de sortir la valeur propre et le vecteur propre du mode TE_{20} , nous devons prendre un quart de la section du guide en appliquant de la même manière sur un coté la condition de Dirichlet ($H_z = 0$) et les autres cotés libres. De même le mode TE_{21} entre TE_{30} et TE_{31} peut être trouvé en choisissant la géométrie de travail et les conditions aux limites correspondantes. Nous voyons selon ce premier exemple que l'application de la condition de Dirichlet est obligatoire pour sortir les modes, voire décisive pour sélectionner 'certains' modes. Le rôle de la condition de Neumann est secondaire car elle est déjà incluse dans la fonctionnelle, mais elle peut être quand même appliquée sur les plans de symétrie des modes pour réduire le temps

de calcul. Par exemple le mode TM_{11} peut être également trouvé avec la géométrie de travail de la figure 4.2, mais il faut utiliser au plan de symétrie la condition de Neumann $\partial E_z / \partial n = 0$ et la condition de Dirichlet $E_z = 0$ sur les trois autres cotés. En résumé pour le système dit "fermé" par la condition de Dirichlet non-naturelle, il n'a pas de perte de mode tandis que pour le système "fermé" entièrement ou partiellement par la condition de Neumann, il est nécessaire de définir plusieurs géométries de travail selon la symétrie des modes afin d'empêcher la disparition des modes, car dans ce dernier cas la condition n'est plus suffisante pour que la fonctionnelle et sa condition naturelle soient équivalentes avec l'équation différentielle originale; il faut ajouter la condition de Dirichlet pour compléter la condition.

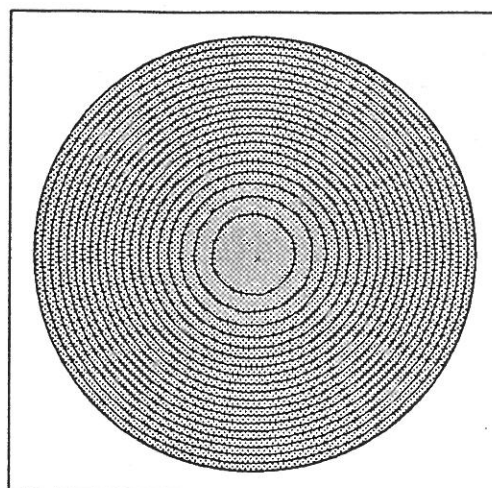
Nous constatons qu'avec un maillage moyen, une précision satisfaisante est obtenue. Sur la station de travail APOLLO(modèle 4500), la résolution du problème dure une centaine de secondes. Pour les autres problèmes de cette thèse, en deux dimensions ou en trois dimensions, par la fonctionnelle vectorielle ou scalaire, le temps de calcul ne dépasse jamais cinq minutes pour une précision acceptable.

4.1.2 Guide d'onde circulaire

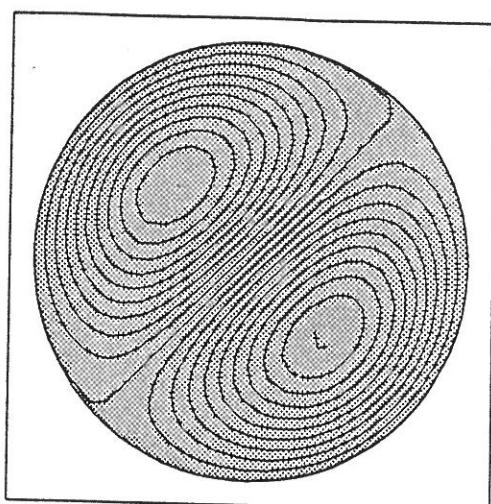
Comme deuxième exemple, on traite un guide d'onde circulaire vide, de rayon $r = 1$. De la même façon, on calcule séparément les modes TM et les modes TE par les fonctionnelles $F(E_z)$ et $F(H_z)$ et les différentes géométries de travail. Pour les modes TM on applique sur le rayon de la géométrie de travail(figure 4.3) la condition de Dirichlet $E_z = 0$. Les modes sortis sont en ordre et leur nombre d'onde est montré dans le tableau 4.3. Dans la figure 4.3, TM_{11*} et TM_{21*} sont respectivement les modes jumeaux de TM_{11} et TM_{21} avec les mêmes valeurs propres et une rotation pour la répartition de champ. Pour calculer les modes TE on choisit la moitié du guide circulaire comme géométrie de travail en appliquant sur le diamètre du guide la condition de Dirichlet($H_z = 0$)(figure 4.4). Les valeurs propres sont données dans le tableau 4.4 et les répartitions de champ électrique sont montrées dans la figure 4.4.



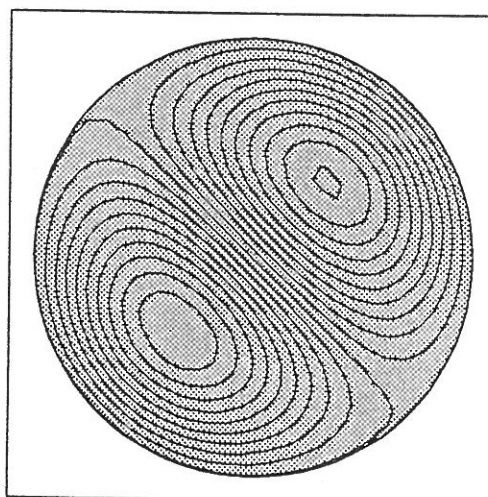
Géométrie de travail



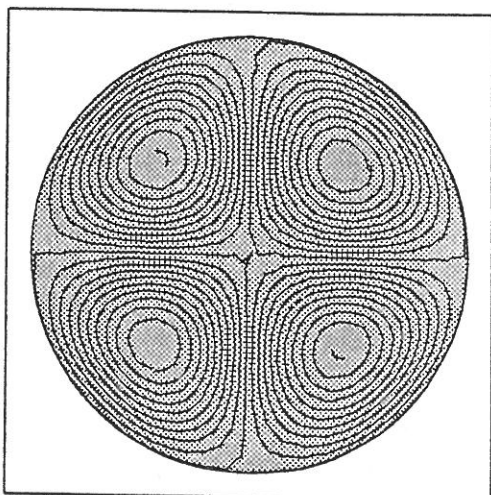
TM_{01}



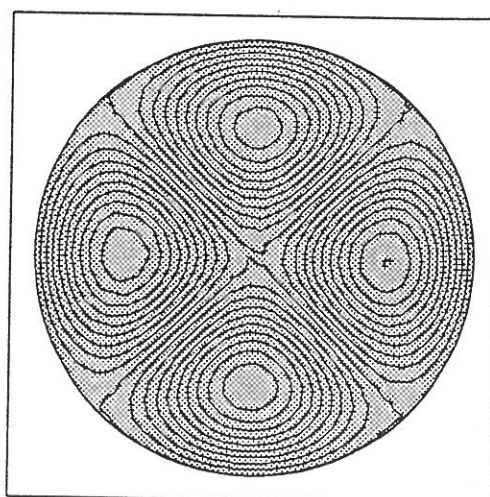
TM_{11}



TM_{11*}

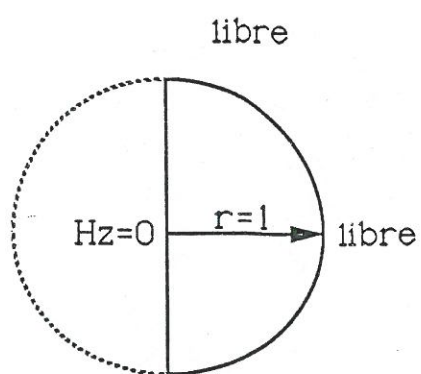


TM_{21}

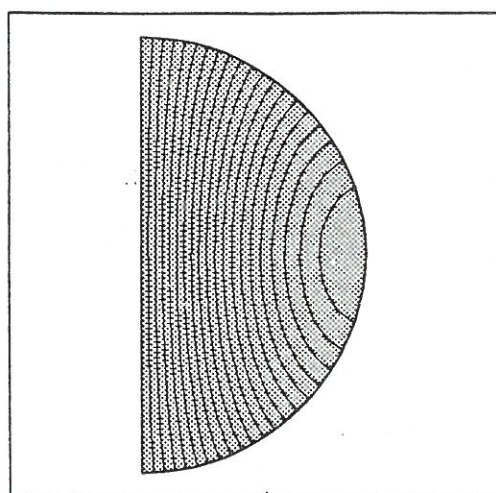


TM_{21*}

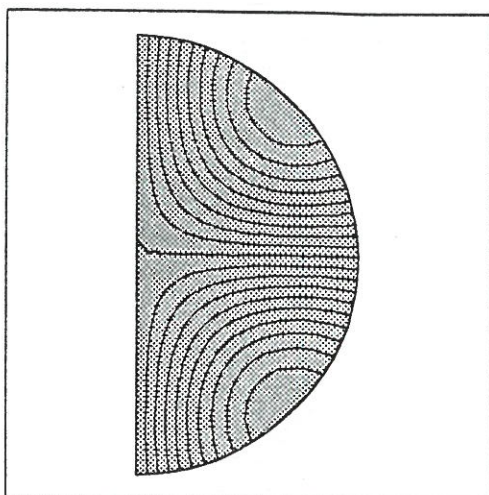
Figure 4.3: Le champ magnétique des modes TM du guide circulaire



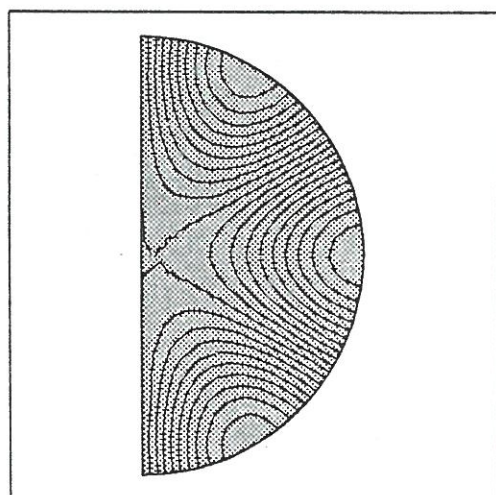
Géométrie de travail



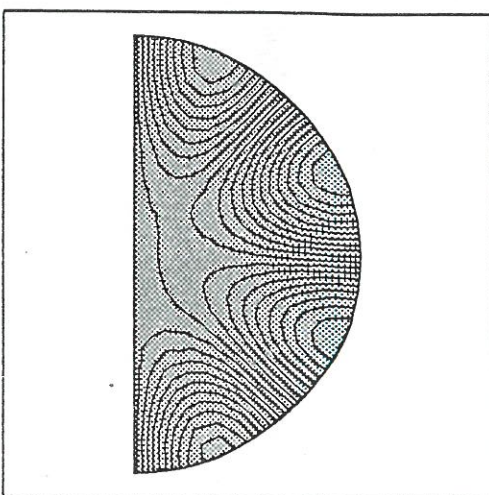
TE_{11}



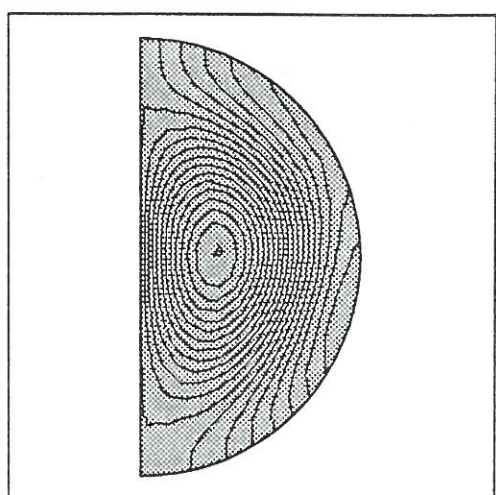
TE_{21}



TE_{31}



TE_{41}



TE_{12}

Figure 4.4: Le champ électrique des modes TE du guide circulaire

On voit que le mode TE_{01} est perdu. En effet il est impossible de calculer le mode TE_{01} par l'application de la condition de Dirichlet sur le diamètre du guide car ce mode a une symétrie azimutale. Il faudrait appliquer cette condition sur un cercle dont le rayon est la valeur du premier zéro de la fonction Bessel d'ordre zéro($J_0(x)$).

TM modes du guide circulaire vide($r = 1$)

	TM_{01}	TM_{11}	TM_{11*}	TM_{21}	TM_{21*}
k_{ce}^2	5.784	14.69	14.69	26.42	26.42
k_{ca}^2	5.784	14.68	14.68	26.38	26.38
nombre d'équations:	345				
nombre de coefficients inconnus:	9329				
nombre de noeuds:	417				
nombre de triangles:	190				

Tableau 4.3

TE modes du guide circulaire vide($r = 1$)

	TE_{11}	TE_{21}	TE_{31}	TE_{41}	TE_{12}
k_{ce}^2	3.39	9.33	17.66	28.31	28.46
k_{ca}^2	3.39	9.33	17.65	28.27	28.42
nombre d'équations:	168				
nombre de coefficients inconnus:	1738				
nombre de noeuds:	189				
nombre de triangles:	80				

Tableau 4.4

4.1.3 Guide d'onde triangulaire

La souplesse de la méthode des éléments finis réside dans le fait qu'elle arrive à résoudre les problèmes de géométries complexes, par exemple un guide d'onde d'une section transversale quelconque, autre que les géométries régulières telles que rectangulaires, circulaires et sphériques dans lesquelles les répartitions de champs peuvent être représentées par les fonctions orthogonales classiques(sinusoidal, Bessel, Legen-

dre). Dans la réalité, ce genre de guide d'onde n'est pas utilisé et aucun résultat expérimental n'existe pour vérifier les résultats analytiques. Nous allons essayer de traiter ici une structure de géométrie dite 'semi-complexe', c'est à dire dont la répartition de champs n'est représentable directement par les fonctions orthogonales classiques qu'en faisant appel aux techniques mathématiques: le guide d'onde triangle équilatéral. Ce guide d'onde a été traité par la transformation rotationnelle des résultats du guide d'onde rectangulaire[27], nous utilisons directement son résultat pour le nombre d'onde de coupure:

$$k_{ca} = \frac{4\pi}{3a} \sqrt{m^2 + mn + n^2} \quad (4.2)$$

Les tableaux 4.5 et 4.6 montrent les cinq premiers modes TM et TE d'un guide triangulaire équilatéral de dimension $a = \pi$. Les figures 4.5 et 4.6 donnent les géométries de travail et les répartitions de champs. Les modes TE sont calculés en appliquant sur la ligne de hauteur du triangle la condition de Dirichlet($H_z = 0$). La classification des modes devient difficile selon leur répartition de champ. A l'aide de la formulation analytique (4.2) et avec les valeurs propres sorties par la méthode des éléments finis, on arrive à classer les modes TM dans le tableau 4.5: $TM_{11}, TM_{21}, TM_{12}, TM_{22}, TM_{31}$ et les modes TE dans le tableau 4.6: $TE_{10}, TE_{20}, TE_{21}, TE_{30}, TE_{31}$. On peut vérifier par la formulation (4.2) que le mode TE_{11} et le mode TE_{22} sont perdus. En raison de la répartition complexe de champ dans le guide triangulaire, les géométries de travail afin de récupérer les modes TE perdus sont difficiles à définir.

TM modes du guide triangulaire vide($a = \pi$)					
	$TM(1)$	$TM(2)$	$TM(3)$	$TM(4)$	$TM(5)$
k_{ce}^2	5.335	12.46	12.47	21.43	23.24
k_{ca}^2	5.331	12.44	12.44	21.33	23.11
nombre d'équations:					220
nombre de coefficients inconnus:					3317
nombre de noeuds:					298
nombre de triangles:					129

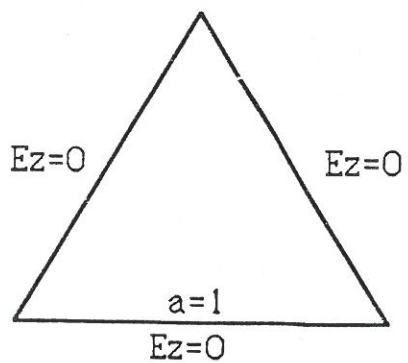
Tableau 4.5

TE modes du guide triangulaire vide($a = \pi$)

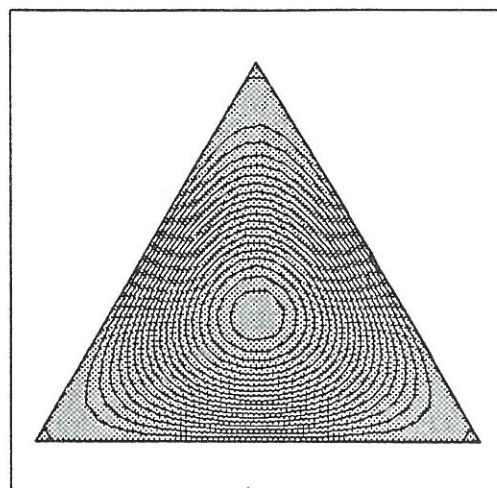
	$TE(1)$	$TE(2)$	$TE(3)$	$TE(4)$	$TE(5)$
k_{ce}^2	1.778	7.114	12.46	16.03	23.22
k_{ca}^2	1.778	7.111	12.44	16.00	23.11
nombre d'équations:	318				
nombre de coefficients inconnus:	4340				
nombre de noeuds:	195				
nombre de triangles:	80				

Tableau 4.6

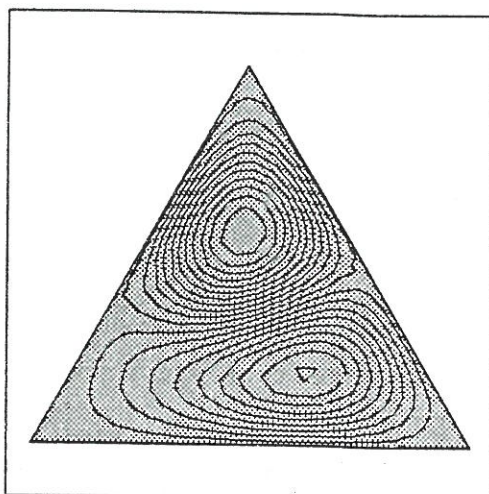
En conclusion, les exemples choisis montrent qu'avec la fonctionnelle scalaire $F(E_z)$ ou $F(H_z)$ on est capable de calculer un guide d'onde homogène d'une section transversale quelconque et de trouver les modes non-hybrides(TM ou TE). Cependant, les cinq premiers modes sortis sont associés à la définition de la géométrie de travail et à l'application de la condition de Dirichlet: en particulier les cinq premiers modes TE ainsi trouvés sont ceux de la géométrie de travail avec les conditions aux limites associées, non ceux du guide original. Pour les trouver complètement, il faut définir plusieurs géométries de travail en appliquant selon la répartition de champ du mode la condition de Dirichlet nulle. Plus la géométrie du guide devient complexe, plus la définition de la géométrie de travail devient compliquée car on a une mauvaise connaissance des modes. Dans l'ensemble, la méthode des éléments finis est efficace, mais pas miraculeuse. Il nous est nécessaire d'avoir certaines connaissances du phénomène physique pour mieux l'exploiter. Cela va être aperçu aussi dans les études suivantes.



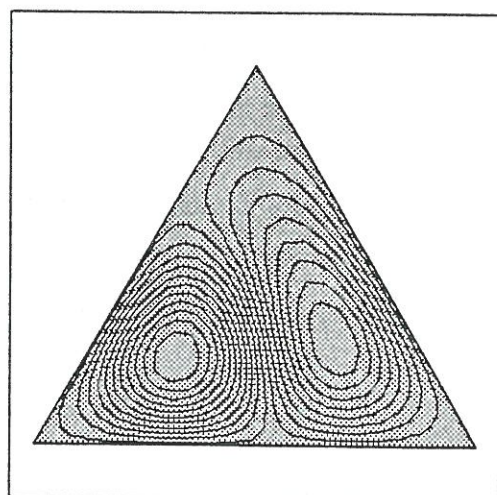
Géométrie de travail



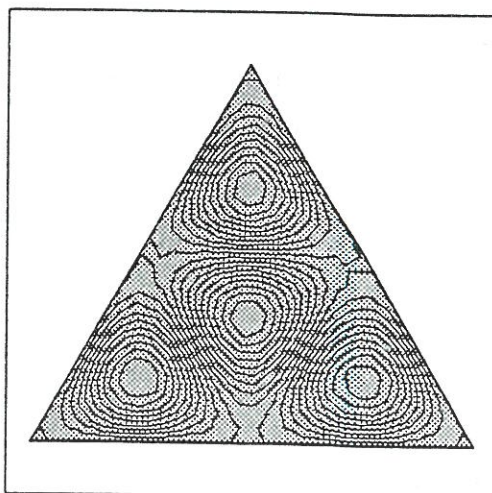
$TM(1)$



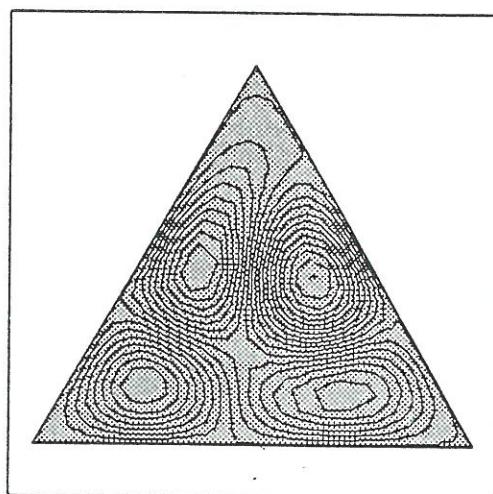
$TM(2)$



$TM(3)$

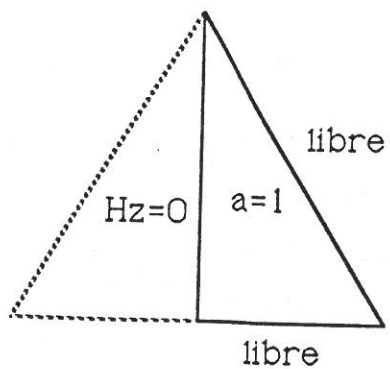


$TM(4)$

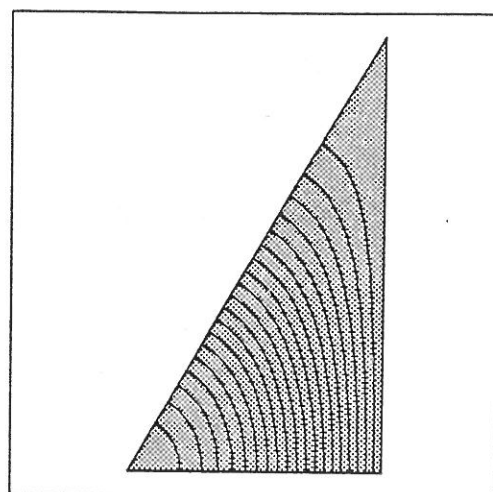


$TM(5)$

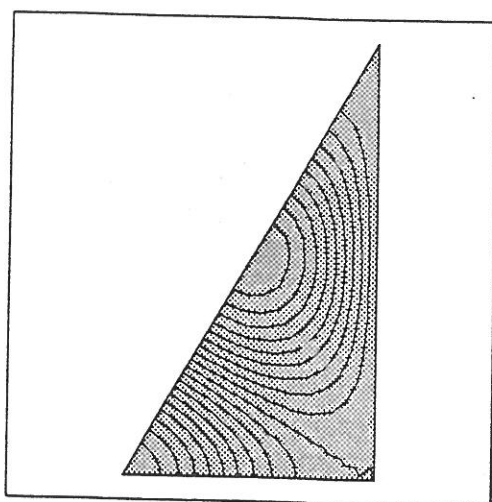
Figure 4.5: Le champ magnétique des modes TM du guide triangulaire



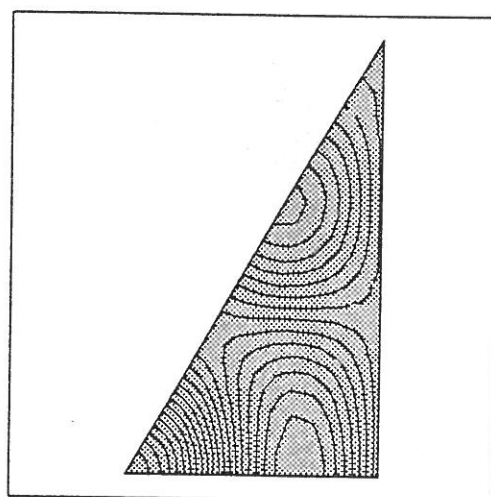
Géométrie de travail



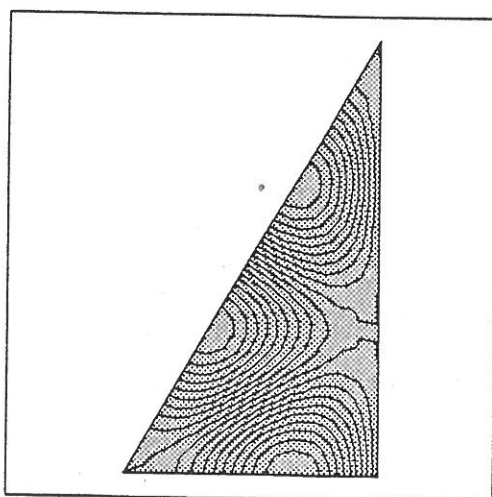
$TE(1)$



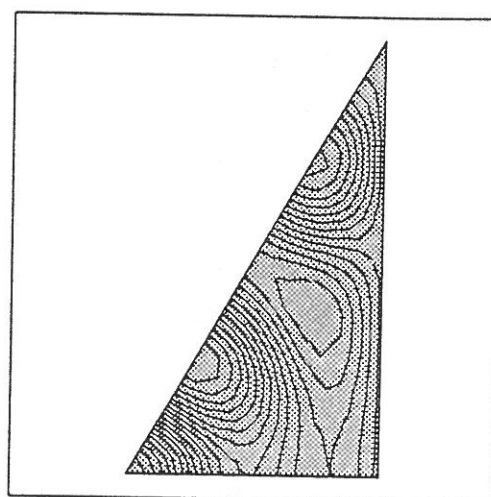
$TE(2)$



$TE(3)$



$TE(4)$



$TE(5)$

Figure 4.6: Le champ électrique des modes TE du guide triangulaire

4.2 Guide d'onde inhomogène à deux dimensions

Les guides d'onde inhomogènes chargés de diélectrique font partie d'une autre grande catégorie de problème. Les modes de propagation présentés dans ces guides sont du type TE , TM ou hybride. L'utilisation de la fonctionnelle vectorielle est indispensable. La répartition des champs électromagnétiques est déformée par la présence des matériaux placés dans le guide d'onde. La représentation directe des champs devient difficile par les fonctions analytiques. La méthode des éléments finis va être utilisée dans cette catégorie de problème.

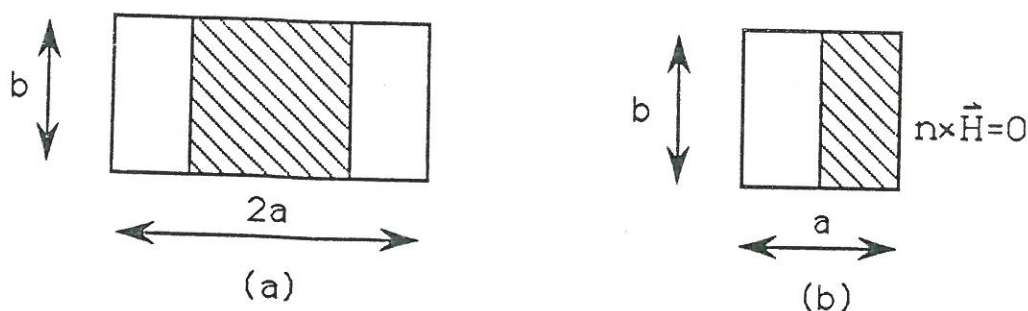


Figure 4.7: Guide d'onde rectangulaire chargé de diélectrique

On calcule un guide d'onde rectangulaire chargé au centre par une couche de diélectrique $\epsilon_r = 2.45$ (figure 4.7(a)). Puisqu'on s'intéresse au mode fondamental TE_{10} . La géométrie de travail est indiquée sur la figure 4.7(b). Nous affectons sur l'axe de symétrie la condition de Dirichlet vectorielle $\vec{n} \times \vec{H} = 0$ et sur les trois autres cotés la condition de Neumann vectorielle $\vec{n} \times (\nabla \times \vec{H}) = 0$. Entre le diélectrique et l'air on n'a pas besoin d'appliquer la condition de continuité car le champ magnétique est continu dans le milieu diélectrique inhomogène. Nous pouvons bien sûr laisser libre les trois composantes sur les trois autres cotés, implicites par la condition de Neumann. Néanmoins pour diminuer la dimension de la matrice, il est préférable, soit d'appliquer les conditions de Neumann sur le conducteur quelque soit le mode, soit si l'on connaît le mode, d'appliquer les conditions associées à ce mode. Avant d'étudier le guide d'onde diélectrique nous testons le programme en calculant un guide d'onde

vide par cette fonctionnelle vectorielle. Nous avons maintenant trois composantes sur chaque noeud. La dimension de la matrice (tableau 4.7) et le temps de calcul augmentent. De plus, il apparaît des modes non-physiques. De nombreux articles ont signalé cette apparition dès que l'on utilise la fonctionnelle vectorielle. Comme nous l'avons indiqué précédemment dans le paragraphe 3.4 il faut utiliser la technique de pénalité pour trouver les vrais modes propres.

Les cinq premiers modes du guide rectangulaire vide
($a = 2, b = 1, \beta = 0.5$)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$k_{0e}(p = 0.5)$	1.177	1.612	2.538	3.431	3.555
$k_{0e}(p = 1)$	1.651	1.652	3.580	3.583	12.583
nombre d'équations:	280				
nombre de coefficients inconnus:	10984				
nombre de noeuds:	111				
nombre de triangles:	180				

Tableau 4.7

La courbe de dispersion du guide rectangulaire vide
($a = 2, b = 1$)

	β	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$TE_{10}(p = 1.0)$	k_{0e}	1.57	1.65	1.86	2.17	2.54	2.95	3.38
$TE_{10}(p = 0.5)$	k_{0e}	1.57	1.61	1.74	1.98	2.30	2.66	3.04
TE_{10}	k_{0a}	1.57	1.65	1.86	2.17	2.54	2.95	3.39
$TM_{11}(p = 1.0)$	k_{0e}	3.55	3.58	3.69	3.85	4.07	4.34	4.64
$TM_{11}(p = 0.5)$	k_{0e}	3.54	3.56	3.62	3.74	3.93	4.13	4.39
TM_{11}	k_{0a}	3.51	3.55	3.65	3.82	4.04	4.31	4.62

Tableau 4.8

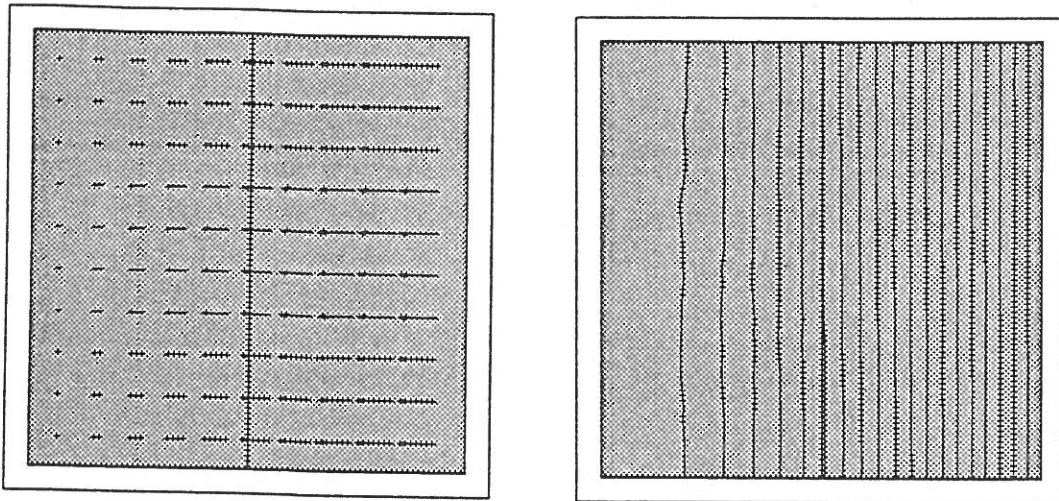
La fonctionnelle avec le terme de pénalité (3.19) est utilisée et les résultats sont montrés dans les tableaux 4.7 et 4.8. Avec le coefficient de pénalité $p = 0$, on ne voit pas dans les cinq premières solutions les modes du guide. Selon Konrad[28], beaucoup de modes non-physiques sont insérés devant les modes du guide: ce n'est que la vingt

cinquième valeur propre qui est solution du premier mode réel. Avec un coefficient de pénalité non nul ($p = 0.5$ et $p = 1$), le tableau 4.7 donne les cinq premières solutions pour $\beta = 0.5$ et le tableau 4.8 donne les courbes de dispersion des modes TE_{10} et TM_{11} avec les valeurs analytiques. On remarque que suivant la valeur de p les vraies solutions k_0 diffèrent. Etant donné que les valeurs propres sont indépendantes du coefficient de pénalité, on peut supposer selon le tableau 4.7 que le deuxième mode pour $p = 0.5$ et le premier mode pour $p = 1$ désignent le même mode du guide; que le cinquième mode pour $p = 0.5$ et le troisième ou quatrième mode pour $p = 1$ désignent un autre mode du guide.

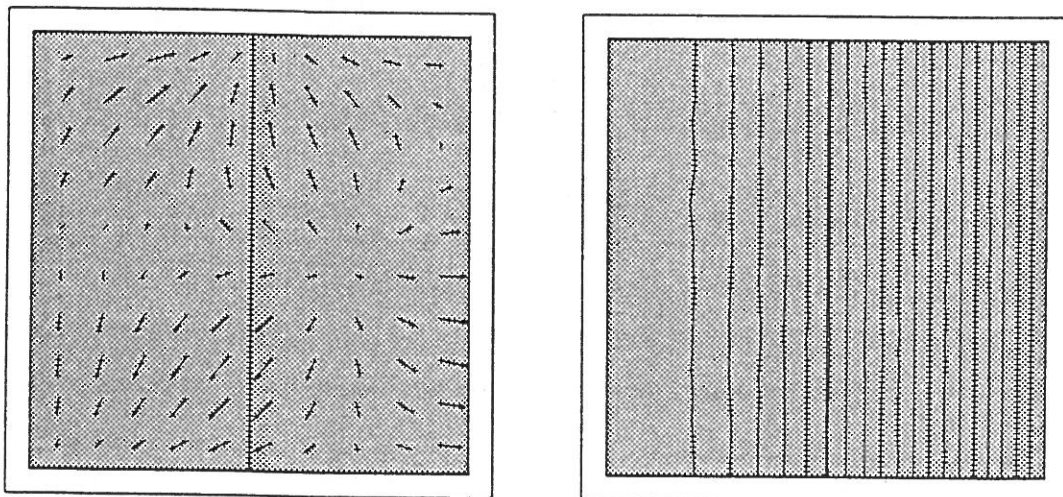
Pour justifier cette supposition, nous pouvons voir la répartition des champs électromagnétiques des cinq premières solutions pour $\beta = 0.5$. La répartition de champ de chaque mode se trouve dans les figures 4.8 et 4.9 ($p = 0.5, \beta = 0.5$) et les figures 4.10 et 4.11 ($p = 1, \beta = 0.5$). Au niveau du champ magnétique, il apparaît que les deux premiers modes sont identiques, (figure 4.8(1a) et 4.8(2a)) (figure 4.10(1a) et 4.10(2a)) quelque soit la valeur de pénalité p . Si l'on examine la répartition de champ électrique correspondante, on peut éliminer le premier mode pour $p = 0.5$ et le deuxième mode pour $p = 1$; les répartitions du champ électrique (figure 4.8(a) et figure 4.10(1a)) sont irrégulières. C'est à dire que le premier mode du guide TE_{10} pour $p = 0.5$ se trouve en deuxième tandis que pour $p = 1$ ce mode se trouve en premier. L'ordre des modes change en fonction du coefficient de pénalité.

De la même façon on voit que le mode TM_{11} se trouve au cinquième pour $p = 0.5$ et au troisième pour $p = 1$. Contrairement à ce qui est indiqué dans la figure 4.8(3a) ce n'est pas le mode TE_{11} car sa valeur propre dans le tableau 4.7 est très différente de sa valeur analytique. Il a été aussi identifié comme un mode non-physique dans [19] [20]. Après avoir localisé l'ordre des modes TE_{10} et TM_{11} pour $p = 0.5$ et $p = 1$, on trace les courbes de dispersion de ces modes dans le tableau 4.8. On voit que les valeurs propres calculées sont plus proches que les valeurs analytiques pour $p = 1$ que pour $p = 0.5$.

Malgré un renforcement de la condition de divergence dans la fonctionnelle, on voit encore des modes qui ne satisfont pas à la condition divergence nulle. Par exemple la figure 4.12 nous montre des deux premiers modes pour $\beta = 0, p = 0.5$. Le premier est un bon mode et le deuxième est un mode non-physique.

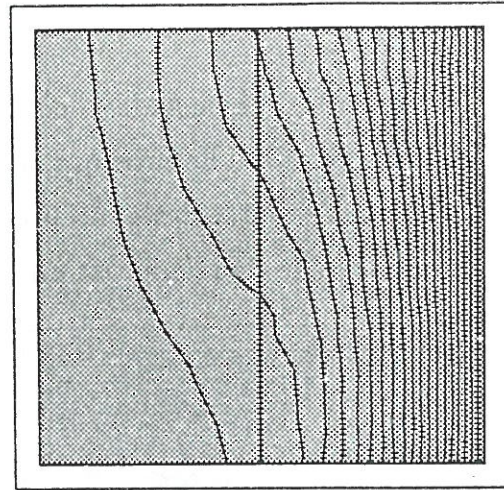
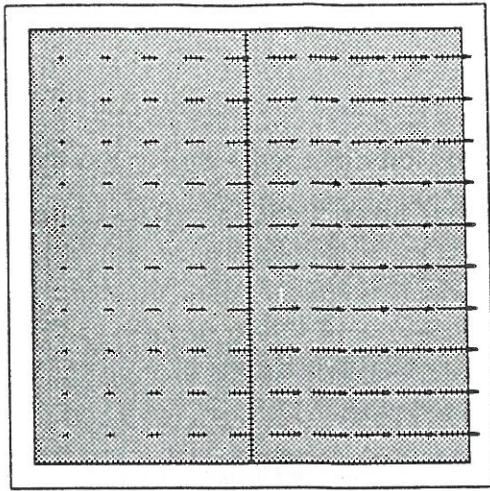


Le champ magnétique(1a) et électrique(1b) du premier mode

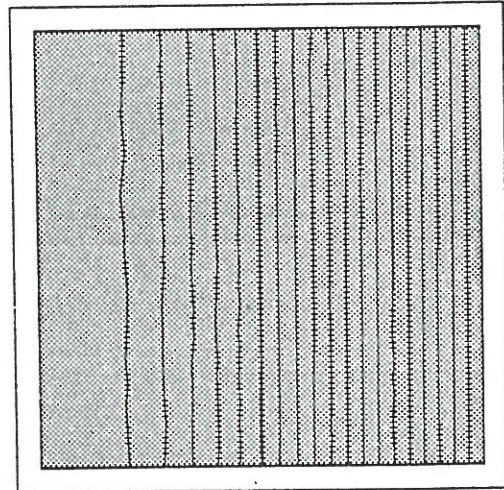
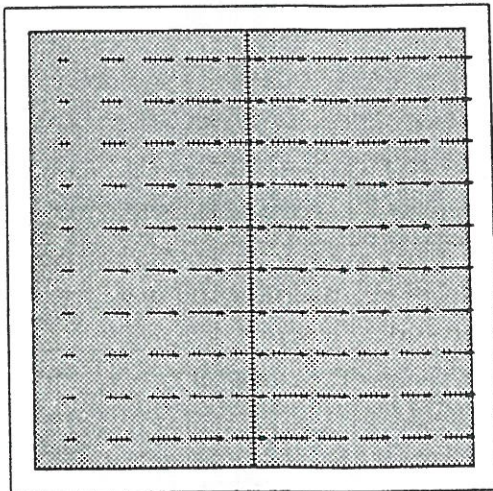


Le champ magnétique(2a) et électrique(2b) du deuxième mode

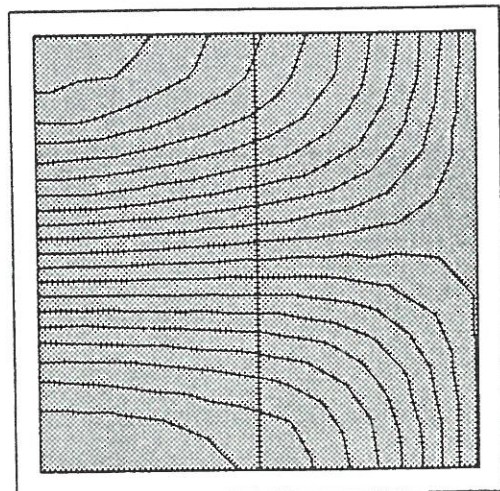
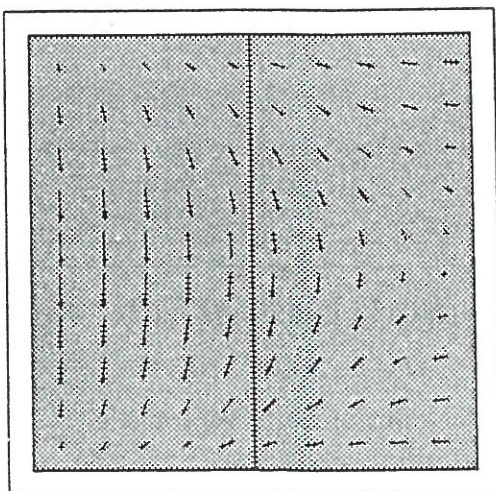
Figure 4.12: Les champs calculés par la fonctionnelle vectorielle dans le guide rectangulaire vide($p = 0.5, \beta = 0$)



Le champ magnétique(1a) et électrique(1b) du premier mode

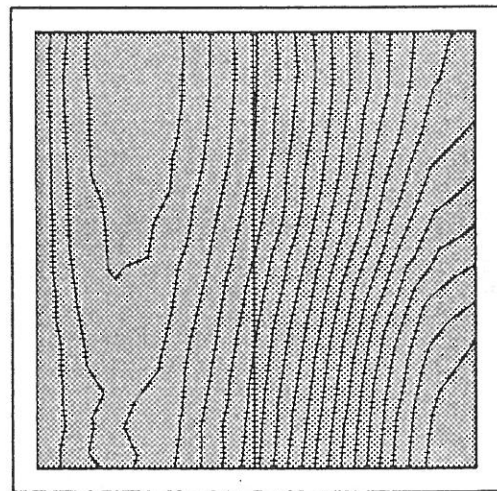
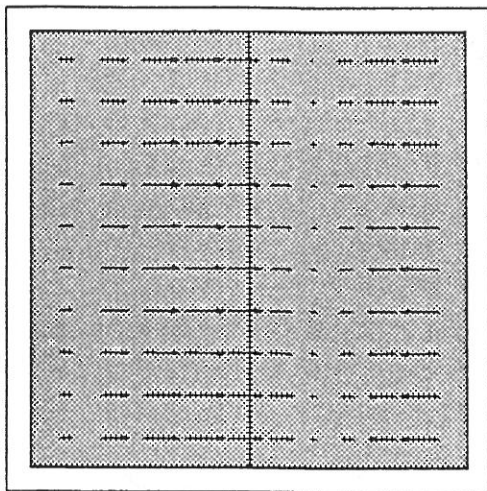


Le champ magnétique(2a) et électrique(2b) du deuxième mode

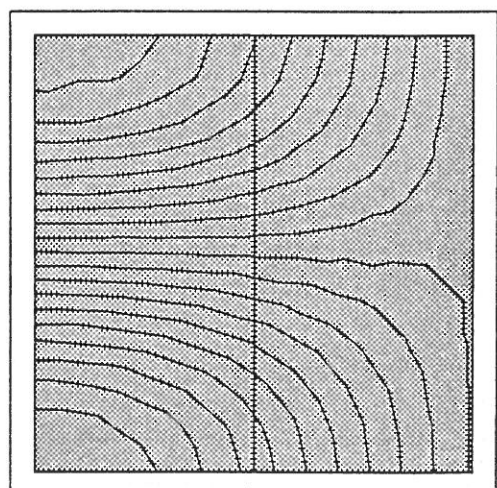
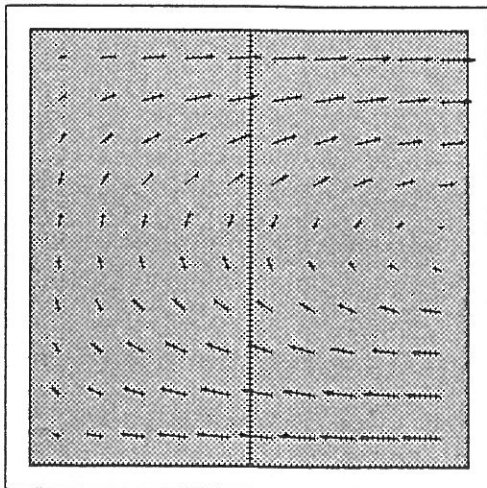


Le champ magnétique(3a) et électrique(3b) du troisième mode

Figure 4.8: Les champs du guide rectangulaire vide($p = 0.5$, $\beta = 0.5$)

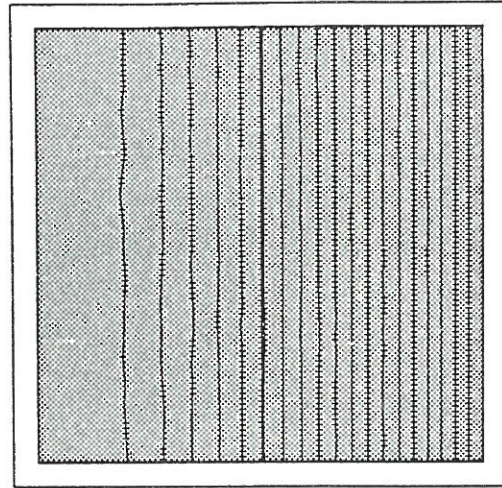
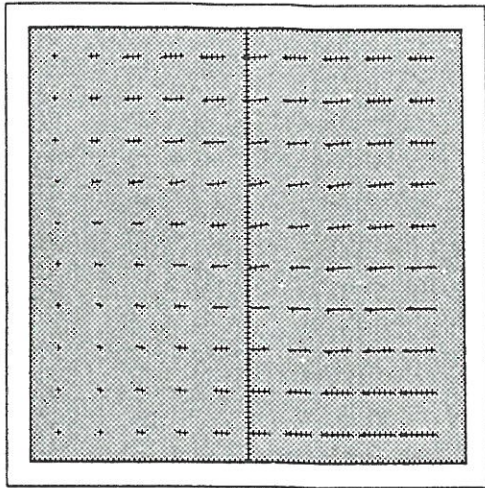


Le champ magnétique(4a) et électrique(4b) du quatrième mode

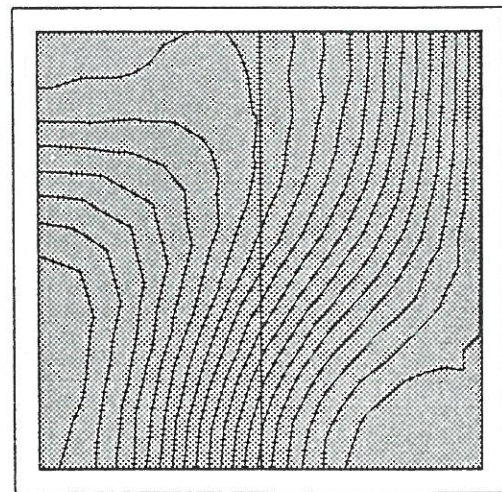
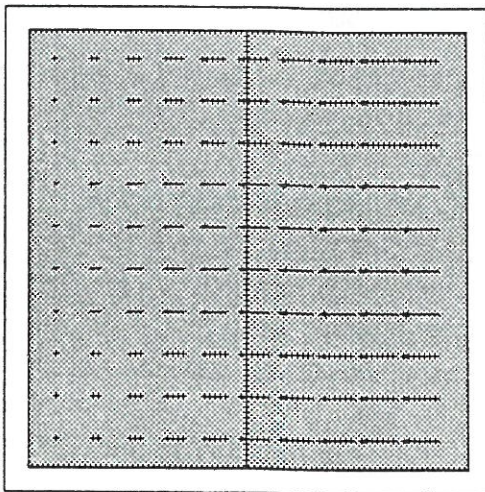


Le champ magnétique(5a) et électrique(5b) du cinquième mode

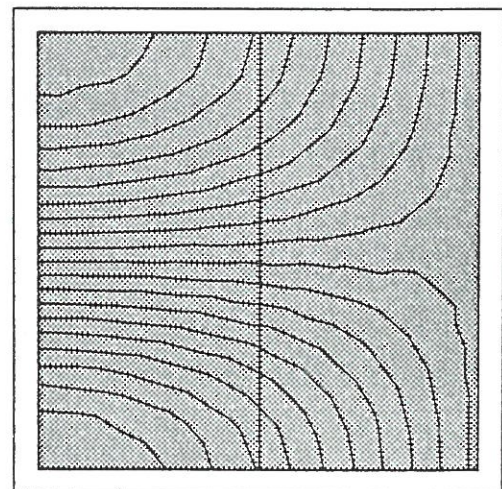
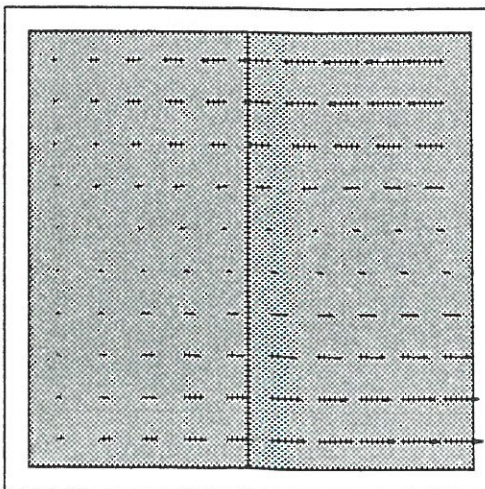
Figure 4.9: Les champs du guide rectangulaire vide($p = 0.5$, $\beta = 0.5$)



Le champ magnétique(1a) et électrique(1b) du premier mode

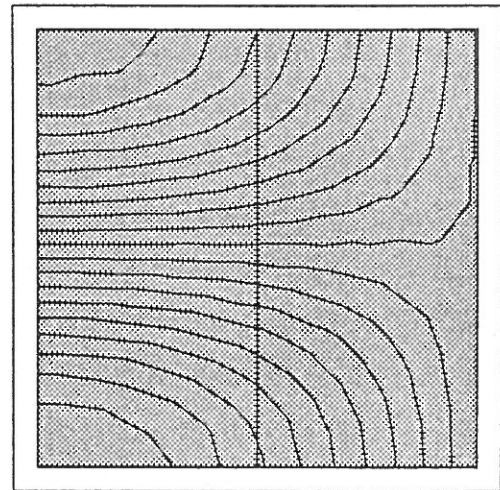
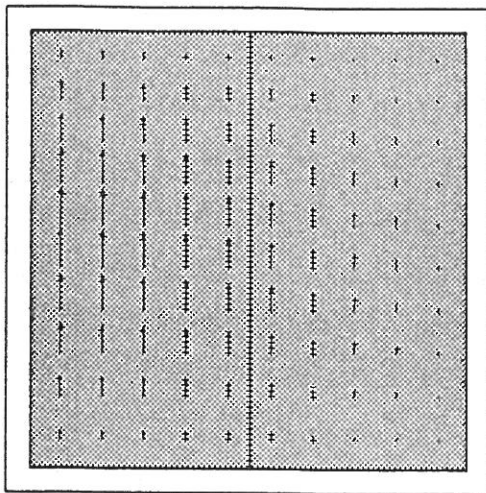


Le champ magnétique(2a) et électrique(2b) du deuxième mode

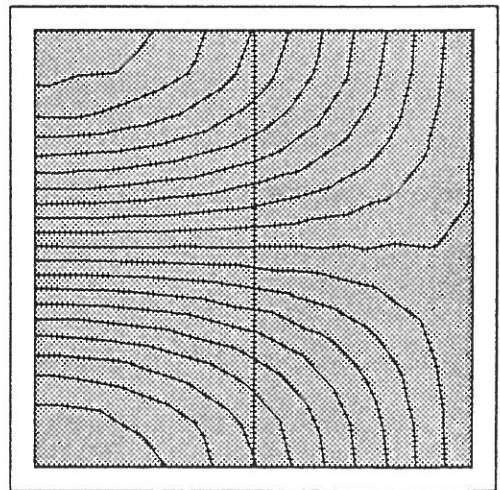
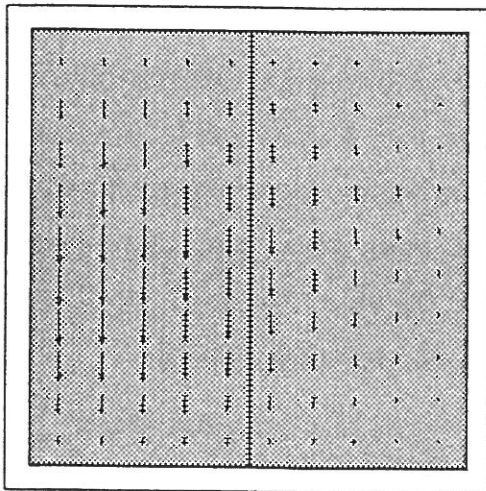


Le champ magnétique(3a) et électrique(3b) du troisième mode

Figure 4.10: Les champs du guide rectangulaire vide($p = 1$, $\beta = 0.5$)



Le champ magnétique(4a) et électrique(4b) du quatrième mode



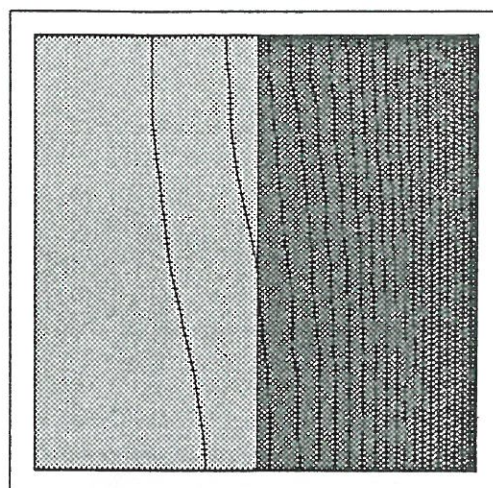
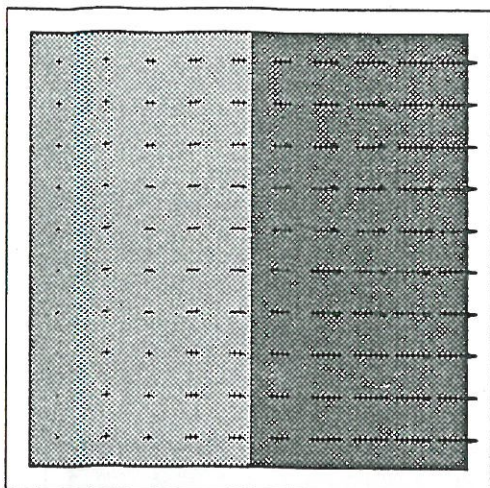
Le champ magnétique(5a) et électrique(5b) du cinquième mode

Figure 4.11: Les champs du guide rectangulaire vide($p = 1$, $\beta = 0.5$)

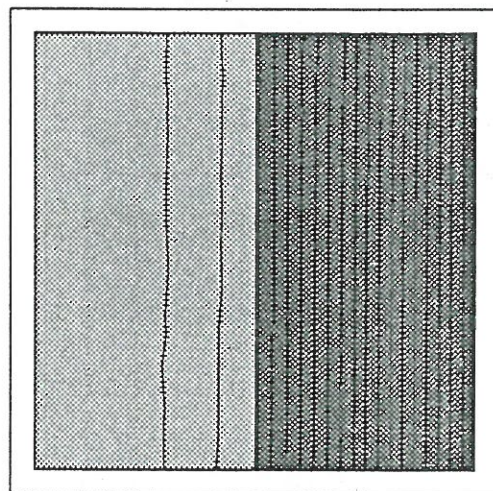
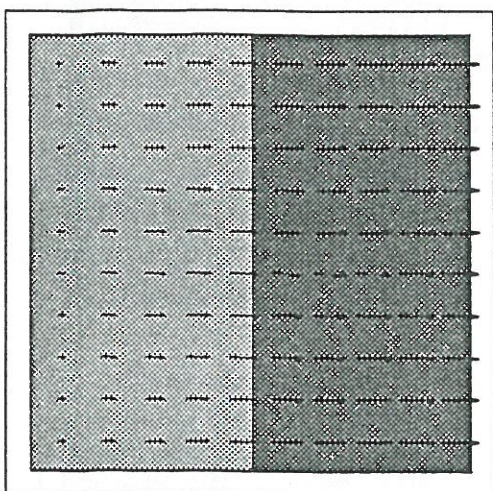
Quand la moitié du guide est remplie de diélectrique de permittivité 2.45, on calcule de la même façon les cinq premiers modes de ce guide. Nous étudions surtout le mode fondamental TE_{10} avec la même géométrie de travail (figure 4.7). Nous fixons la constante de propagation $\beta = 0.5$ et donnons respectivement dans les figures 4.13, 4.14, 4.15 et 4.16 les répartitions de champs pour $p = 0.5$ et $p = 1$. La situation est semblable à celle du guide vide. Dans la figure 4.13 le deuxième mode a l'air d'être le bon mode TE_{10} . Dans la figure 4.15 on a du mal à juger lequel peut mieux représenter le mode TE_{10} ; le premier a une bonne répartition de champ électrique tandis que le deuxième a une bonne répartition de champ magnétique. Pour les modes supérieurs, on reconnaît dans la figure 4.13 (4a) le mode TE_{20} de la série des modes TE_{m0} qui sont les seuls modes non-hybrides dans le guide inhomogène de la figure 4.7. On montre dans la figure 4.15(4a) le premier mode hybride TM_{x11} . Sa répartition de champ magnétique est la même que celle montrée dans le livre de Harrington[29]. La figure 4.15(5a) représente le même mode que la figure 4.15(4a), mais avec une polarisation du champ magnétique inversée. Il semble que les figures 4.13(3a) et 4.14(5a) correspondent respectivement aux modes TE_{11} et TM_{11} du guide homogène. En effet ces modes n'existent pas dans le guide inhomogène, ils sont devenus les modes hybrides.

Pour bien définir les modes TE_{10} , on trace la courbe de dispersion de ce mode pour $p = 0.5$ et $p = 1$. Si l'on regarde sa courbe de dispersion dans la figure 4.15 on aura plus d'argument pour faire le choix. Pour $p = 0.5$ ce sont les résultats du deuxième mode qui sont plus proches de ceux de Harrington[29] alors que pour $p = 1$ ce sont les résultats du premier mode. D'ailleurs on trace dans cette figure la courbe de dispersion du mode TM_{x11} pour $p = 1$. Pour $p = 0.5$ on ne voit pas, parmi les cinq premiers modes, le mode TM_{x11} . On suppose qu'il est repoussé plus loin.

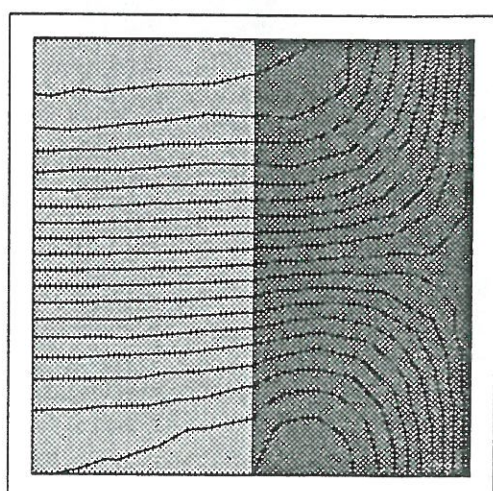
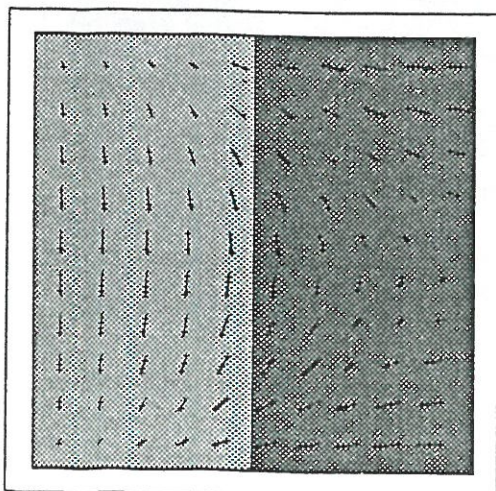
En conclusion, avec le terme de pénalité la fonctionnelle vectorielle est valable pour sortir les modes du guide, mais il faut prendre beaucoup de précautions. Les valeurs propres et leur classement sont fonction du coefficient de pénalité p et de la constante de propagation β . L'étude détaillée se trouve dans la référence [19]. Il est indispensable d'examiner leur répartition de champ afin de définir les bons modes.



Le champ magnétique(1a) et électrique(1b) du premier mode

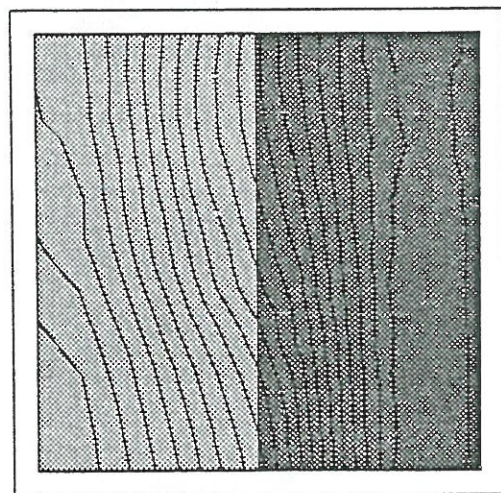
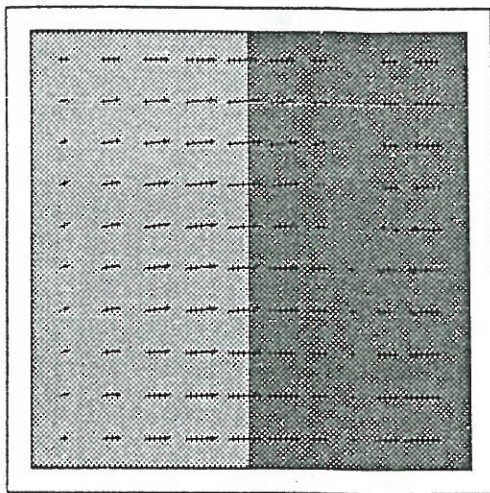


Le champ magnétique(2a) et électrique(2b) du deuxième mode

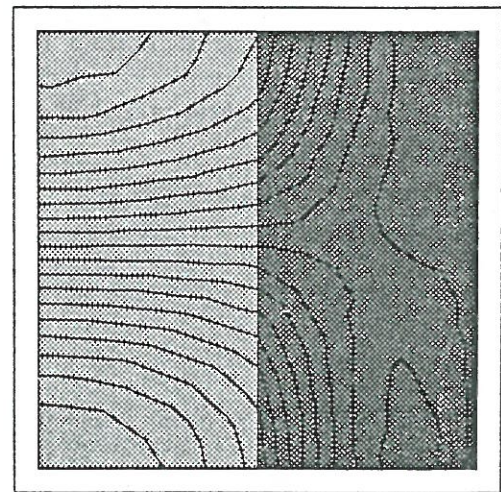
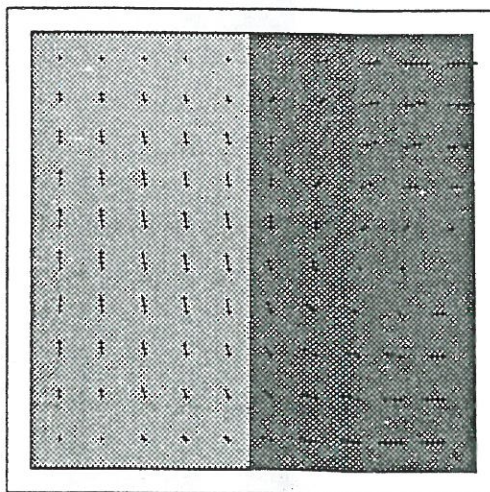


Le champ magnétique(3a) et électrique(3b) du troisième mode

Figure 4.13: Les champs du guide rectangulaire avec diélectrique($p = 0.5$, $\beta = 0.5$)

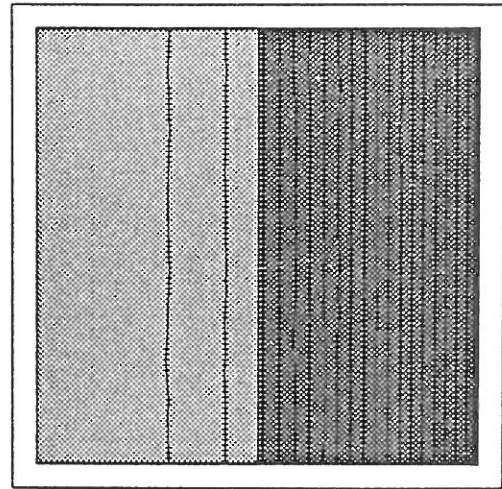
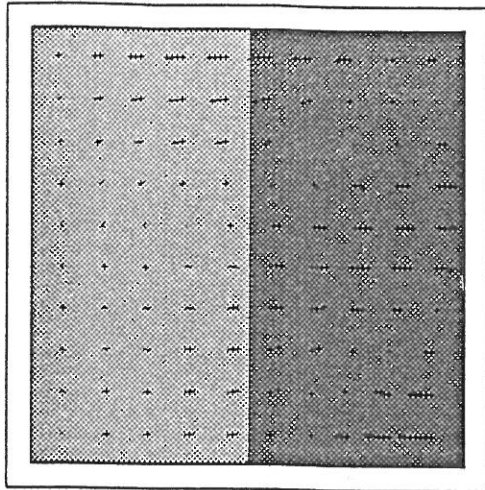


Le champ magnétique(4a) et électrique(4b) du quatrième mode

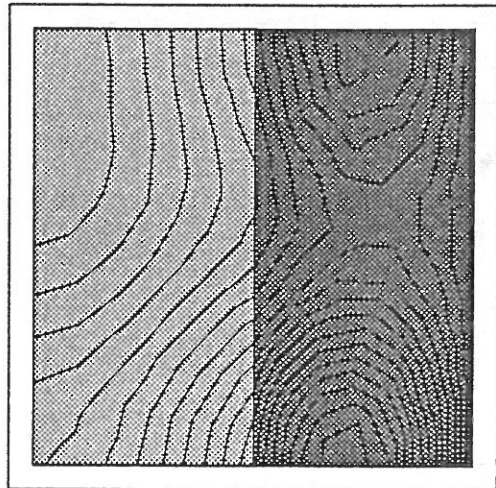
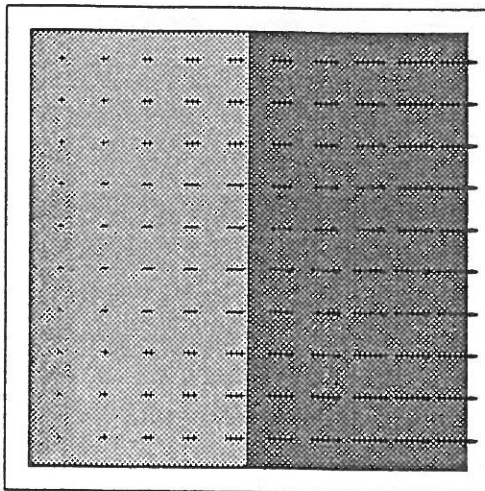


Le champ magnétique(5a) et électrique(5b) du cinquième mode

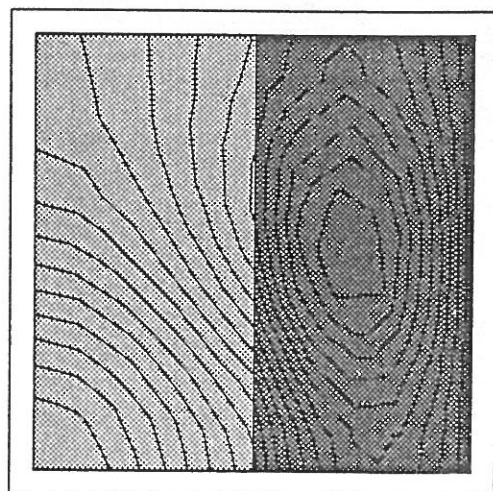
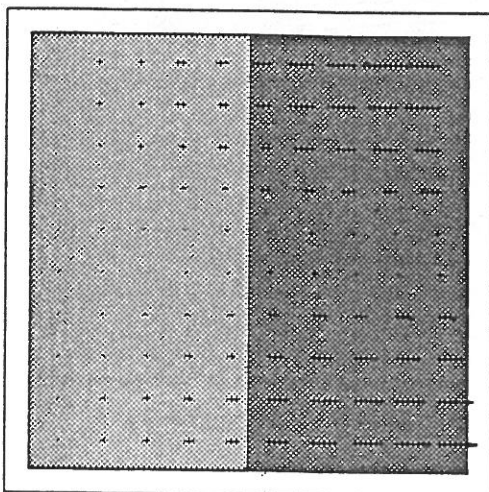
Figure 4.14: Les champs du guide rectangulaire avec diélectrique($p = 0.5$, $\beta = 0.5$)



Le champ magnétique(1a) et électrique(1b) du premier mode

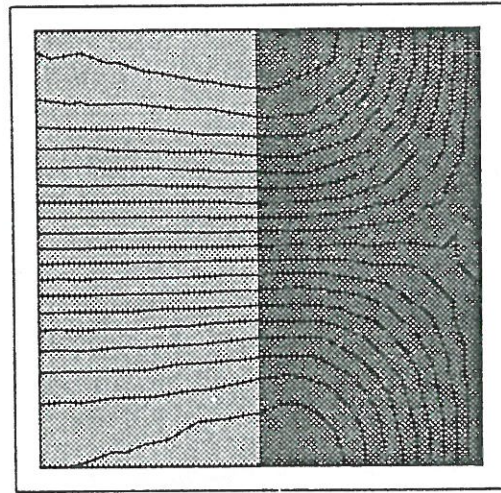
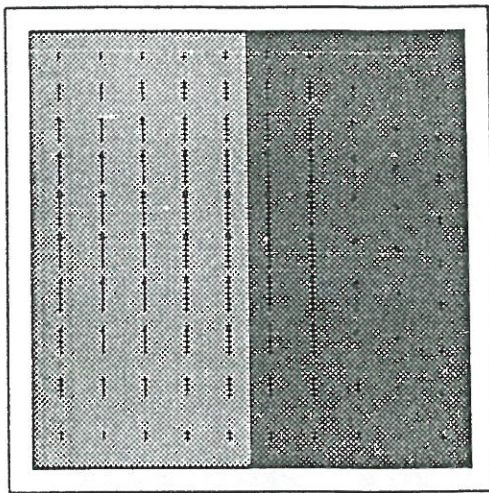


Le champ magnétique(2a) et électrique(2b) du deuxième mode

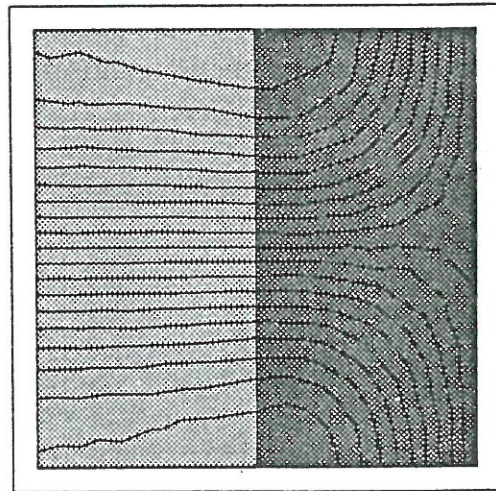
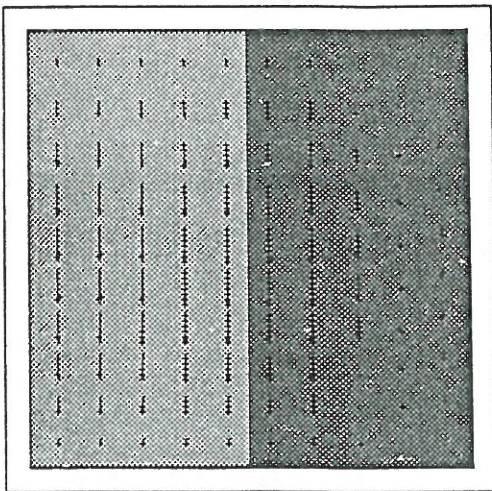


Le champ magnétique(3a) et électrique(3b) du troisième mode

Figure 4.15: Les champs du guide rectangulaire avec diélectrique($p = 1$, $\beta = 0.5$)

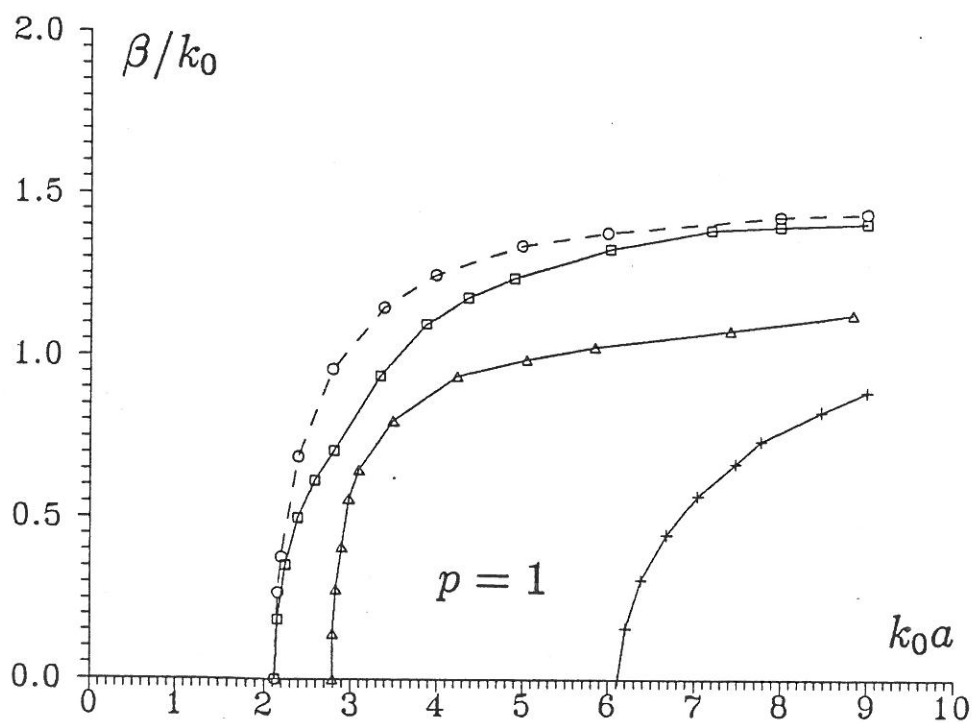
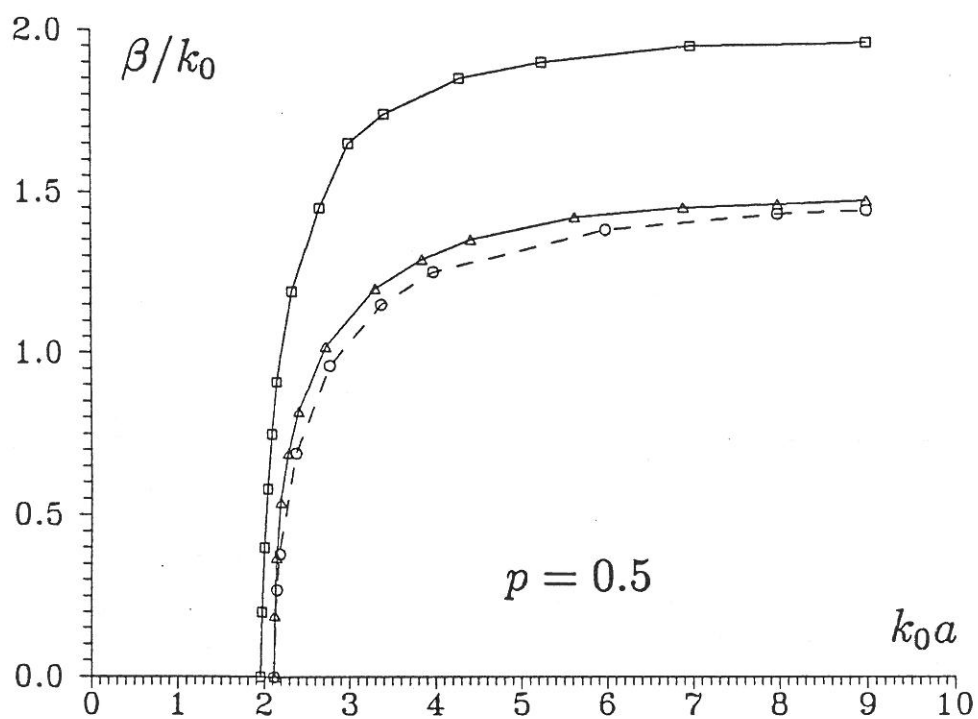


Le champ magnétique(4a) et électrique(4b) du quatrième mode



Le champ magnétique(5a) et électrique(5b) du cinquième mode

Figure 4.16: Les champs du guide rectangulaire avec diélectrique($p = 1$, $\beta = 0.5$)



□ : premier mode , Δ : deuxième mode
 + : mode TM_{x11} , o : résultat de Harrington

Figure 4.17: Les courbes de dispersion du guide rectangulaire diélectrique

Chapitre 5

Impédance caractéristique de ligne *TEM*

Les lignes *TEM* peuvent supporter non seulement le mode *TEM* mais aussi les modes *TE* et *TM*. Nous avons démontré au premier chapitre que les deux paramètres importants de ligne *TEM* caractérisant respectivement la variation longitudinale et transversale du champ sont l'impédance caractéristique Z_c et la constante de propagation γ . γ dépend des matériaux de la ligne *TEM* et de la fréquence d'excitation (1.37). Le calcul de l'impédance caractéristique Z_c est un problème statique en deux dimensions. Pour la structure générale indiquée dans la figure 2.2 nous calculons d'abord par la fonctionnelle scalaire (2.37) la répartition du potentiel entre les deux conducteurs sur lesquels on impose deux potentiels différents. Avec la répartition du potentiel, nous pouvons calculer l'énergie électrique (une intégrale surfacique) et la différence potentielle (une intégrale linéique) pour trouver l'impédance caractéristique Z_c (2.40). Sachant que le champ est conservatif le choix du trajet de l'intégrale linéique est arbitraire.

Pour illustrer cette partie, nous calculons un coaxial circulaire et un coaxial circulaire-carré. La figure 5.1 représente la configuration de ces deux coaxiaux. L'impédance

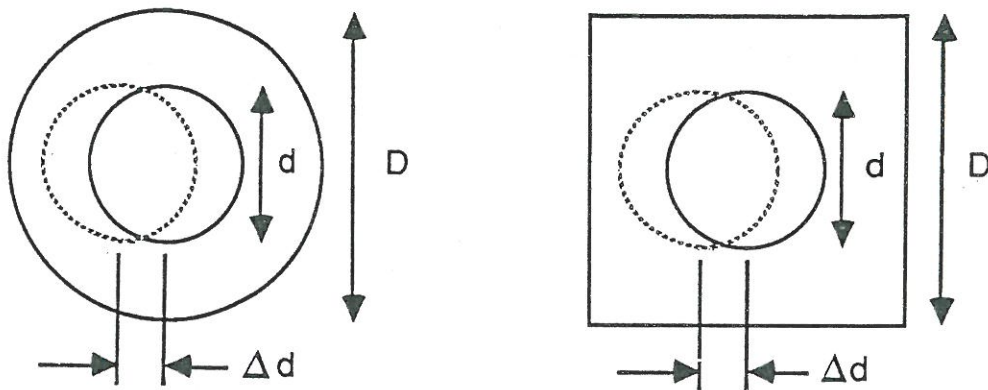


Figure 5.1: Section transversale du coaxial circulaire et circulaire-carré

caractéristique du coaxial circulaire est donnée par [29]:

$$Z_c = 60 \ln(D/d) \quad (5.1)$$

Pour celle du coaxial circulaire-carré, nous utilisons la formulation approximative du manuel[30]:

$$\begin{aligned} Z_c &= 59.96 \ln(D/d) + 4.54 & (D/d) > 1.3 \\ Z_c &= 21.2 \sqrt{(D/d) - 1} & (D/d) < 1.01 \end{aligned} \quad (5.2)$$

On donne dans les tableaux 5.1 et 5.2 les valeurs analytiques Z_{ca} calculées par (5.1)(5.2) et celles fournies par les éléments finis Z_{ce1} en fonction du rapport (D/d) . Ensuite, les conducteurs intérieurs des deux coaxiaux sont décentrés de leur axe d'une distance $(\Delta d/d) = 0.2$. Les impédances correspondantes calculées par la méthode des éléments finis Z_{ce2} sont mis dans les mêmes tableaux. La répartition de champ magnétique des coaxiaux décentrés sont représentées sur la figure 5.2. Généralement il faut des calculs très lourds pour obtenir des résultats analytiques du cas décentré.

Impédance caractéristique du coaxial circulaire

D/d	1.1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
Z_{ca}	5.72	10.94	20.19	28.20	35.27	41.59	47.31	52.53	57.33	61.78	65.91
Z_{ce1}	5.72	10.94	20.17	28.08	35.23	41.49	47.05	51.90	55.92	58.79	64.80
Z_{ce2}	-	-	17.50	26.61	34.15	39.99	46.40	51.35	55.41	56.23	63.73

Tableau 5.1

Impédance caractéristique du coaxial circulaire-carré

D/d	1.1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
Z_{ca}	10.25	15.47	24.71	32.72	39.78	46.10	51.58	57.03	61.83	66.28	70.41
Z_{ce1}	9.45	15.41	24.63	32.68	39.67	45.93	51.44	56.28	60.46	63.95	66.64
Z_{ce2}	-	-	22.37	31.37	38.82	42.27	50.92	55.86	60.12	63.64	67.37

Tableau 5.2

Quant aux modes supérieurs TE et TM des coaxiaux, on les calcule de la manière identique à celle des guides d'onde. On donne dans le tableau 5.3 et sur la figure 5.3 les valeurs propres et les vecteurs propres pour les trois premiers modes TE et TM . Les valeurs propres sont comparées à celles de Marcuvitz[31]. Comme pour le guide circulaire, il existe aussi des modes jumeaux TM pour le coaxial. On voit que le calcul des modes supérieurs TM et TE du coaxial décentré est immédiat.

TM et TE modes du coaxial (dimension: $D = 3, d = 1$)

	TM_{01}	TM_{11}	TM_{21}	TE_{11}	TE_{21}	TE_{31}
k_{ce}^2	4.646	4.908	5.606	1.541	2.930	4.164
k_{ca}^2	4.646	4.909	5.611	1.602	2.933	4.161
	nombre d'équations: 628			nombre d'équations: 339		
	nombre d'inconnus: 15014			nombre d'inconnus: 1895		
	nombre de triangles: 410			nombre de triangles: 158		
	nombre de noeuds: 869			nombre de noeuds: 361		

Tableau 5.3

En outre il y a plusieurs types de coaxial dont la répartition de champ peut atteindre à l'infini, par exemple la ligne TEM bifilaire comme le modèle de la figure 2.2. Dans ce cas, nous pouvons mettre la ligne à étudier dans domaine fermé par une frontière suffisamment large, affecter un potentiel zéro sur la frontière et deux potentiels différents de zéro sur les deux conducteurs. Nous résolvons le problème par (2.37) et calculons l'impédance caractéristique par (2.40). Les résultats satisfaisants peuvent être trouvés par cette méthode approximative.

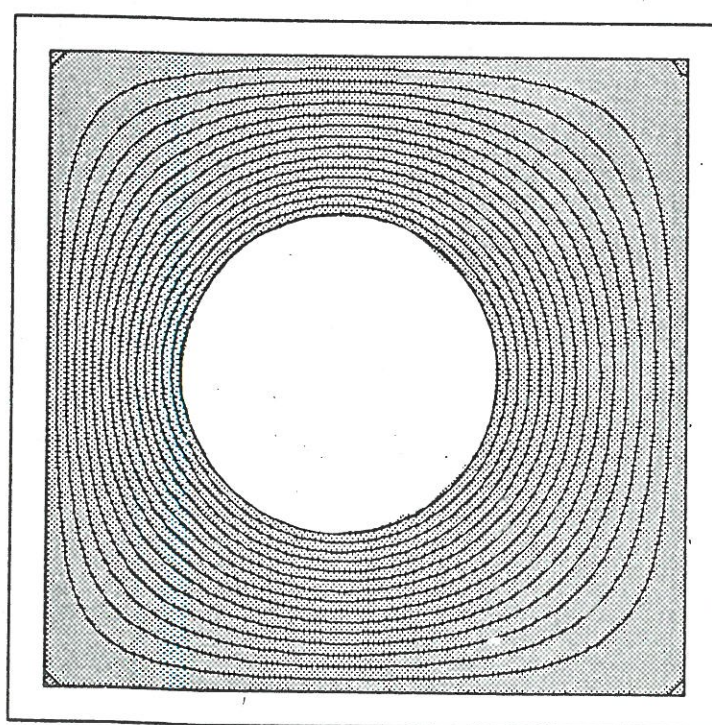
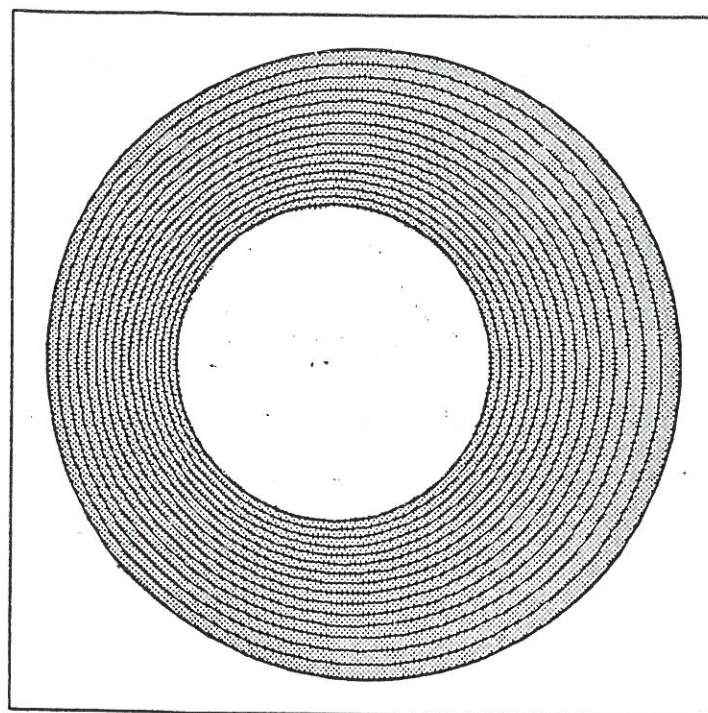
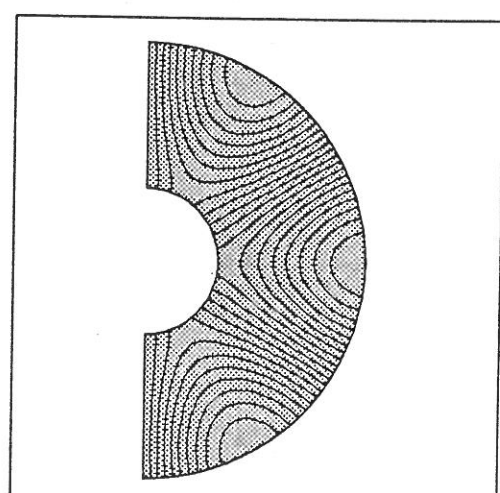
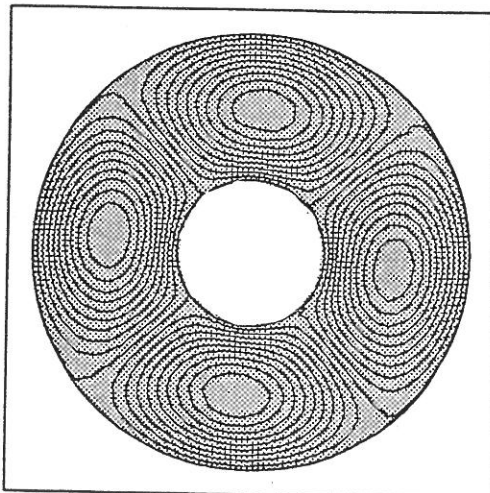
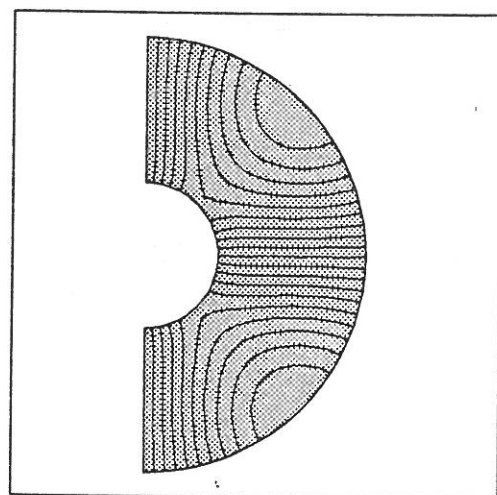
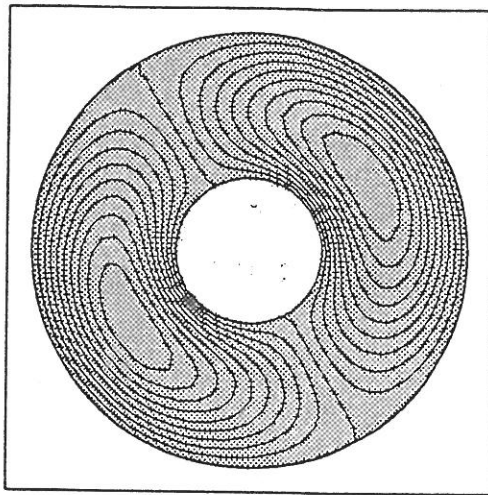
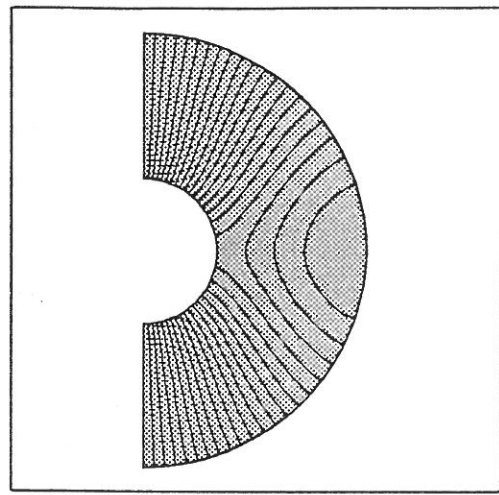
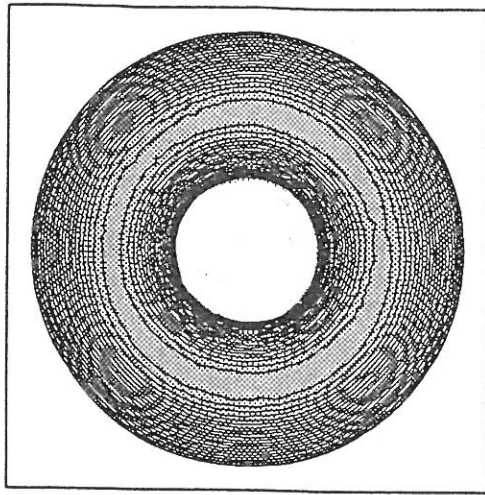


Figure 5.2: Les champs magnétiques dans les coaxiaux décentrés ($(\Delta d/d) = 0.2$)



Champ magnétique du mode TM

Champ électrique du mode TE

Figure 5.3: La répartition des champs du coaxial circulaire

Chapitre 6

Cavité cylindrique et coaxiale

Pour les cavités, le calcul des valeurs propres ne peut se faire qu'en résolvant un système à trois dimensions. A titre d'exemple nous traitons le cas d'une cavité coaxiale dissymétrique homogène. Les modes de résonance sont du type TM , TE et TEM . Les fonctionnelles $F(H_z)$ et $F(E_z)$ sont utilisées. Par rapport au guide d'onde homogène, le nombre de noeuds et le temps de calcul augmentent. Pour bien comprendre les modes dans la cavité coaxiale dissymétrique, nous étudions d'abord les deux cas simples: la cavité cylindrique et la cavité coaxiale.

6.1 Cavité cylindrique

Une cavité cylindrique homogène de dimension $D = 0.3m$, $L = 1m$ est montrée dans la figure 6.1(a). Elle est discrétisée par de petites portions de cylindre dans la figure 6.1(c). Le calcul de cette cavité est comparable au calcul du guide homogène au paragraphe 4.1. On utilise respectivement les fonctionnelles $F(E_z)$ et $F(H_z)$ pour calculer les modes TM et TE . Deux géométries de travail exploitées par le programme sont montrées dans la figure 6.1(a)(b). Pour les modes TM on applique sur la surface cylindrique la condition de Dirichlet $E_z = 0$ et laisser libre les deux surfaces circulaires

aux extrémités de la cavité (figure 6.1(a)). Pour les modes TE on applique sur le plan médian la condition de Dirichlet $H_z = 0$ et laisse libre ailleurs (figure 6.1(b)).

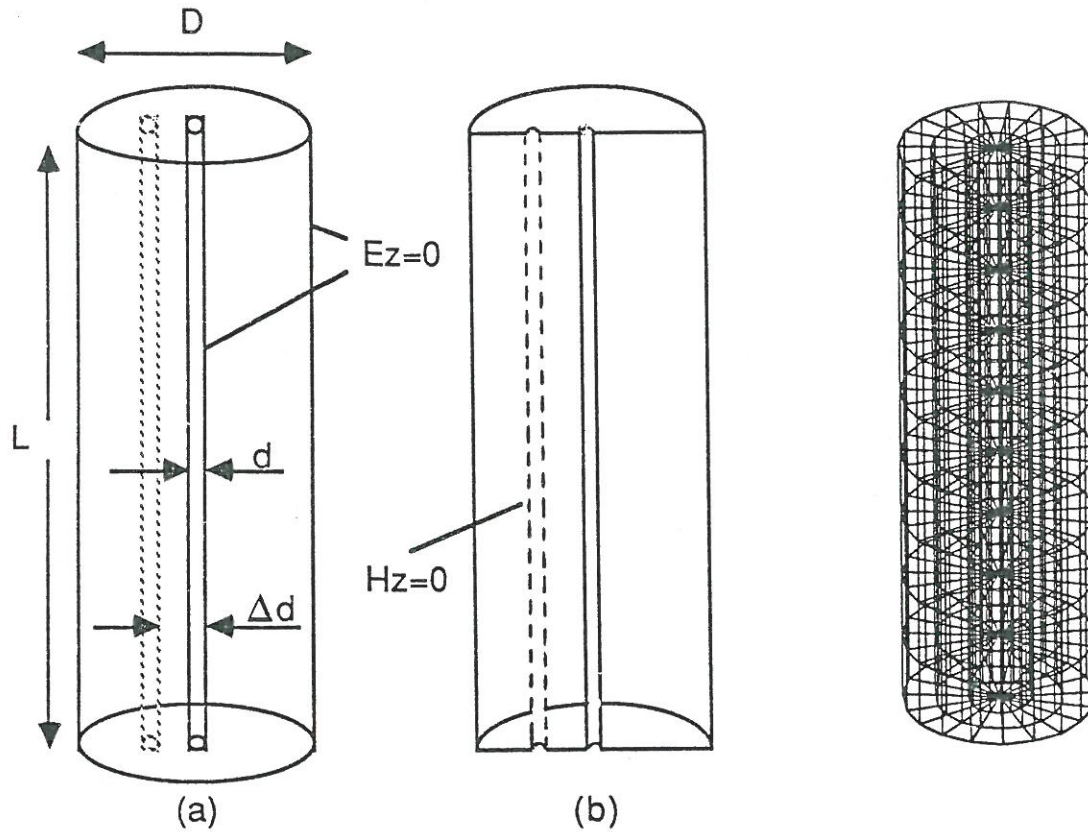


Figure 6.1: Cavity cylindrique, coaxiale

Les cinq premiers modes de la cavité cylindrique
($D = 0.3m, L = 1m$)

	TE_{111}	TE_{112}	TE_{113}	TM_{010}	TM_{011}
k_{0a}	12.68	13.79	15.48	15.99	16.29
k_{0e}	12.79	13.92	15.63	16.22	16.53
nombre d'équations:	888				
nombre de coefficients inconnus:	10223				
nombre de noeuds:	1207				
nombre de tétraèdres:	5967				

Tableau 6.1

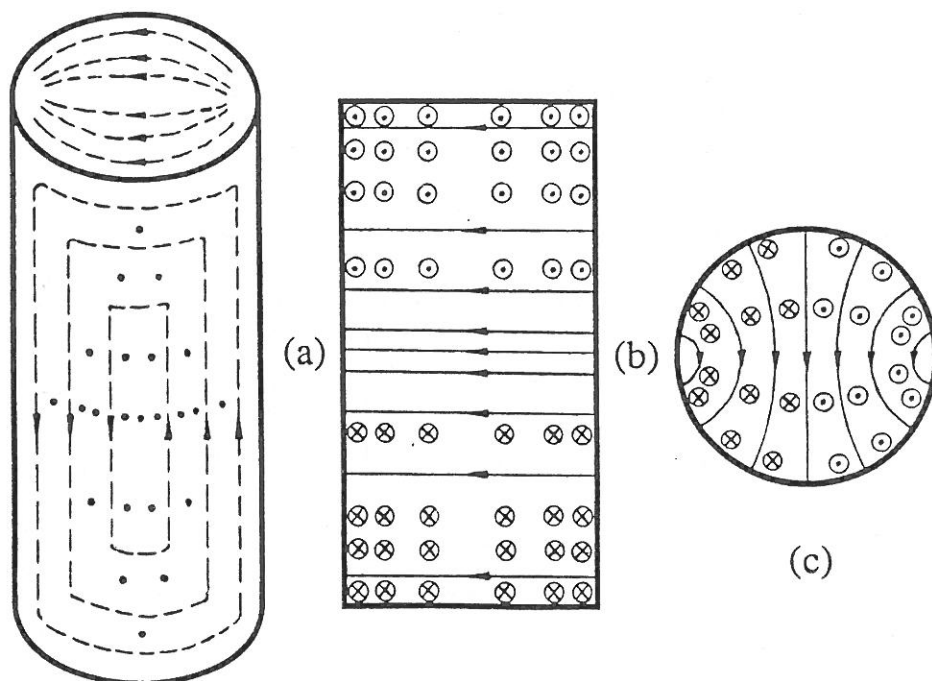


Figure 6.2: Le premier mode de la cavité cylindrique

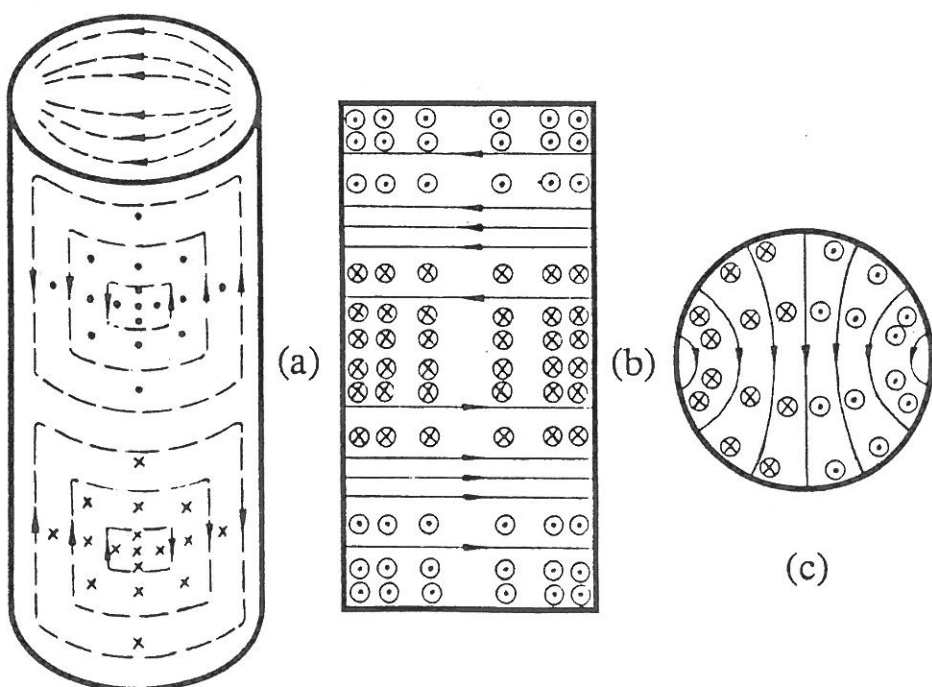


Figure 6.3: Le deuxième mode de la cavité cylindrique

(a) champ à la surface de la cavité

(b) champ dans le plan médiant

(c) champ dans la section

• × champ électrique , ⊙ ⊗ champ magnétique

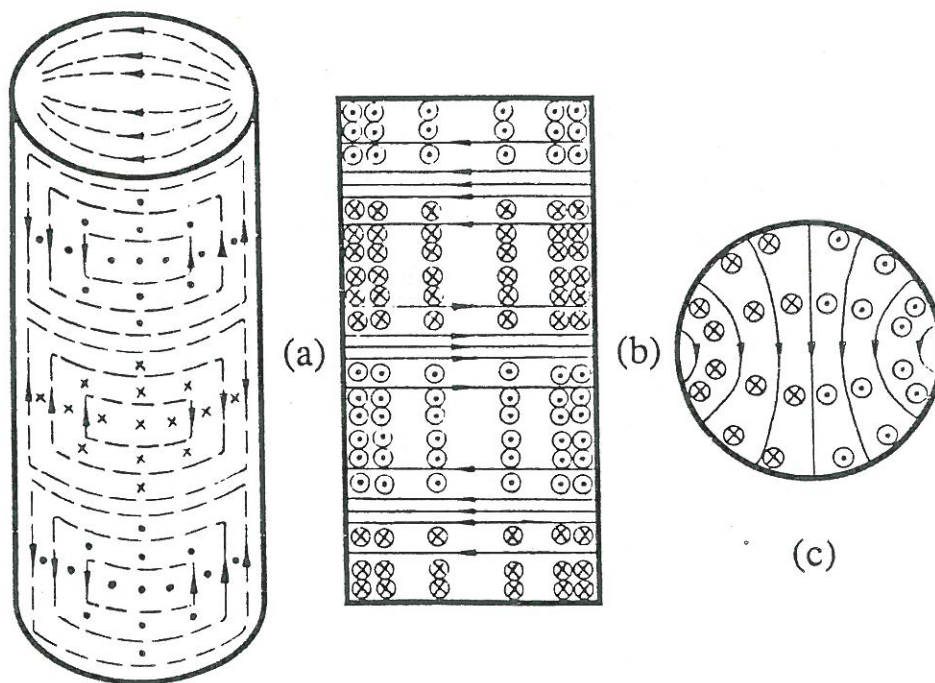


Figure 6.4: Le troisième mode de la cavité cylindrique

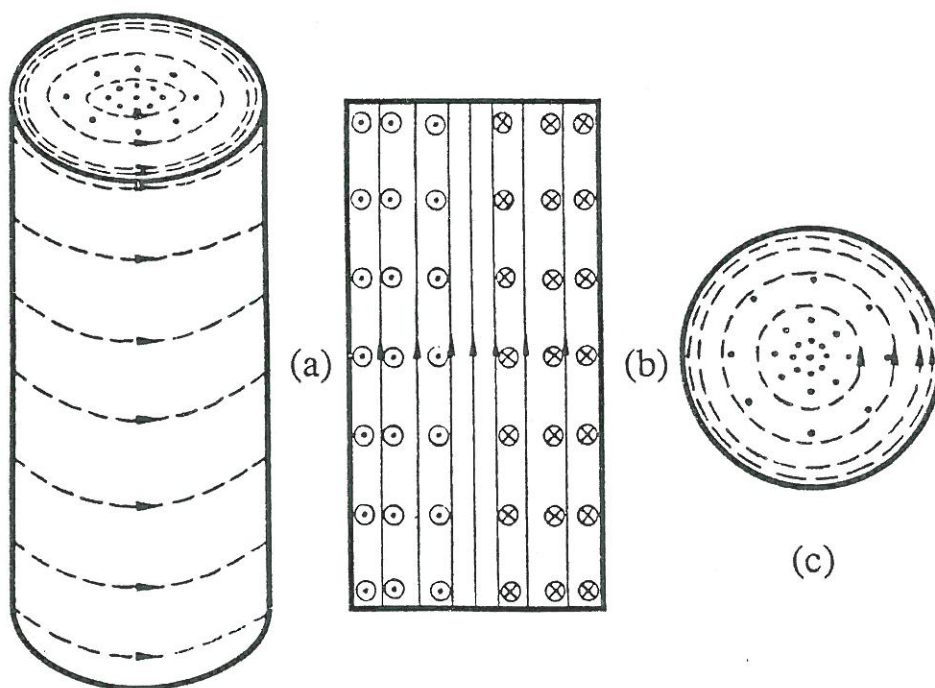


Figure 6.5: Le quatrième mode de la cavité cylindrique

- (a) champ à la surface de la cavité
- (b) champ dans le plan médiant
- (c) champ dans la section
- × champ électrique , ⊙ ⊗ champ magnétique

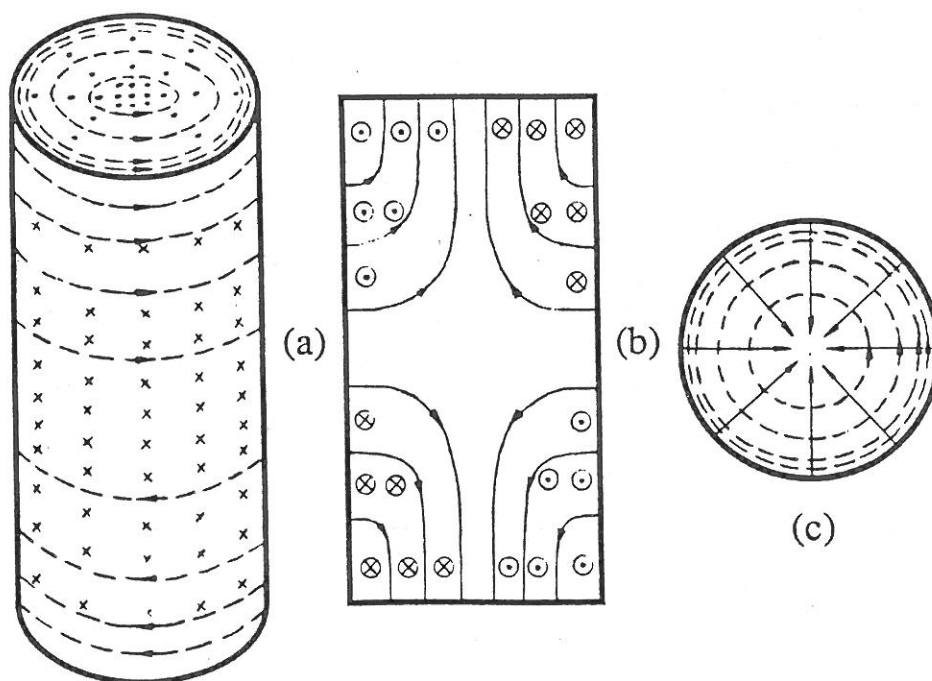


Figure 6.6: Le cinquième mode de la cavité cylindrique

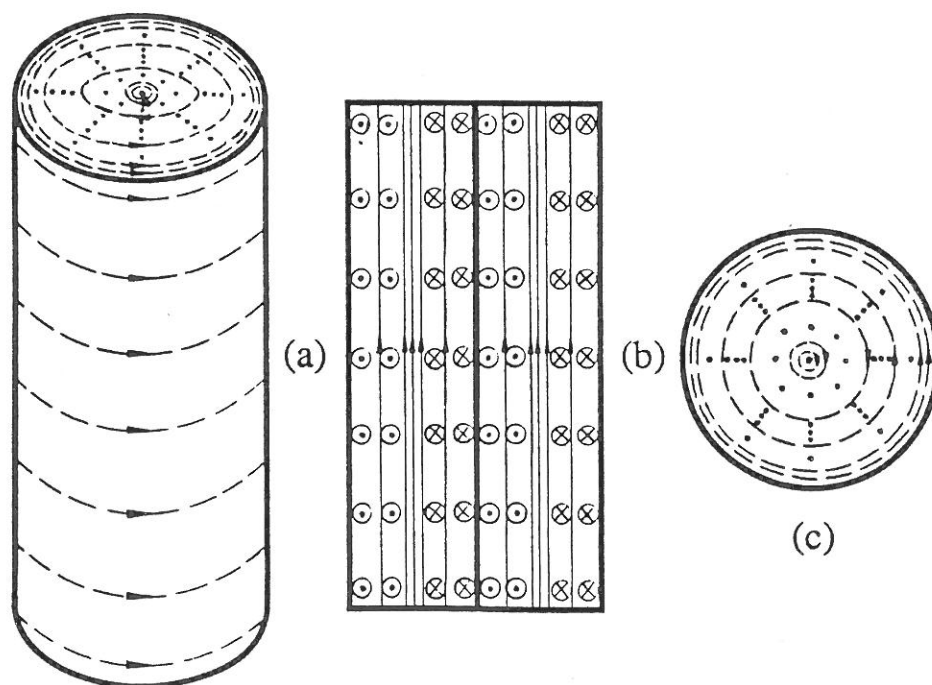


Figure 6.7: Le cinquième mode de la cavité coaxiale

(a) champ à la surface de la cavité

(b) champ dans le plan médiant

(c) champ dans la section

• × champ électrique , ⊙ ⊗ champ magnétique

Les valeurs propres calculées k_{0e} de la cavité cylindrique, sont comparées aux résultats analytiques k_{0a} dans le tableau 6.1 et les répartitions de champ électrique et magnétique associées sont schématisées dans les figures 6.2 à 6.6. On montre dans chaque figure le champ à la surface de la cavité(a), le champ dans le plan médian(b) et dans la section(c). Avec le maillage choisi(matrice de dimension 888) la précision sur la valeur propre est très bonne: de l'ordre d'un pourcent pour le premier mode, elle diminue légèrement pour les modes supérieures. Une précision encore meilleure pourrait être obtenue en augmentant le nombre de noeuds.

6.2 Cavité coaxiale

On étudie maintenant une cavité coaxiale dont la dimension géométrique extérieure reste la même que la cavité cylindrique. Un conducteur cylindrique de diamètre $d = 0.015m$ est introduit au centre de la cavité(figure 6.1). Le mode fondamental de cette structure devient *TEM*. La cavité coaxiale résonne lorsque sa longueur tombe sur n ème demi-longueur d'onde[32]:

$$l = n \frac{\lambda_0}{2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.1)$$

Autrement dit pour une cavité coaxiale de longueur l définie, sa longueur d'onde de résonance est donnée par:

$$\lambda_0 = \frac{2l}{n} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.2)$$

La répartition du champ électromagnétique du mode de résonance *TEM* dans la cavité coaxiale est très simple et peut être trouvée dans beaucoup de livres.

Quant aux modes supérieurs *TE* et *TM*, les géométries de travail sont presque les mêmes que ceux de la cavité cylindrique . Un cylindre intérieur est ajouté dans la cavité, les deux surfaces circulaires aux extrémités de la cavité devient deux couronnes. Dans la figure 6.1(a) pour les modes *TM* la condition($E_z = 0$) est appliquée sur le conducteur intérieur comme sur le conducteur extérieur; la condition sur les deux couronnes est du type Neumann. Dans la figure 6.1(b) pour les modes *TE*, la condition

de Dirichlet $H_z = 0$ est appliquée sur le le plan médiant et la condition de Neumann ailleurs. Les informations relatives aux calculs numériques sont ignorées dans les tableaux 6.2 et 6.3, car elles sont très proches de celle du tableau 6.1.

Les cinq premiers modes de la cavité coaxiale
 $(D = 0.3m, L = 1m, d = 0.015m)$

	TE_{111}	TE_{112}	TE_{113}	TE_{114}	TM_{010}
k_{0e}	12.75	13.91	15.60	18.37	19.96

Tableau 6.2

Au niveau du mode de résonance la situation est intéressante pour la cavité coaxiale. L'introduction du cylindre métallique change peu certains modes mais profondément les autres. Si l'on compare les résultats des tableaux 6.1 et 6.2, on voit que les valeurs propres des modes TE_{11n} sont très peu modifiées. Ceci est dû d'une part à la faiblesse du diamètre du cylindre intérieur d devant le diamètre de la cavité D , d'autre part, à l'annulation du champ électrique E_z dans tout le volume et à la faible valeur du champ E_ϕ près du cylindre intérieur, puisque E_ϕ est nul au centre. Simplement quelques lignes de E_r au centre sont coupées en raison de la présence du cylindre intérieur. Leurs valeurs propres sont pratiquement les mêmes que celles correspondantes de la cavité vide.

En revanche pour les modes TM_{01n} les valeurs propres sont fortement modifiées ainsi que les répartition du champ (figure 6.7) quand le conducteur intérieur est introduit. Ces modes avec le champ électrique E_z parallèle au conducteur intérieur sont beaucoup perturbés. Le champ électrique E_z présente un maximum au centre de la cavité cylindrique, s'annule sur le conducteur intérieur de la cavité coaxiale. Par conséquent les valeurs propres de ces modes augmentent et le classement de ces mode est repoussé. Ainsi dans le tableau 6.2 le mode TE_{114} survient avant les modes TM_{010} et TM_{011} . On schématise pour la cavité coaxiale seulement le cinquième mode TM_{010} . Les répartitions de champ des modes TE_{111} , TE_{112} , TE_{113} sont pratiquement inchangées à part quelques déformations sur le conducteur intérieur. Bien qu'il n'ait pas été schématisé, le quatrième mode de la cavité coaxiale TE_{114} n'a qu'une demie période de plus dans la direction z par rapport au mode TE_{113} .

6.3 Cavité coaxiale dissymétrique

La cavité coaxiale dissymétrique est construite en déplaçant le conducteur intérieur de la cavité coaxiale d'une distance $\Delta d = 0.075m$. Quand le conducteur intérieur s'éloigne de l'axe, le mode fondamental reste du type TEM avec la même longueur d'onde de résonance. La répartition de champ transversal déforme de la même façon que la figure 5.2.

Les modes TM_{01n} sont moins perturbés par rapport à la cavité coaxiale, car le champ E_z décroît vers le rayon de la cavité. L'influence sur le mode TM_{01n} est minimisée si le conducteur intérieur est placé sur le rayon de la cavité, sachant que E_z s'annule avec ou sans ce conducteur intérieur. Le changement des modes TE_{11n} n'est pas important. Quand le conducteur intérieur est déplacé vers le rayon de la cavité, le champ E_ϕ s'accroît et le champ E_r décroît. C'est ainsi qu'on voit dans le tableau 6.3 la montée du mode TM_{010} au quatrième rang et le mode TM_{011} au cinquième. Le mode TE_{114} est repoussé au delà des cinq premiers modes. Pour la cavité coaxiale dissymétrique on schématise sur les figures 6.8 et 6.9 les modes TM_{010} et TM_{011} . Les modes TE_{111} , TE_{112} , TE_{113} sont presque les mêmes que ceux de la cavité cylindrique.

Les cinq premiers modes de la cavité
coaxiale dissymétrique

($D = 0.3m$, $L = 1m$, $d = 0.015m$, $\Delta d = 0.075$)

	TE_{111}	TE_{112}	TE_{113}	TM_{010}	TM_{011}
k_{0e}	12.76	13.89	15.66	17.51	17.80

Tableau 6.3

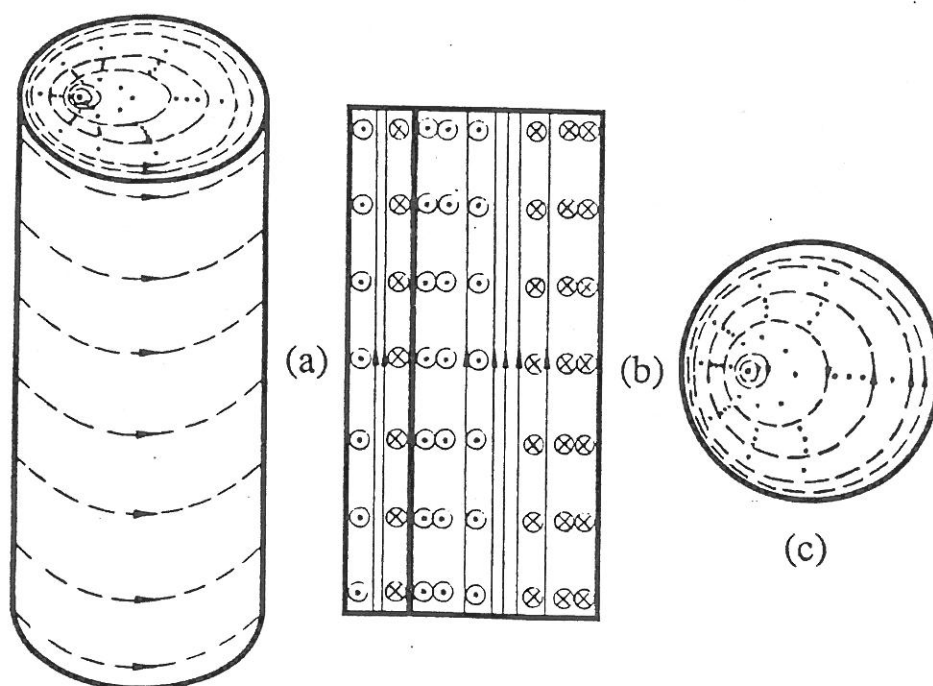


Figure 6.8: Le quatrième mode de la cavité coaxiale dissymétrique

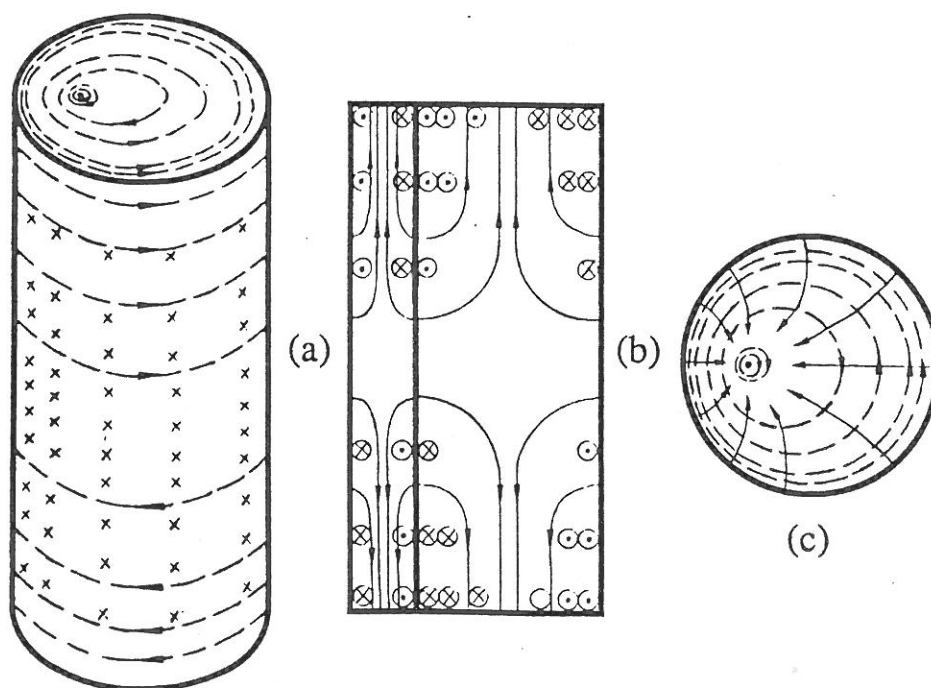


Figure 6.9: Le cinquième mode de la cavité coaxiale dissymétrique

- (a) champ à la surface de la cavité
- (b) champ dans le plan médiant
- (c) champ dans la section
- × champ électrique , ⊙ ⊗ champ magnétique

Chapitre 7

Composants hyperfréquences

7.1 Introduction

Ce n'est pas un problème aux valeurs propres mais un problème de répartition de champ électromagnétique dont un modèle est schématisé dans la figure 2.1. Un système est fermé par une surface S_{sur} avec une ou plusieurs entrées et sorties. Connaissant les champs aux entrées on cherche la répartition de champ et ensuite les paramètres concernant la transmission de l'énergie du système.

Supposons que les matériaux dans le système soient linéaires, isotropes, mais peuvent être inhomogènes, dissipatifs dans certaines régions caractérisés par $\epsilon_r = \epsilon_{r1} - j\epsilon_{r2}$ et $\mu_r = \mu_{r1} - j\mu_{r2}$. Les champs électromagnétiques sont complexes:

$$\vec{H} = \vec{H}_r + j\vec{H}_i = \sqrt{|H_r|^2 + |H_i|^2} e^{j \arctg(H_i/H_r)} \quad (7.1)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_r + j\vec{E}_i = \sqrt{|E_r|^2 + |E_i|^2} e^{j \arctg(E_i/E_r)} \quad (7.2)$$

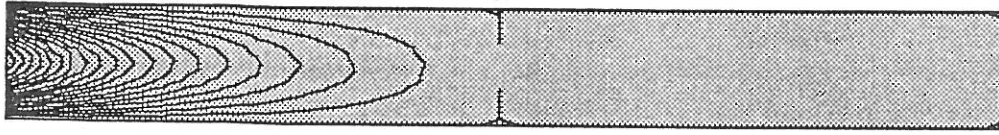
Le terme $e^{j\omega t}$ est omis.

Par rapport au problème aux valeurs propres le nombre d'articles concernant le calcul du problème de répartition est relativement faible. J.P. Webb[33] a utilisé les

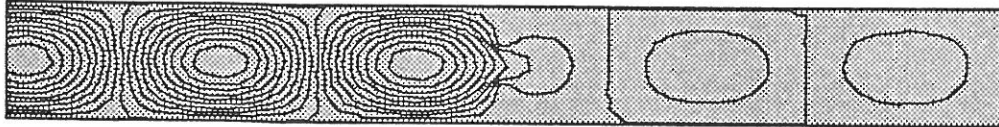
fonctionnelles (2.18) et (2.19) au problème de répartition. Il a introduit la condition de Dirichlet non nulle pour décrire le mode d'excitation. M. de Pourcq [35][36] a calculé avec la même fonctionnelle la répartition de l'énergie dans un guide d'onde chargé de matériaux dissipatifs. Seulement les composants avec une entrée ont été traités. En effet, comme nous avons indiqué dans le paragraphe 2.7, $F(\vec{H})$ et $F(\vec{E})$ sont proportionnelles à l'impédance d'entrée et à l'admittance d'entrée d'un accès du composant. M. Koshiba[42], en combinant la méthode des éléments finis et la méthode analytique, a calculé parfaitement le guide d'onde chargé par un barreau ferrite dans le plan-H. Sa formulation manque la généralité pour les problèmes de trois dimensions. K.Morishita[10], en utilisant le principe de "moindre action", a trouvé non seulement les fonctionnelles (2.18) et (2.19), mais une formulation variationnelle pour la matrice d'impédance du composant hyperfréquence. Bien que c'est une formulation complète pour traiter le composant hyperfréquence, elle n'a pas été utilisée il y a longtemps. J.P.Webb[34] a repris la formulation variationnelle de K.Morishita(2.35) pour calculer les éléments de la matrice d'impédance d'un composant à deux dimensions.

Dans ce chapitre nous utilisons la méthode des éléments finis pour analyser le problème de répartition. Deux méthodes permettant de calculer ce type de problème sont: la méthode matricielle et la méthode de la charge adaptée, sont proposées . Afin de vérifier la validité de la méthode de calcul, nous calculons deux structures simples représentées dans les figures (7.2) et (7.9).

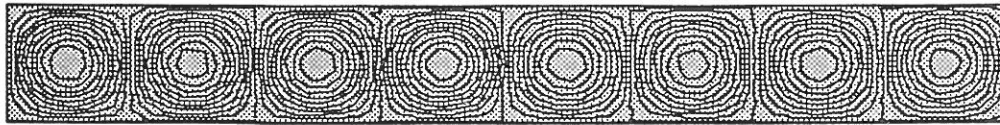
Avant de commencer le calcul du composant hyperfréquence, on va voir le phénomène d'excitation du guide rectangulaire à iris par le mode TE_{10} . On utilise la fonctionnelle scalaire $F(E_y)$ en affectant le mode TE_{10} à l'entrée du guide. Sur la figure 7.1, une onde atténuée est excitée dans le premier cas (a) parce que la fréquence d'excitation($k_0a = 3$) est inférieure à la fréquence de coupure. Avec une fréquence d'excitation un peu plus élevée($k_0a = 4$) l'onde commence à se propager et à passer par la fenêtre de l'iris (b). Lorsque la fréquence d'excitation dépasse suffisamment la fréquence de coupure ($k_0a = 5$) l'onde se propage correctement dans le guide. Cet exemple démontre que le guide d'onde est un filtre passe-haut. Pour traiter un com-



(a) $k_0 a = 3$



(b) $k_0 a = 4$



(c) $k_0 a = 5$

Figure 7.1: Excitation du guide rectangulaire avec iris par le mode TE_{10}

posant, il faut que la fréquence d'excitation soit supérieure à la fréquence de coupure du guide pour que l'onde puisse se propager dans le guide et l'énergie puisse être transmise dans le composant.

7.2 Méthode matricielle

Décrite déjà dans le paragraphe 2.5, cette méthode consiste à calculer tout d'abord une ou plusieurs fois le système de la figure 2.1 par la fonctionnelle avec différentes conditions aux limites et calculer ensuite par la formulation variationnelle (2.34) ou (2.35) chaque élément de la matrice d'impédance Z_{ij} ou la matrice d'admittance Y_{ij} . Les éléments Z_{ij} ou Y_{ij} nous permettent de déterminer le circuit équivalent du composant microonde. Il est également possible de trouver la matrice

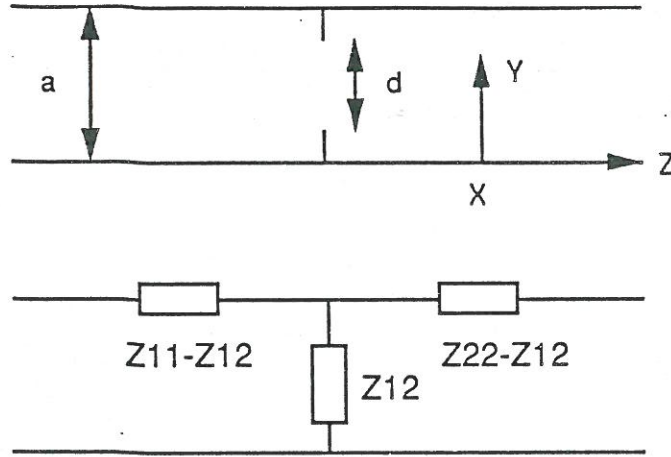


Figure 7.2: Guide rectangulaire avec iris inductif et son circuit équivalent

de répartition avec les éléments z_{ij} et y_{ij} normalisés:

$$[s] = ([z] - 1)([z] + 1)^{-1} \quad (7.3)$$

$$[s] = (1 - [y])(1 + [y])^{-1} \quad (7.4)$$

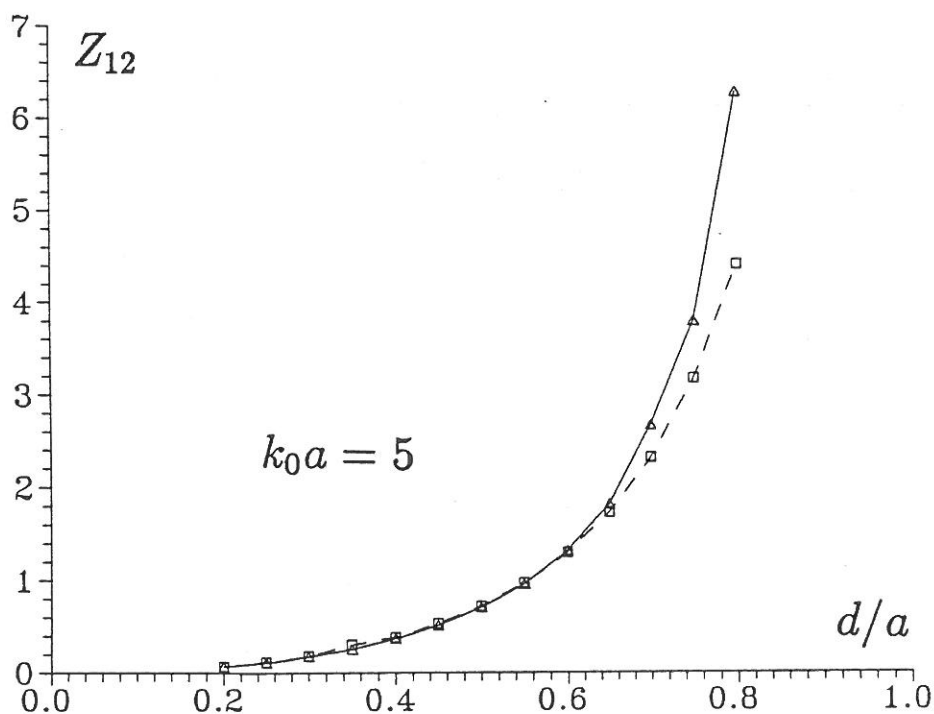
pour étudier directement la transmission de l'énergie du composant.

On considère un guide d'onde rectangulaire avec iris inductif d'épaisseur nulle dans la figure 7.2. Le guide est excité par le mode fondamental TE_{10} dont le champ électrique est dans la direction Y . Afin d'utiliser la méthode matricielle[10][34], il faut résoudre deux fois le système pour trouver E_1 et E_2 . Ces derniers sont calculés respectivement par la fonctionnelle (2.21) en appliquant à l'entrée 1 ou 2 le mode normalisé(Annexe B):

$$e_{y1,2} = \sqrt{\frac{2Z_w}{a_{1,2}b}} \sin\left(\frac{\pi x}{a_{1,2}}\right) \quad (7.5)$$

et la condition de Dirichlet nulle(court-circuit) ailleurs. Les éléments de la matrice d'admittance normalisés y_{ij} sont calculés par (2.35) et permettent d'avoir la matrice de répartition. La matrice $[y]$ est symétrique parce que le matériau dans le guide d'onde est isotrope. Pour pouvoir comparer nos résultats avec ceux de Marcuvitz nous inversons la matrice $[y]$ pour obtenir la matrice $[z]$. Théoriquement dans le circuit en T équivalent(figure 7.2), l'iris comporte comme une inductance pure, soit

l'élément $z_{11} = z_{12}$, il ne reste que l'inductance parallèle z_{12} . Par la méthode des éléments finis on trouve que z_{11} et z_{12} sont pratiquement identiques. z_{12} est tracé en fonction du rapport entre la largeur de l'iris d et la largeur du guide a pour une fréquence d'excitation normalisée $k_0 a = 5$ donnée (figure 7.3). On remarque que le résultat des éléments finis s'accorde mieux du résultat de Marcuvitz [31] lorsque le rapport d/a est faible. Quand le rapport d/a augmente, l'iris tend vers sa résonance, le calcul devient moins stable et la précision s'aggrave. A la fin de ce paragraphe, nous calculons l'élément $|s_{11}|$ (figure 7.7) à partir de la matrice $[z]$ trouvée pour pouvoir comparer au résultat calculé par la méthode de la charge adaptée.



ligne continue: Marcuvitz Handbook , ligne pointillée: Méthode matricielle

Figure 7.3: Impédance normalisée de l'iris inductif

7.3 Méthode de la charge adaptée

C'est une méthode originale développée dans cette thèse. Elle est semblable à la technique expérimentale de la mesure du coefficient de réflexion. On excite une entrée du système, on ferme les autres par des charges adaptées (absorbant caractérisé par ϵ_r complexe). Le taux d'onde stationnaire (TOS) (VSWR en anglais) ρ est calculé par:

$$\rho = \frac{|E_{max}|}{|E_{min}|} = \frac{|H_{max}|}{|H_{min}|} \quad (7.6)$$

puis le module du coefficient de réflexion $|\Gamma|$ par:

$$|\Gamma| = \frac{\rho - 1}{\rho + 1} \quad (7.7)$$

La phase du coefficient de réflexion peut être aussi obtenue à partir de la répartition de champ dans la direction de propagation. Le coefficient de réflexion ainsi obtenu est l'élément S_{ii} de la matrice $[s]$.

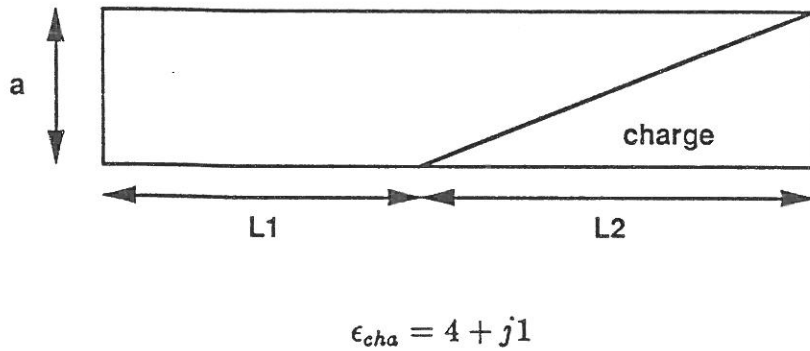


Figure 7.4: Charge adaptée du guide rectangulaire

Pour utiliser cette méthode, il faut définir tout d'abord une charge adaptée. La figure 7.4 illustre la configuration d'une charge adaptée de permittivité relative $\epsilon_{cha} = 4 + j1$. La figure 7.5 montre la variation de l'amplitude d'onde le long le guide pour $k_0 a = 4.2$. On remarque que l'ondulation de l'amplitude de l'onde est très faible, ceci veut dire que le coefficient de réflexion est proche de zéro et donc la qualité de la charge adaptée est satisfaisante pour une fréquence donnée. Ensuite on teste la largeur

de la bande de fonctionnement de cette charge adaptée en traçant (voir figure 7.6) la courbe du taux d'onde stationnaire (TOS) en fonction de la fréquence d'excitation normalisée. On remarque que sur une bande assez large ($k_0 a = 4$ à 8) le TOS de la charge adaptée reste très faible (inférieur à 1.15). Du côté de la bande supérieure, les modes supérieurs sont excités et le calcul devient difficile. La qualité de la charge adaptée est déterminée par la nature du matériau (ϵ_{cha}) et la forme de cette charge. Pour la forme de la charge, on la construit pour que le changement des matériaux soit progressif et qu'il y ait le moins de discontinuités possible. Le ϵ_{cha} est choisi par expérimentation. En changeant la valeur de ϵ_{cha} on mesure son TOS jusqu'au moment où on trouve un résultat satisfaisant (coefficient de réflexion faible).

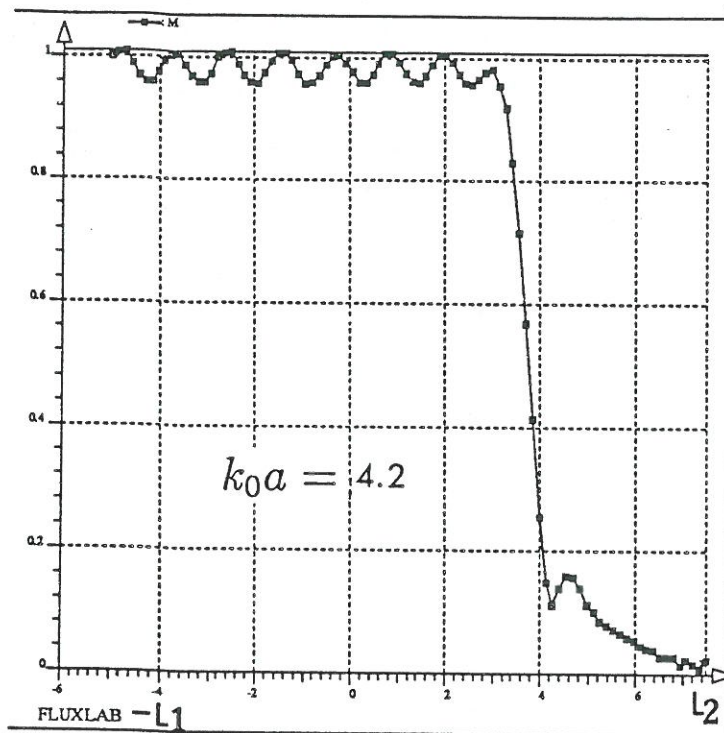


Figure 7.5: Amplitude de l'onde dans le guide fermé par la charge adaptée

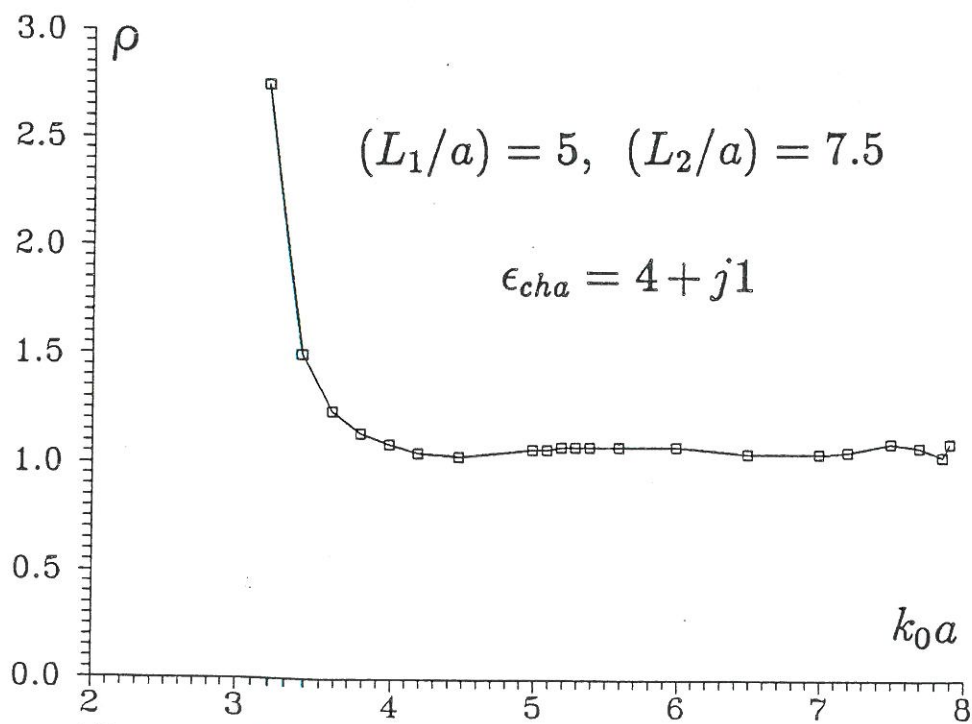


Figure 7.6: Taux d'onde stationnaire de la charge adaptée

On applique maintenant cette deuxième méthode à l'exemple précédent. Fermé une entrée du guide à iris par la charge adaptée, on applique à l'autre entrée le mode TE_{10} . Ici le mode TE_{10} n'est plus nécessairement normalisé. La répartition de champ électrique est montrée dans la figure 7.7. Le coefficient de réflexion est calculé en fonction du rapport d/a et le résultat est montré dans la figure 7.8 par la ligne pointillée. La ligne solide est le résultat trouvé par la méthode matricielle en utilisant la transformation (7.3).

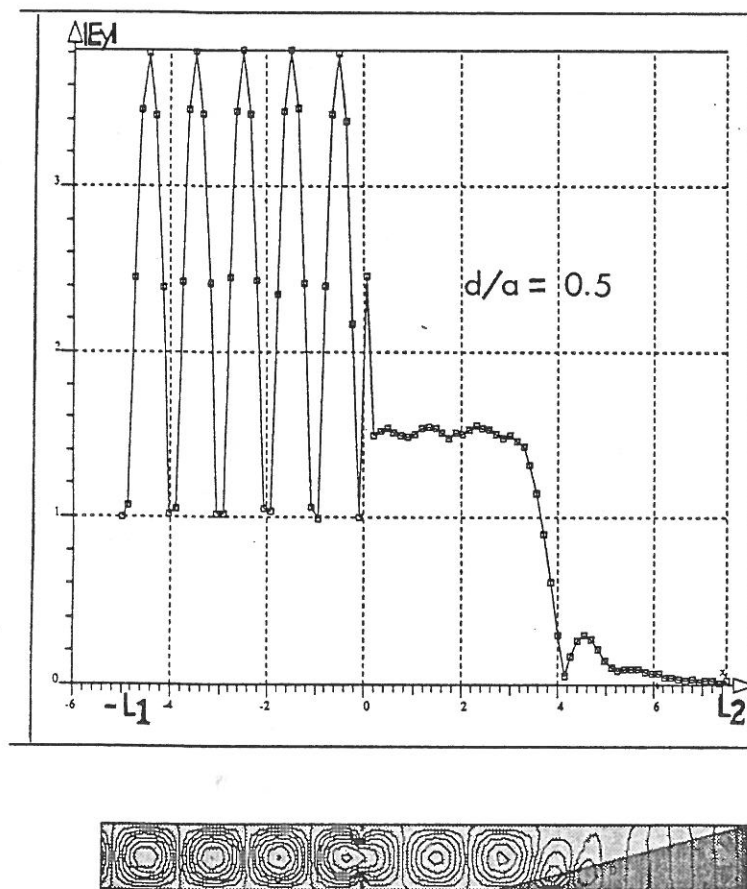
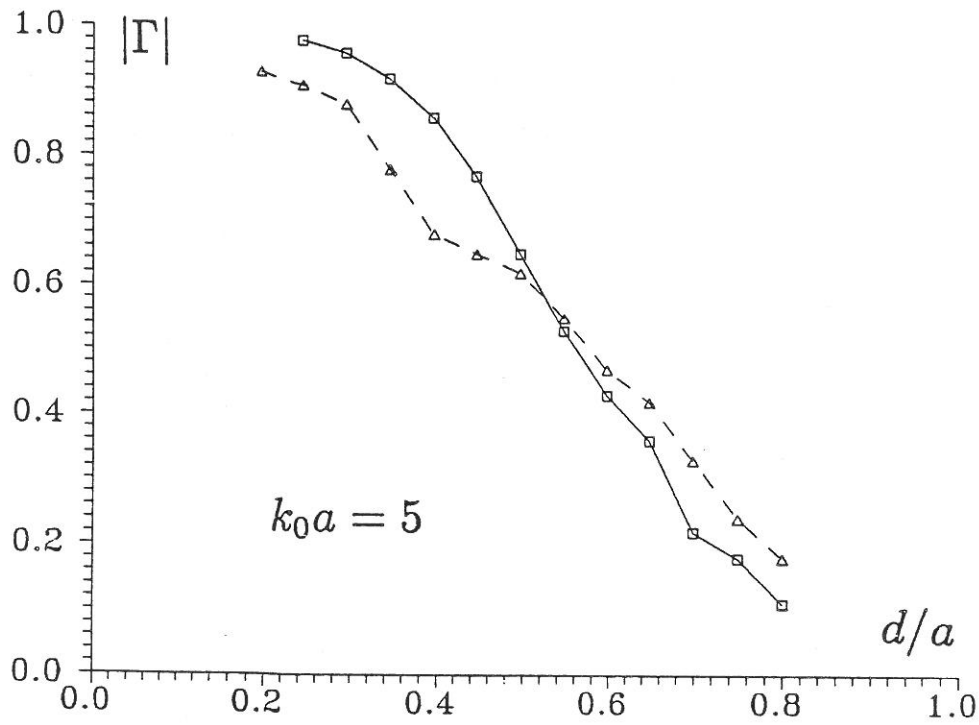


Figure 7.7: Répartition du champ électrique dans le guide avec iris



ligne continue: Méthode matricielle , ligne pointillée: Méthode de la charge adaptée

Figure 7.8: Coefficient de réflexion de l'iris inductif

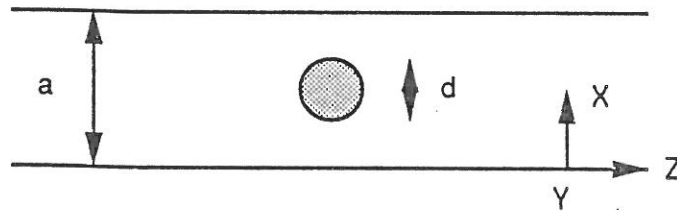
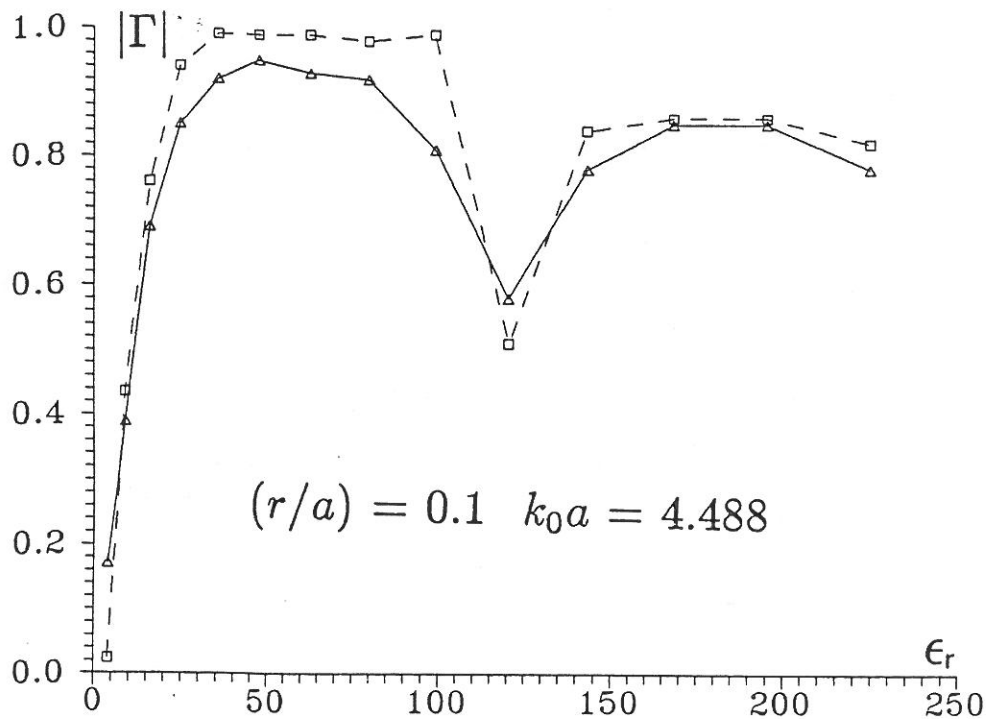


Figure 7.9: Guide d'onde rectangulaire chargé par un barreau diélectrique

Comme deuxième exemple on calcule un guide d'onde chargé au centre par un barreau diélectrique de permittivité ϵ_r , parallèle au champ électrique du mode d'excitation TE_{10} (figure 7.9). Il est également possible de le calculer par la même fonctionnelle scalaire en deux dimensions. La méthode de la charge adaptée est utilisée pour tracer la courbe du coefficient de réflexion en fonction de ϵ_r . Le résultat est comparé à celui de Marcuvitz[31](figure 7.10). On trouve une résonance près de $\epsilon_r = 120$. La répartition de champ électrique à la résonance est montrée dans la figure 7.11.



ligne continue: Méthode de la charge adaptée , ligne pointillée: Marcuvitz Handbook

Figure 7.10: Coefficient de réflexion du barreau diélectrique

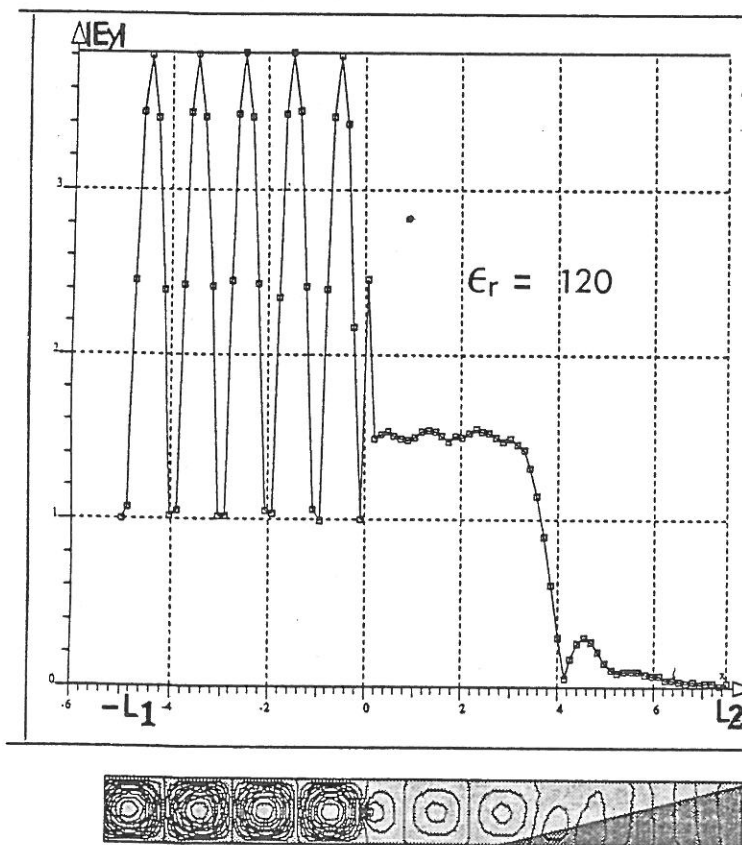


Figure 7.11: Répartition du champ électrique dans le guide rectangulaire chargé par un barreau diélectrique

7.4 Conclusion

Une nouvelle méthode: la méthode de la charge adaptée, est proposée pour mesurer directement le coefficient de réflexion d'un composant hyperfréquence par la méthode des éléments finis. Cette méthode est particulièrement avantageuse au point de vue du calcul de transfert de l'énergie d'un système, surtout quand on s'intéresse au comportement d'un seul accès en fonction de plusieurs paramètres physiques du système. Par rapport à la méthode matricielle on n'a pas besoin de définir un mode d'excitation normalisé, celui-ci étant assez difficile à trouver pour des modes compliqués. Au niveau du temps de calcul cette méthode est aussi très intéressante. Dans l'exemple du guide d'onde à iris, il suffit de résoudre une fois le système pour trouver le coefficient de réflexion par la méthode de la charge adaptée, tandis que par la méthode matricielle il faut résoudre deux fois le système et faire deux fois l'intégration pour trouver les éléments de la matrice. Il sera plus coûteux pour le système à n -entrées. C'est pour cela qu'on va continuer d'emprunter cette méthode dans le chapitre suivant pour modéliser l'excitateur de plasma. Néanmoins la méthode matricielle reste une méthode complète avec laquelle on peut trouver tous les éléments de la matrice $[z]$, $[y]$ et $[s]$, donc une connaissance complète du système.

Partie III

Application à la modélisation d'excitateur de plasma

Après l'application et la vérification du logiciel des éléments finis sur les différentes structures hyperfréquences classiques, nous commençons, dans la dernière partie (chapitre 8, chapitre 9), la modélisation de l'excitateur de plasma; ce dernier est considéré comme un diélectrique sans ou avec perte (non-collisionnel ou collisionnel). Le modèle de l'excitateur de plasma est décrit dans le huitième chapitre. Les modes de propagation fondamentaux dans les deux guides d'onde de l'excitateur sont montrés. Les approches qualitatives sont faites pour optimiser le transfert de l'énergie. L'analyse du champ à la jonction ne peut s'effectuer que par la méthode numérique. Dans le dernier chapitre, le modèle de l'excitateur est simplifié en deux dimensions. Avant d'utiliser la méthode des éléments finis pour modéliser l'excitateur, nous recalculons par la méthode analytique les modes de propagation du modèle simplifié et les comparons aux ceux du modèle original pour justifier notre simplification. Avec la méthode des éléments finis, nous voyons que le mode de plasma est excité, accompagné d'un mode supplémentaire *TEM*. Le mode de plasma correspond à celui trouvé par la méthode analytique. Afin de comprendre le couplage de l'énergie, le coefficient de réflexion à l'entrée de l'excitateur est calculé en fonction de plusieurs paramètres physiques pour le cas non-collisionnel et collisionnel.

Chapitre 8

Excitateur de plasma

8.1 Introduction

L'utilisation de l'énergie hyperfréquence pour créer des plasmas s'est développée pendant ces dernières années. Bien qu'il existe déjà de nombreuses applications de ces plasmas (traitement de surface, analyse chimique par exemple), il est très difficile de trouver une modélisation complète du système en raison de la multiplicité des paramètres électromagnétiques et ceux de la décharge.

Pour modéliser effectivement les phénomènes des décharges[43] il faut résoudre trois types de problèmes:

1. L'adaptation de la structure de couplage au générateur

Il s'agit en effet du transfert d'énergie du générateur au plasma. Pour être en mesure de réaliser cette adaptation il faut connaître l'impédance de la structure d'excitation, c'est à dire la répartition de l'énergie dans le système et une description du plasma créé. Dès que l'impédance est connue, la mise au point de l'adaptateur se fera à partir des méthodes classiques utilisées en circuit électrique.

2. La détermination de la répartition de l'énergie dans le système de décharge

Cette répartition s'obtient en résolvant les équations de Maxwell dans les différents milieux du système, ce qui implique la connaissance des caractéristiques de la décharge.

3. La description du plasma créé

On peut obtenir des caractéristiques de la décharge telles que la distribution des différentes espèces de particules (électron, ion, neutre) et leur énergie à partir des équations macroscopiques du plasma à condition que la valeur du champ électrique et sa distribution soient connues.

Dans la pratique, ces trois problèmes sont couplés et de ce fait le problème global est pratiquement insoluble. La méthode de résolution consiste donc à faire un certain nombre d'hypothèses permettant de découpler les divers aspects du problème. Les deux derniers problèmes mentionnés ci-dessus ont été étudiés dans de nombreuses thèses tant expérimentales que théoriques [44][46][45]. Ce chapitre et le chapitre suivant sont consacrés à l'étude du couplage de l'énergie du générateur au plasma, problème très peu abordé sur le plan théorique. On commence par les approches analytiques classiques en essayant de connaître respectivement la répartition de champs dans les deux guides d'onde de l'excitateur (figure 8.1). Après avoir examiné la répartition de champ dans les deux guides, quelques propositions sont faites pour améliorer le couplage entre les deux guides. Sous certaines hypothèses on essaye de trouver la répartition de champ à la jonction. Les résultats vont permettre de mettre en évidence la possibilité du couplage entre les deux guides. Ensuite la méthode des éléments finis est utilisée pour modéliser l'excitateur. Un modèle simplifié en deux dimensions est calculé en fonction de nombreux paramètres de l'excitateur afin d'optimiser le couplage

8.2 Principe de décharge microonde

Utilisée depuis longtemps au Laboratoire de Physique de Gaz et Plasma(Université de Paris XI), la structure montrée dans la figure 8.1, appelée excitateur, a pour but de créer un plasma. Un guide d'onde rectangulaire alimenté par un générateur de microondes est couplé perpendiculairement au centre à un guide circulaire de rayon

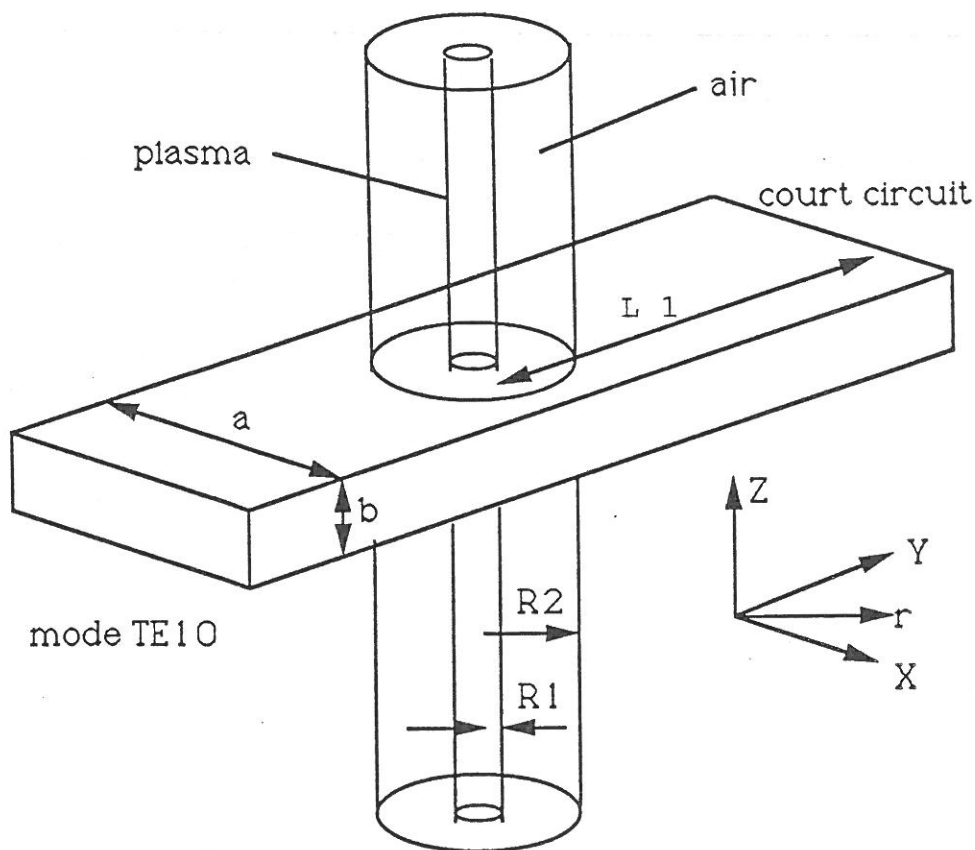


Figure 8.1: Excitateur du plasma

R_2 . On place parallèlement à l'axe du guide circulaire un tube de quartz dans lequel le gaz sera ionisé. Pour simplifier, nous supposons que l'épaisseur du quartz est nulle et le rayon du tube de quartz R_1 est le rayon du plasma. Un court circuit est installé au bout du guide rectangulaire afin de régler le couplage d'énergie.

Le principe de cette décharge microonde est lié à la propagation d'une onde de

surface dans le guide circulaire. L'onde de surface est un mode propre du plasma, elle ne se propage pas en l'absence de ce dernier. La puissance délivrée par le générateur microonde est transmise du guide d'onde rectangulaire au guide circulaire. Si cette puissance est suffisante, l'onde ionise le gaz à la jonction, puis il y a propagation de l'onde de surface et simultanément ionisation du gaz. L'énergie microonde crée ainsi son propre milieu de propagation. Au fur et à mesure de l'ionisation, l'onde perd de sa puissance. La propagation s'arrête lorsque la puissance n'est plus suffisante pour permettre d'atteindre la densité électronique de coupure de l'onde. Un des paramètres les plus importants de ce système est le coefficient de couplage, c'est à dire le pourcentage de l'énergie couplée au guide circulaire à partir du guide rectangulaire.

La création et l'entretien d'une décharge par une onde de surface constituent un ensemble de phénomènes complexes. Les caractéristiques du plasma dépendent étroitement de celles de l'onde, et inversement. La distribution de la densité électronique dans le plasma détermine la répartition du champ électromagnétique. Les travaux effectués précédemment concernent principalement l'étude du plasma et non le couplage de l'énergie. Pour bien comprendre le rôle de chaque paramètre de l'excitateur dans le couplage d'énergie, l'analyse théorique devient nécessaire afin d'obtenir des résultats satisfaisants.

Pour aborder le problème il faut introduire la permittivité relative du plasma ϵ_p , grandeur qui lie les champs électromagnétiques aux paramètres du plasma. D'une manière générale, le plasma est décrit comme un diélectrique avec une permittivité tensorielle[47]. Pour notre étude plusieurs hypothèses peuvent être faites:

- le plasma est globalement neutre;
- le champ magnétique extérieur de polarisation est nul;
- le plasma est froid, c'est à dire que la force due au gradient de pression cinétique est négligeable devant la force électrique.

Le milieu plasma devient isotrope, la permittivité est réduite à une grandeur scalaire:

$$\epsilon_p = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + j\nu)} \quad (8.1)$$

où ω_p est la pulsation plasma électronique donnée par la relation:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}} \quad (8.2)$$

e et m étant respectivement la charge et la masse de l'électron, n la densité électronique moyenne dans une section de la colonne, ν la fréquence de collision électro-neutre pour le transfert de la quantité de mouvement. Lorsque ν est très faible devant ω , la relation (8.1) s'écrit alors:

$$\epsilon_p \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (8.3)$$

On remarque que la permittivité du plasma peut être négative, ce qui sera le cas pour l'étude de la propagation de l'onde de surface.

8.3 Modes de propagation dans l'excitateur

Pour comprendre le couplage entre les deux guides(cf. figure 8.1), la connaissance des modes de propagation dans chacun de ces deux guides est nécessaire. Ce sont deux problèmes aux valeurs propres à deux dimensions qui peuvent être résolus analytiquement. Nous allons décrire successivement les modes de propagation dans les deux guides. A la jonction, les modes supérieurs de deux guides se superposent pour satisfaire les conditions aux limites. Il est très difficile de l'analyser par la méthode analytique. Nous donnons simplement quelques remarques qualitatives pour améliorer le couplage.

8.3.1 Modes dans le guide d'onde rectangulaire

Dans le guide d'onde rectangulaire, les modes de propagation peuvent être du type TE_{mn} et TM_{mn} . On choisit la dimension transversale du guide et la fréquence

d'excitation de telle façon qu'il ne se propage que le mode fondamental TE_{10} . Si l'on place un court-circuit au bout du guide, une onde stationnaire est créée. Les expressions des champs dans les coordonnées de la figure 8.1 sont:

$$H_y = 2H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\beta_y y) \quad (8.4)$$

$$E_z = 2j \frac{\omega \mu_0 a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\beta_y y) \quad (8.5)$$

$$H_x = -2j \frac{\beta_y a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\beta_y y) \quad (8.6)$$

β_y étant le nombre d'onde du guide rectangulaire dans la direction Y . On schématise la répartition des champs dans la figure 8.2: dans (a) les anneaux désignent le champ magnétique, les points et les croix désignent le champ électrique, dans (b) on montre la répartition de champ électrique. En réglant le court-circuit on change la forme et la position de chaque anneau (champ magnétique) et ainsi celles du champ électrique.

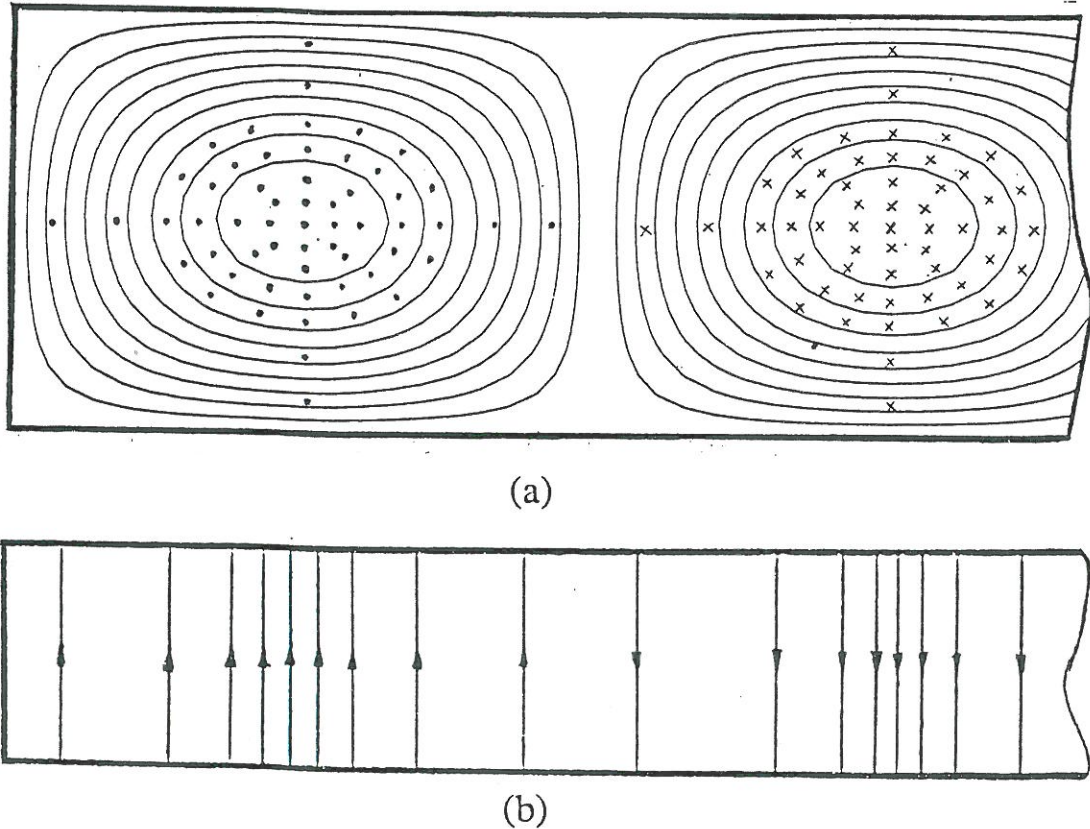


Figure 8.2: Répartition de champ du mode TE_{10}

8.3.2 Modes dans le guide de plasma

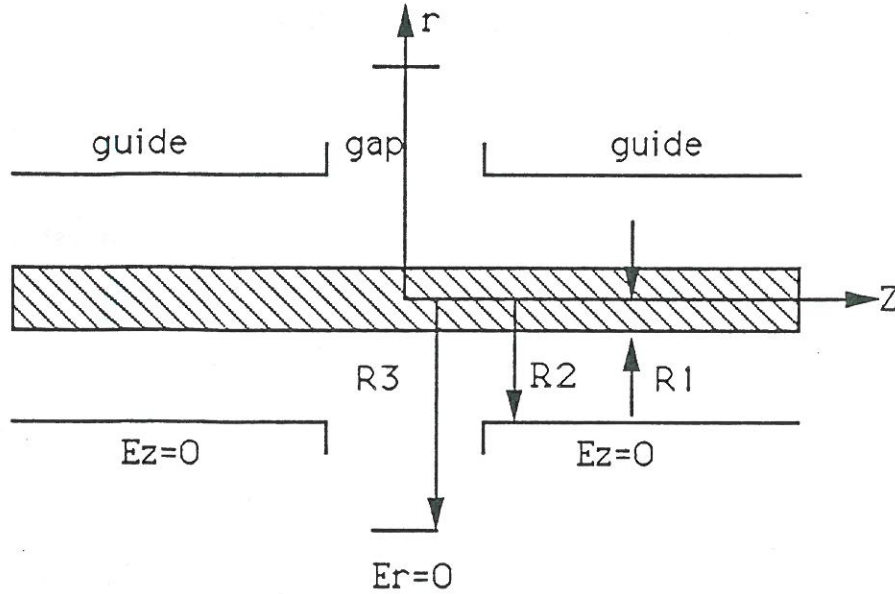


Figure 8.3: Modèle du guide de plasma (au gap et dans le guide)

Pour calculer les modes dans le guide de plasma, nous donnons son modèle dans la figure 8.3. Nous voyons que le modèle est divisé en deux parties: la partie du guide fermé par la métallique et la partie de la jonction de deux guides, appelé aussi le "gap" dont la condition aux limites sera discutée plus loin.

Dans le guide circulaire chargé par le plasma, la répartition de champ devient très compliquée à cause de l'inhomogénéité des milieux. Etant généralement du type hybride en présence de deux composantes longitudinales E_z et H_z [46], les modes peuvent se décomposer dans certains cas en TE_{mn} et TM_{mn} . Ecrivons E_z et H_z en coordonnées cylindriques (r, ϕ) :

$$E_z(r, \phi) = F_E(r) e^{jm\phi} e^{-\gamma_z z} \quad (8.7)$$

$$H_z(r, \phi) = F_H(r) e^{jm\phi} e^{-\gamma_z z} \quad (8.8)$$

où γ_z est la constante de propagation dans le guide d'onde circulaire.

Les équations de propagation deviennent:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF_E}{dr} \right) + \left(k_c^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) F_E = 0 \quad (8.9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF_H}{dr} \right) + \left(k_c^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) F_H = 0 \quad (8.10)$$

Ce sont des équations différentielles semblables dont la solution est une combinaison de deux fonctions de Bessel (première et deuxième espèce). Dans chaque milieu du guide circulaire les composantes E_z et H_z s'écrivent :

- Dans le plasma

$$E_z = A_E J_m(k_{cp} r) e^{jm\phi} e^{-\gamma_z z} \quad (8.11)$$

$$H_z = A_H J_m(k_{cp} r) e^{jm\phi} e^{-\gamma_z z} \quad (8.12)$$

$$k_{cp}^2 = \epsilon_p k_0^2 + \gamma_z^2$$

$$0 \leq r \leq R_1$$

- Dans l'air

$$E_z = B_E J_m(k_c r) e^{jm\phi} + C_E H_m^{(1)}(k_c r) e^{jm\phi} e^{-\gamma_z z} \quad (8.13)$$

$$H_z = B_H J_m(k_c r) e^{jm\phi} + C_H H_m^{(1)}(k_c r) e^{jm\phi} e^{-\gamma_z z} \quad (8.14)$$

$$k_c^2 = k_0^2 + \gamma_z^2$$

$$R_1 \leq r \leq R_2$$

Dans chaque milieu les composantes transversales $\vec{E}_t$ et $\vec{H}_t$ se déduisent de E_z et H_z par les expressions suivantes:

$$E_r = -\frac{\gamma_z}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} + m\omega \frac{\mu_0}{k_c^2} \frac{H_z}{r} \quad (8.15)$$

$$E_\phi = -jm \frac{\gamma_z}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{r} + j\omega \frac{\mu_0}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (8.16)$$

$$H_r = -m\omega \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{k_c^2} \frac{E_z}{r} - \frac{\gamma_z}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (8.17)$$

$$H_\phi = -j\omega \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} - jm \frac{\gamma_z}{k_c^2} \frac{H_z}{r} \quad (8.18)$$

en utilisant dans chaque milieu k_c correspondant. Nous pouvons noter que les paramètres du plasma (ω_p, ν) interviennent dans k_{cp} par l'intermédiaire de ϵ_p . En écrivant la continuité des composantes tangentielles E_z, H_z, E_ϕ et H_ϕ à l'interface $r = R_1$, et en annulant E_z et E_ϕ sur la paroi métallique $r = R_2$, on obtient un système de six équations linéaires sans second membre. Les inconnus de ces six équations sont les constantes $A_E, A_H, B_E, B_H, C_E, C_H$ définies précédemment. L'annulation du déterminant donne l'équation de phase qui relie pour m fixé la constante de propagation $\gamma_z = \alpha_z + j\beta_z$ aux paramètres du guide et du plasma ($R_1, R_2, \omega, \epsilon_p$). Il y a une infinité de solution pour l'équation de phase qui correspond à tous les modes ($TE_{mn}, TM_{mn}, hybride$) du guide circulaire chargé par le plasma.

Nous nous intéressons au mode de plasma dont la vitesse de phase est inférieure à la vitesse de la lumière. Pour simplifier on néglige la fréquence de collision effective ν devant la fréquence de l'onde ω . Par conséquent on néglige l'atténuation de l'onde α_z devant le nombre d'onde β_z . Dans ce cas $\gamma_z = j\beta_z$ est imaginaire, $\epsilon_p = 1 - (\omega_p/\omega)^2$ est réel. Les solutions de l'équation sont alors des combinaisons de fonction de Bessel à argument réel $J_0(k_c r), Y_0(k_c r)$ ou $I_0(k_c r), K_0(k_c r)$. Le mode fondamental de plasma est du type TM à symétrie azimutale possédant trois composantes de champs E_z, E_r, H_ϕ . On réécrit les champs dans chaque milieu:

- Dans le plasma

$$\begin{aligned} E_z &= A_E I_0(k_{cp} r) e^{-j\beta_z z} \\ E_r &= A_E \frac{j\beta_z}{k_{cp}} I_1(k_{cp} r) e^{-j\beta_z z} \\ H_\phi &= A_E \frac{j\omega \epsilon_0 \epsilon_p}{k_{cp}} I_1(k_{cp} r) e^{-j\beta_z z} \\ k_{cp}^2 &= -\epsilon_p k_0^2 + \beta_z^2 \\ 0 &\leq r \leq R_1 \end{aligned}$$

- Dans l'air

$$E_z = B_E I_0(k_{cv} r) + C_E K_0(k_{cv} r) e^{-j\beta_z z}$$

$$\begin{aligned}
E_r &= \frac{j\beta_y}{k_c} [D_E I_1(k_c r) - E_E K_1(k_c r)] e^{-j\beta_z z} \\
H_\phi &= \frac{j\omega\epsilon_0}{k_c} [B_E I_1(k_c r) - C_E K_1(k_c r)] e^{-j\beta_z z} \\
k_c^2 &= -k_0^2 + \beta_z^2 \\
R_1 &\leq r \leq R_2
\end{aligned}$$

Comme il s'agit simplement du mode *TM*, du fait des conditions aux limites du modèle de la figure 8.3, le système de six équations est réduit à trois équations sans second membre[46]. L'annulation du déterminant nous permet de tracer la courbe de phase.

$$\begin{vmatrix}
I_0(k_{cp}R_1) & -I_0(k_cR_1) & -K_0(k_cR_1) \\
\epsilon_p k_c I_1(k_{cp}R_1) & -k_{cp} I_1(k_cR_1) & k_{cp} K_1(k_cR_1) \\
0 & I_0(k_cR_2) & K_0(k_cR_2)
\end{vmatrix} = 0 \quad (8.19)$$

soit:

$$f\left(\beta, \frac{\omega}{\omega_p}\right) = 0 \quad (8.20)$$

La répartition de champ est calculée en fixant le champ longitudinal $E_z = 1$ sur l'axe. La courbe de phase et les variations de champ sont montrés respectivement par "o" dans les figures 8.5, 8.6, 8.7 et 8.8. Le mode étant à symétrie azimutale, on peut montrer la répartition de champ sur une section longitudinale du guide plasma, calculée par la méthode des éléments finis à deux dimensions.

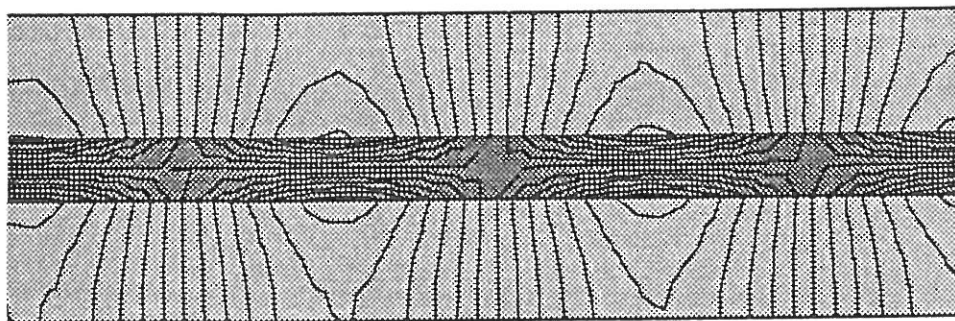
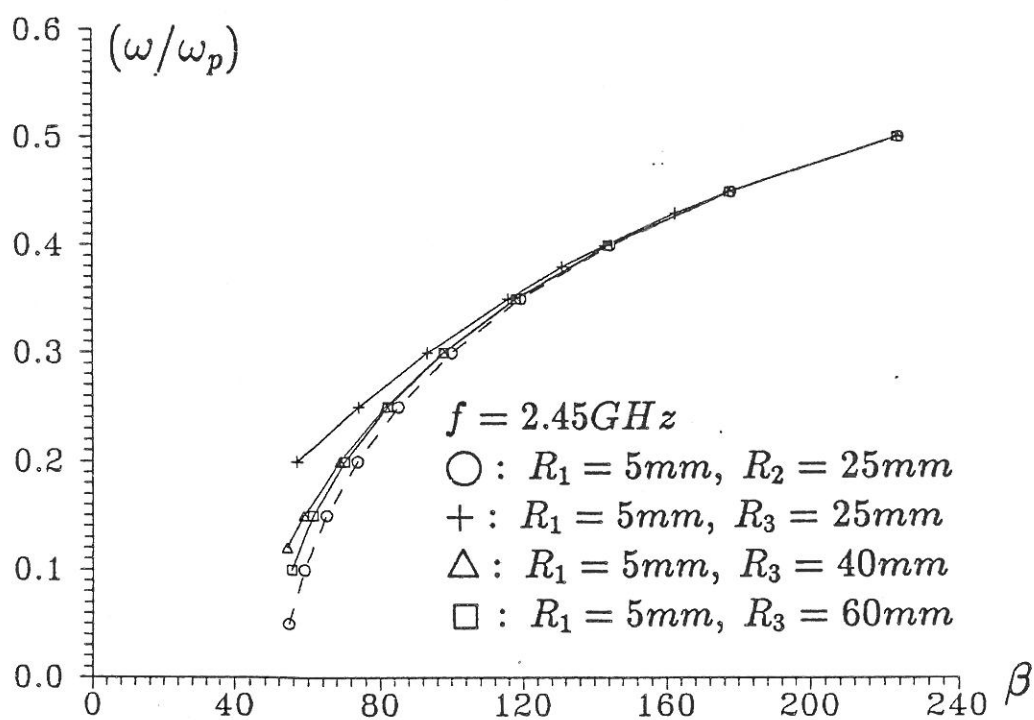
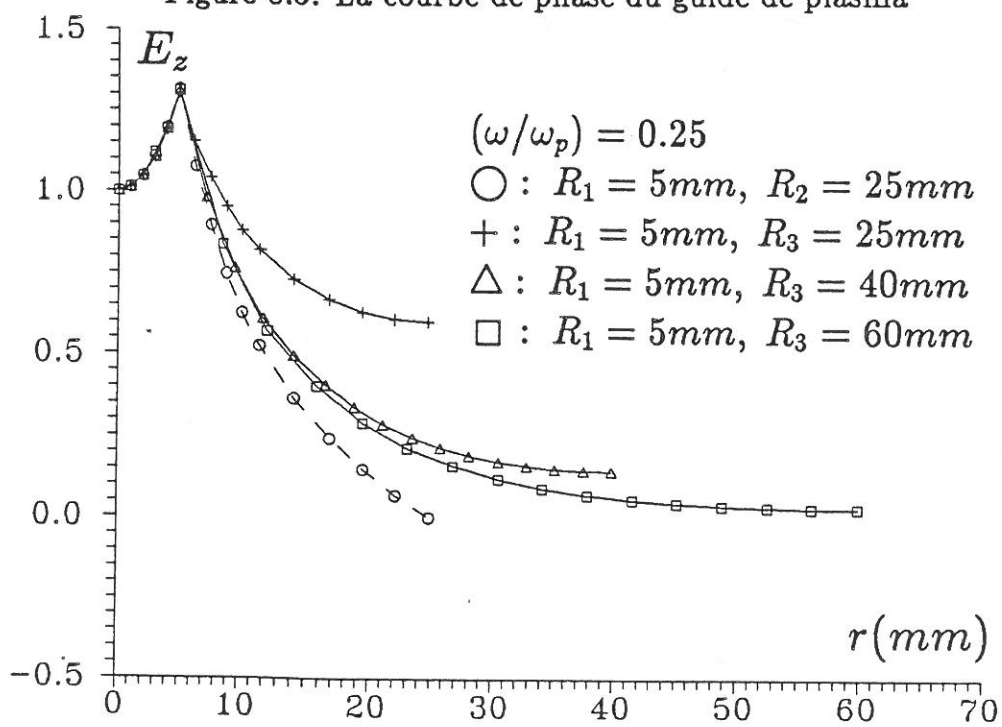


Figure 8.4: Le champ électrique dans le guide de plasma



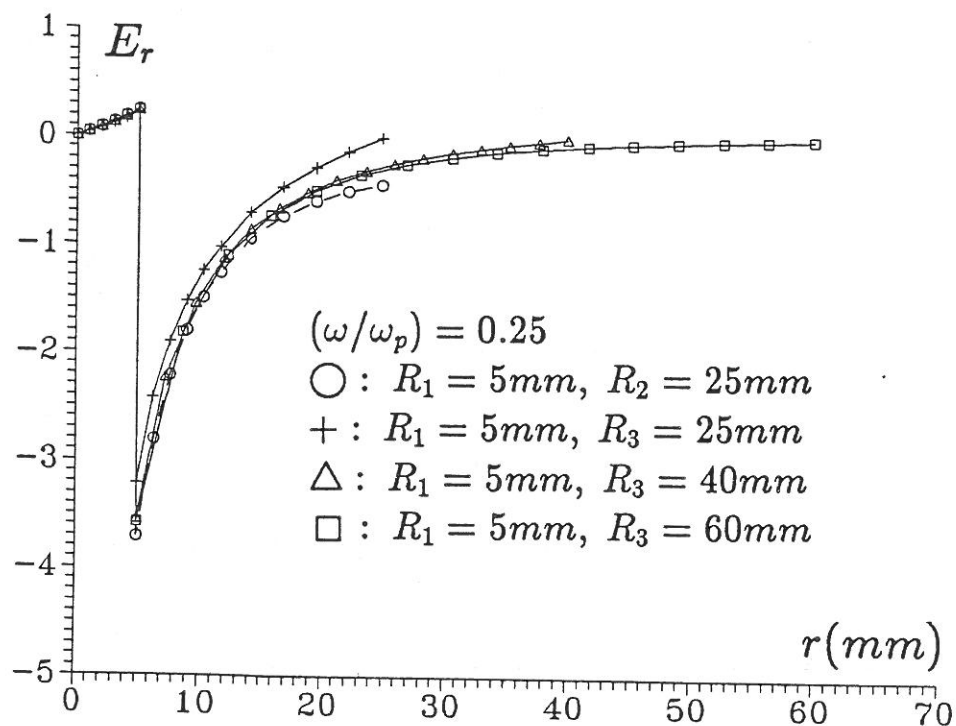
ligne continue: au gap; ligne pointillée: dans le guide

Figure 8.5: La courbe de phase du guide de plasma



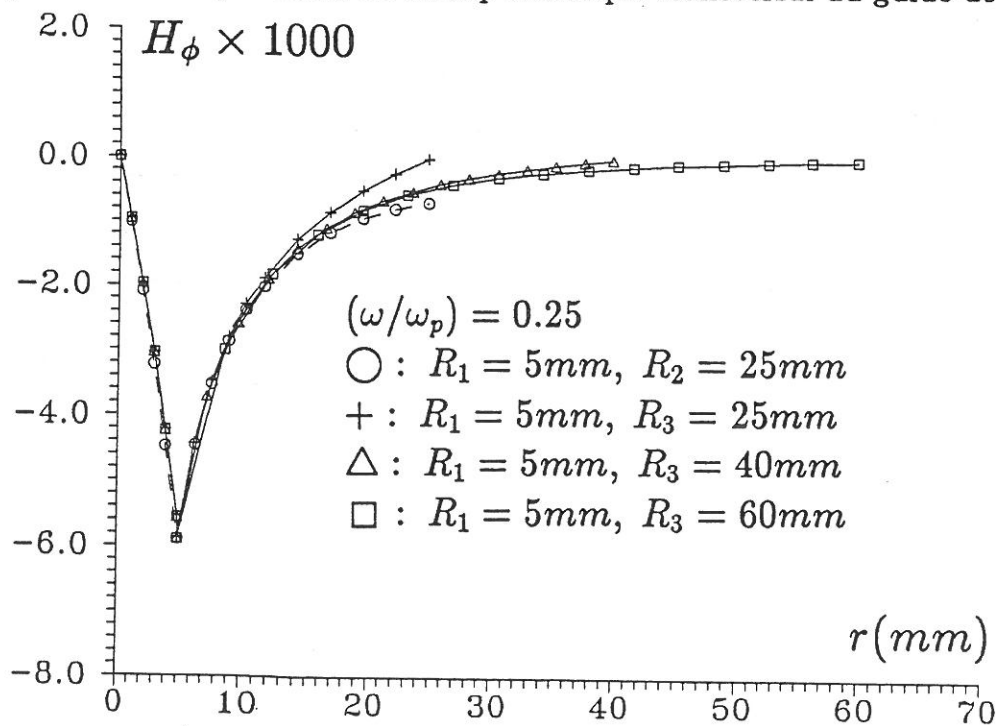
ligne continue: au gap; ligne pointillée: dans le guide

Figure 8.6: La répartition du champ électrique longitudinal du guide de plasma



ligne continue: au gap; ligne pointillée: dans le guide

Figure 8.7: La répartition du champ électrique transversal du guide de plasma



ligne continue: au gap; ligne pointillée: dans le guide

Figure 8.8: La répartition du champ magnétique transversal du guide de plasma

8.4 Approche qualitative pour optimiser le couplage

La répartition de champ est très compliquée à la jonction de deux guides, soit au "gap" de l'excitateur, l'analyse complète du champ par la méthode classique est pratiquement impossible. Malgré cela, la répartition de champ dans les deux guides que nous avons trouvée précédemment nous permet de faire quelques remarques qualitatives concernant la qualité du couplage entre les deux guides.

1. On peut déplacer le court circuit du guide rectangulaire pour qu'un des maximum du champ électrique (figure 8.2(b)) coïncide avec l'axe du guide circulaire (figure 8.4). De cette manière, l'énergie du guide rectangulaire sera mieux couplée au guide circulaire, ceci se produit lorsque la position du court circuit est $L_1 = n\lambda_g/4$.
2. Etant donné que le mode de plasma du guide circulaire est à symétrie azimutale, chaque anneau du mode TE_{10} (figure 8.2(a)) dans le guide rectangulaire sera réglé afin d'approcher le mieux possible la symétrie azimutale du mode plasma dans le guide circulaire. Cela se réalise en choisissant $a = \lambda_g/2$, c'est à dire que $\lambda = \sqrt{2}a$. Cette condition de symétrie est presque réalisée actuellement avec les guides d'onde industriels. Par exemple avec une fréquence d'excitation $f = 2.45GHz$, on devrait utiliser un guide rectangulaire de dimension $a = 86.3mm$. C'est exactement la dimension du guide utilisée au laboratoire.
3. Avec les deux conditions d'optimisation proposées, une onde stationnaire centrée autour du plasma est créée au niveau du guide de plasma. Pour obtenir un bon couplage, il faut qu'au niveau du "gap" la distribution du champ dans les deux guides de propagation soit la plus identique possible. Dans le guide rectangulaire le champ électrique est uniquement dans la direction z , ce qui correspond à un champ E_z non nul à une distance R_3 au "gap" (figure 8.3). Pour le mode de plasma, il y a aussi certaines positions (voir figure 8.4) où seulement

la composante E_r présente. Le modèle de l'excitateur au "gap" est ainsi proposé dans la figure 8.3. Les deux hypothèses suivantes sont faites:

$$E_z = \text{const en } R_3$$

$$E_r = 0 \text{ en } R_3$$

Les expressions des champs au "gap" sont les mêmes que celles dans le guide. En imposant les conditions de continuité à l'interface de plasma et la condition $E_r = 0$ sur un rayon R_3 , on aboutit à un système de trois équations sans second membre dont le déterminant s'écrit:

$$\begin{vmatrix} I_0(k_{cp}R_1) & -I_0(k_cR_1) & -K_0(k_cR_1) \\ \epsilon_p k_c I_1(k_{cp}R_1) & -k_{cp} I_1(k_cR_1) & k_{cp} K_1(k_cR_1) \\ 0 & I_1(k_cR_3) & -K_1(k_cR_3) \end{vmatrix} = 0 \quad (8.21)$$

En effet, par rapport au déterminant (8.19) la condition $E_{z(r=R_3)} = 0$ dans la troisième ligne est remplacée par la condition $E_{r(r=R_3)} = 0$. La supposition $E_{r(r=R_3)} = 0$ est possible car au delà d'un certain rayon, loin de la zone de discontinuité du "gap", E_z du guide plasma se confond avec E_z du guide rectangulaire.

On calcule la courbe de phase et les variations de champ au "gap" pour des rayons R_3 différents. Les résultats obtenus au "gap" sont mis dans les mêmes figures que ceux du guide de plasma (figures 8.5, 8.6, 8.7, 8.8), représentés respectivement par "+" (pour $R_3 = 25mm$), " $\triangle$ " (pour $R_3 = 40mm$) et " $\square$ " (pour $R_3 = 60mm$). La figure 8.5 donne la relation entre ω/ω_p et β ; on remarque que les courbes possèdent la même allure. Les courbes de phase au "gap" et dans le guide se rejoignent pour le rapport (ω/ω_p) élevé qui correspond à des densités électroniques faibles. Ce n'est pas le point de fonctionnement de l'excitateur. Dans la zone du faible rapport (ω/ω_p) , lorsque R_3 augmente la courbe de phase calculée au gap se rapproche de celle du guide circulaire. Les figures 8.6, 8.7 et 8.8 représentent respectivement la répartition des champs E_z, E_r, H_ϕ . La condition de normalisation des champs est : $E_z(r = 0) = 1$. Les résultats calculés

au "gap" se rapproche de ceux calculés dans le guide circulaire pour R_3 élevé . On obtient la même tendance que pour la courbe de phase. Ceci montre que le passage du mode de plasma au guide est tout à fait possible. Pour favoriser ce passage il faudrait construire le 'gap' de manière que le champ E_z soit constant sur un rayon suffisamment large. Dans la pratique on peut rétrécir le petit côté b et élargir le grand côté a du guide rectangulaire.

En conclusion, les bons couplages obtenus expérimentalement sont sans doute dus à cette possibilité d'avoir une continuité entre le mode de guide avec uniquement la composante électrique E_z et le mode de plasma avec les deux composantes E_z et E_r . Cette approche est purement qualitative; le chapitre suivant est consacré à une étude d'un coupleur simplifié par la méthode des éléments finis.

Chapitre 9

Modélisation de l'excitateur de plasma à deux dimensions

Pour modéliser l'excitateur présenté dans le chapitre précédent, il serait nécessaire de résoudre le problème en trois dimensions. En raison de la complexité du problème, il nous a paru intéressant de traiter un problème plus simple mais qui pourra néanmoins nous donner des résultats permettant de mieux comprendre les excitateurs réels. Dans ce chapitre nous allons utiliser la méthode des éléments finis pour calculer la répartition de champ de l'excitateur afin d'optimiser le transfert de l'énergie au plasma.

9.1 Modèle simplifié à deux dimensions

L'analyse des champs effectuée dans le paragraphe 8.3 nous montre que les modes de propagation dans les deux guides de l'excitateur possèdent une symétrie par rapport au plan Y-Z (figure 8.1). Nous pouvons donc simplifier la structure à trois dimensions en une structure à deux dimensions tout en respectant le phénomène physique. En coupant l'excitateur dans le plan Y-Z, le modèle simplifié est formé de deux lignes *TEM* couplées perpendiculairement (figure 9.1). La ligne *TEM*, horizontale sur la figure 9.1, représente le guide rectangulaire. La ligne *TEM* verticale sur la figure 9.1

chargée d'une couche de plasma infiniment longue dans la direction X , représente le guide circulaire de plasma. Si l'on excite la ligne TEM "horizontale" par le champ E_z , la répartition de champ sur cette ligne correspond exactement à celle au centre du guide rectangulaire (figure 8.2(b)), sauf la longueur d'onde du mode TE_{10} doit être remplacée par la longueur d'onde de ligne TEM . Pour la ligne "verticale" chargée par le plasma, il faut écrire les expressions de champ dans les différents milieux et imposer les conditions aux limites pour trouver la répartition de champ.

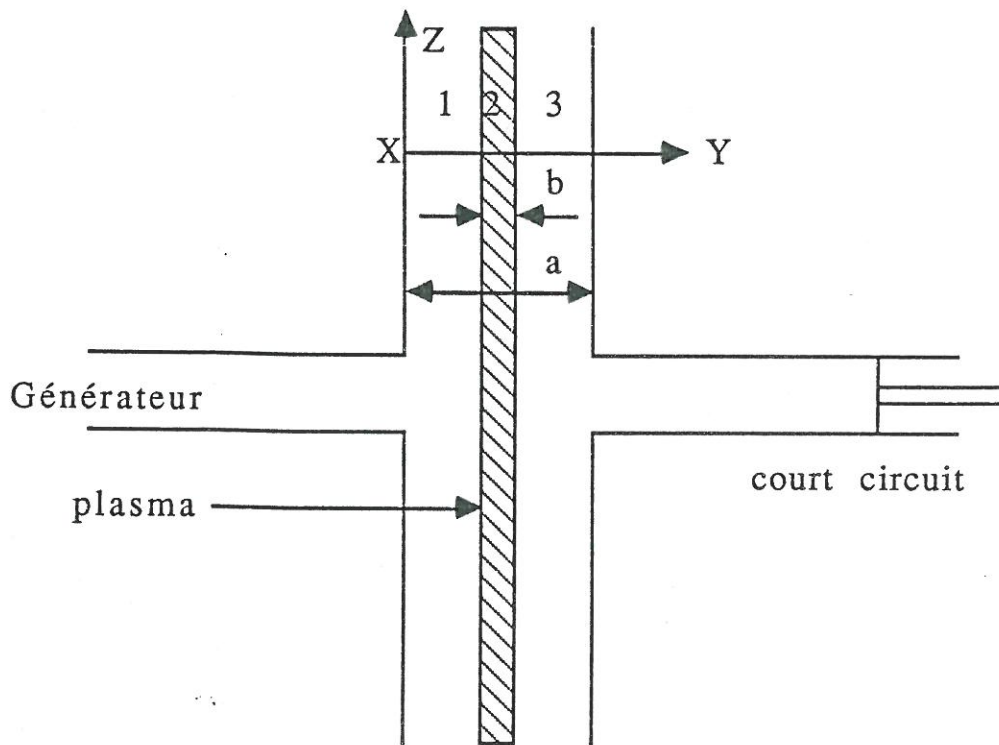


Figure 9.1: Excitateur de plasma simplifié à deux dimensions

9.2 Mode de plasma dans la ligne TEM "verticale"

Pour obtenir les champs dans la ligne de plasma, on détermine d'abord la courbe de phase. En choisissant l'origine des coordonnées sur la paroi métallique gauche de ligne "verticale", l'épaisseur de plasma b et l'épaisseur de ligne TEM a , on écrit les expressions de champ dans les trois zones de la ligne "verticale":

- dans 1:

$$E_{z1} = A \operatorname{sh}(k_{c1}x) \quad (9.1)$$

$$E_{y1} = -j \frac{\beta}{k_{c1}} A \operatorname{ch}(k_{c1}x) \quad (9.2)$$

$$H_{x1} = -j \frac{\omega \epsilon_0}{k_{c1}} A \operatorname{ch}(k_{c1}x) \quad (9.3)$$

$$k_{c1}^2 = \beta^2 - k_0^2$$

- dans 2:

$$E_{z2} = B \operatorname{sh}(k_{c2}x) + C \operatorname{ch}(k_{c2}x) \quad (9.4)$$

$$E_{y2} = -j \frac{\beta}{k_{c2}} [B \operatorname{ch}(k_{c2}x) + C \operatorname{sh}(k_{c2}x)] \quad (9.5)$$

$$H_{x2} = -j \frac{\omega \epsilon_0}{k_{c2}} [B \operatorname{sh}(k_{c2}x) + C \operatorname{ch}(k_{c2}x)] \quad (9.6)$$

$$k_{c2}^2 = \epsilon_p k_0^2 - \beta^2$$

- dans 3:

$$E_{z3} = D \operatorname{sh}[k_{c3}(x-a)] \quad (9.7)$$

$$E_{y3} = -j \frac{\beta}{k_{c3}} D \operatorname{ch}[k_{c3}(x-a)] \quad (9.8)$$

$$H_{x3} = -j \frac{\omega \epsilon_0}{k_{c3}} D \operatorname{ch}[k_{c3}(x-a)] \quad (9.9)$$

$$k_{c3}^2 = \beta^2 - k_0^2$$

En utilisant la condition de continuité aux interfaces des différents milieux, nous obtenons un système de quatre équations. L'annulation de son déterminant nous permet de tracer la courbe de phase (figure 9.2). On fixe l'épaisseur de ligne $a = 50 \text{ mm}$, on calcule la courbe de phase pour trois épaisseurs de plasma différentes $b = 5 \text{ mm}, 10 \text{ mm}, 20 \text{ mm}$. On peut obtenir la répartition de champ en fixant un des coefficients A, B, C dans les expressions de champ. Les résultats sont montrés sur les figures 9.3, 9.4 et 9.5 pour trois (ω/ω_p) différents. On voit bien qu'il existe le mode plasma dans la structure simplifiée à deux dimensions. La courbe de phase et la répartition de champ sont proches de celles du guide circulaire de plasma (figure 8.5, 8.6, 8.7, 8.8). Ces courbes vont nous permettre de tester les résultats trouvés dans le paragraphe suivant par la méthode des éléments finis.

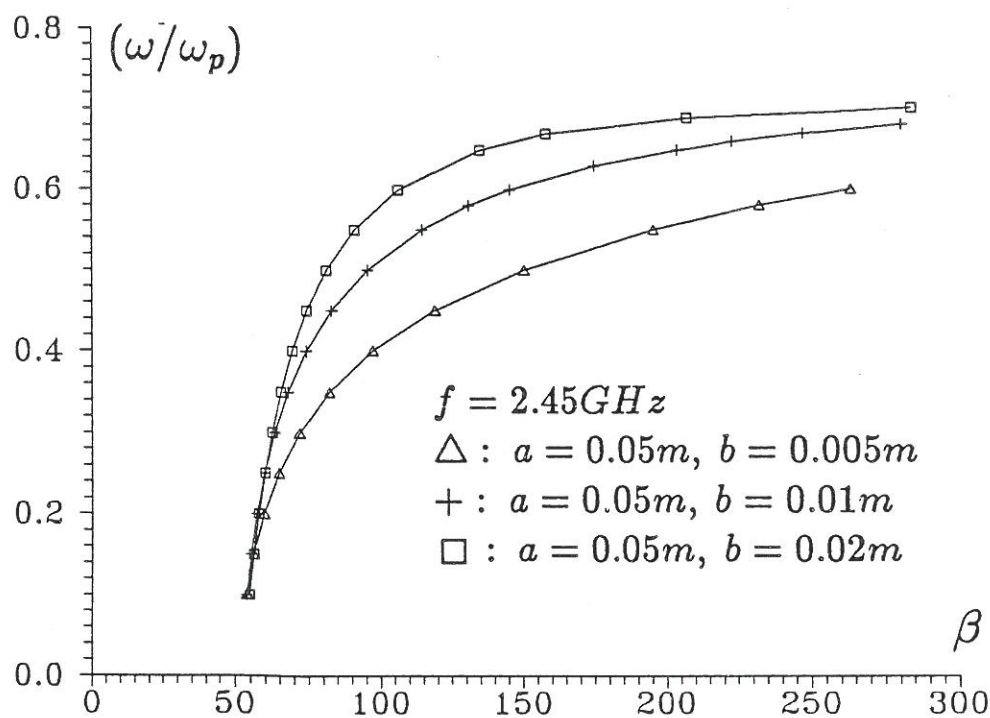


Figure 9.2: La courbe de phase de la ligne de plasma

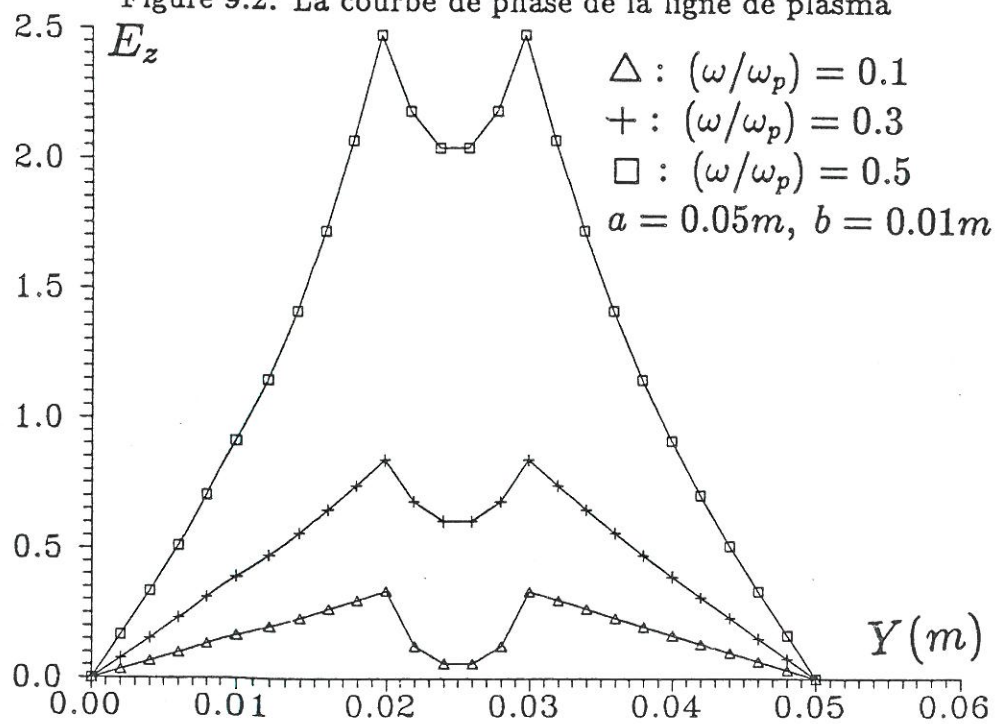


Figure 9.3: La répartition du champ électrique longitudinal de la ligne de plasma

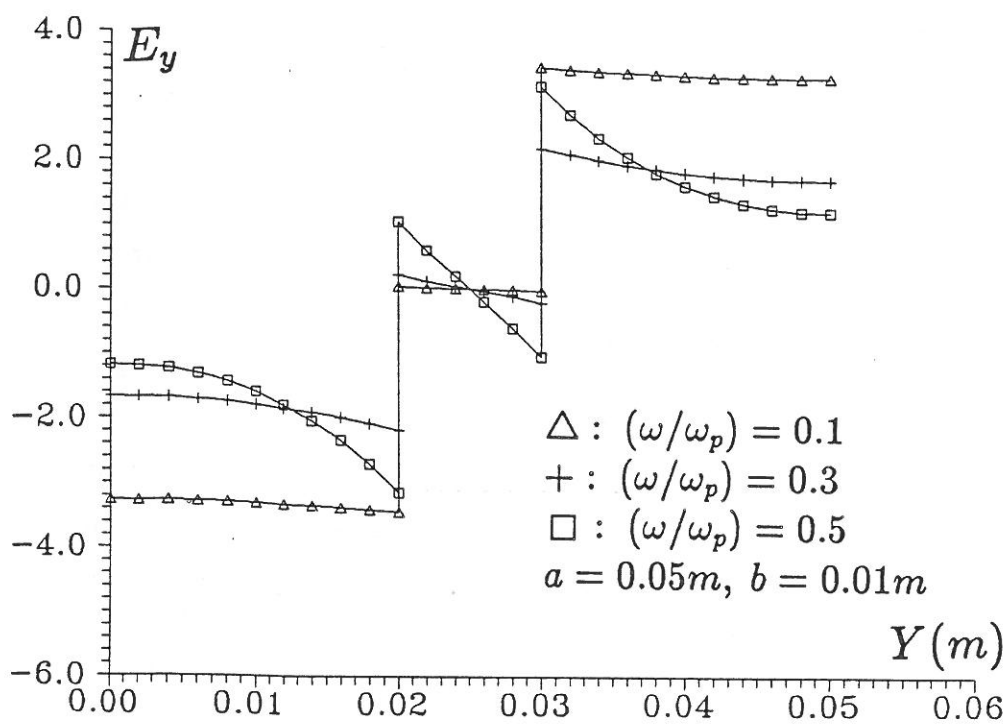


Figure 9.4: La répartition du champ électrique transversal de la ligne de plasma

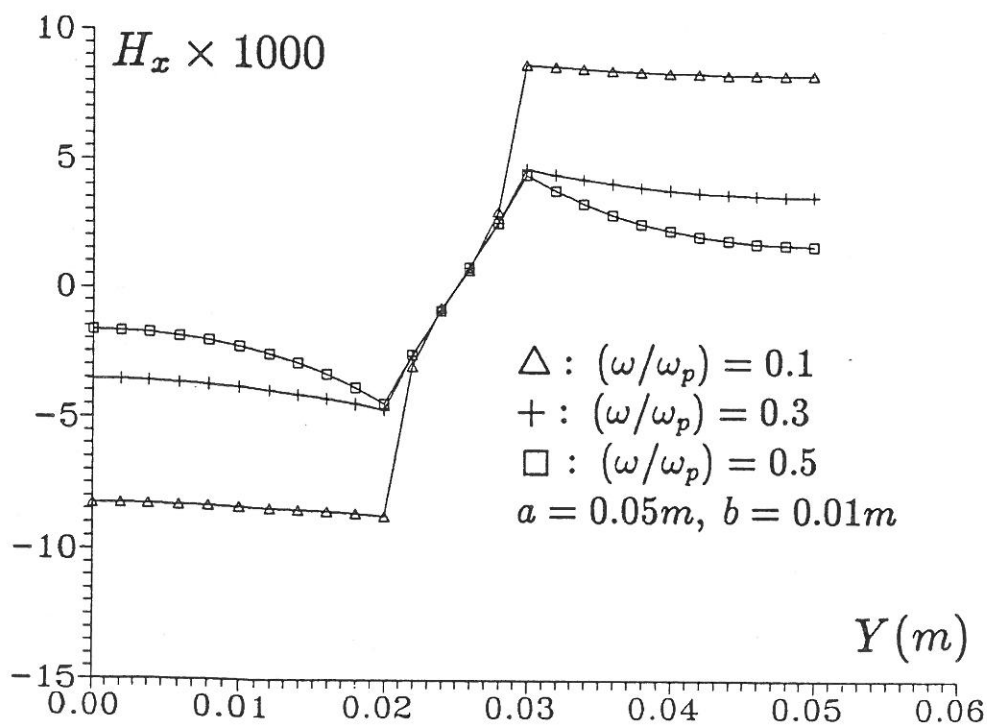


Figure 9.5: La répartition du champ magnétique transversal de la ligne de plasma

9.3 Etude du couplage de l'énergie

On va utiliser le modèle de l'excitateur à deux dimensions pour étudier le couplage de l'énergie en fonction de plusieurs paramètres de l'excitateur. Ce modèle simplifie effectivement l'étude et apporte plusieurs avantages du point de vue du calcul numérique par rapport à son modèle originel à trois dimensions (figure 8.1) : la description de la géométrie devient simple, le nombre de noeuds diminue fortement; l'utilisation de la fonctionnelle scalaire à la place de la fonctionnelle vectorielle exclut les modes non-physiques, le nombre de variables physiques sur chaque noeud est réduit (de 3 à 1). Néanmoins la simplification du modèle apportera un mode supplémentaire qui va gêner notre analyse.

La méthode de la charge adaptée est utilisée pour modéliser l'excitateur simplifié, car nous nous intéressons seulement au coefficient de réflexion à l'entrée de l'excitateur en fonction des autres paramètres physiques. Les modes de propagation dans les deux lignes étant non-hybrides, la fonctionnelle scalaire $F(H_z)$ est choisie pour traiter le problème.

La géométrie de base pour ce travail est décrite sur la figure 9.6(a). Dans les figures 9.6(b) et (c) sont schématisées deux structures légèrement différentes. La ligne *TEM* "horizontale" est excitée par une onde *TEM* dont le champ électrique est dans la direction *Z* et le champ magnétique se trouve dans la direction *X* perpendiculairement au papier. Cette ligne "horizontale" est fermée par un court-circuit(CC1). La ligne "verticale" chargée d'une couche de plasma est fermée en haut par un autre court-circuit(CC2) et terminée en bas par une charge adaptée pour simuler une ligne infiniment longue. Le couplage de l'excitateur est quantifié par le calcul du taux d'onde stationnaire(TOS) à l'entrée de la ligne horizontale. Les paramètres physiques sont assez nombreux; l'optimisation du couplage devrait s'effectuer sur un espace multidimensionnel, mais cela est techniquement difficile et ne nous permet pas de voir clairement le rôle de chaque paramètre. Donc les résultats suivants sont exprimés en fonction d'un seul paramètre physique. Parmi les paramètres que l'on considère les

plus importants vis à vis de l'optimisation de l'excitateur, on compte la position L_1 du court-circuit CC1 de la ligne "horizontale", la position L_2 du court-circuit CC2 de la ligne "verticale", l'épaisseur du plasma W_1 , l'épaisseur de la ligne "verticale" W_2 , la hauteur du rétrécissement de la ligne "horizontale" D_1 , la largeur du rétrécissement de la ligne de plasma D_2 , la valeur de la permittivité relative du plasma ϵ_p .

Dans ce chapitre on fixe: $W_1 = 0.5\text{cm}$, $W_2 = 2.5\text{cm}$, la longueur d'onde d'excitation du laboratoire $\lambda_e = 13\text{cm}$, la permittivité relative de la charge adaptée $\epsilon_{cha} = 3 + j3$.

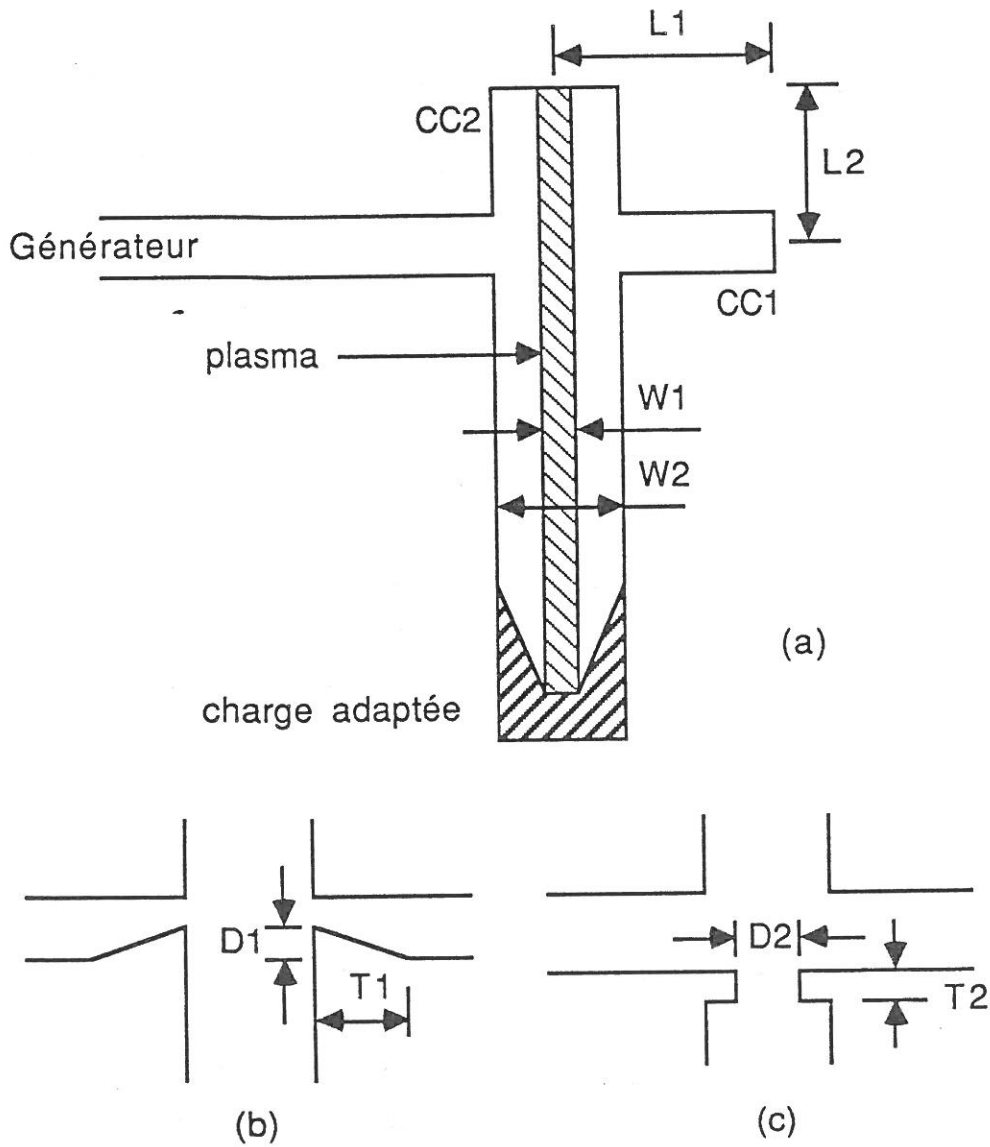


Figure 9.6: Géométrie de travail de l'excitateur à deux dimensions

9.4 Excitation du plasma non-collisionnel

Dans ce cas la permittivité du plasma ϵ_p est purement réelle et négative. On commence l'étude en terminant les deux bouts du guide de plasma par les charges adaptées, c'est à dire qu'on essaye d'exciter une couche de plasma infiniment longue sans CC2(court circuit 2). La répartition de champ électrique est donnée dans la figure

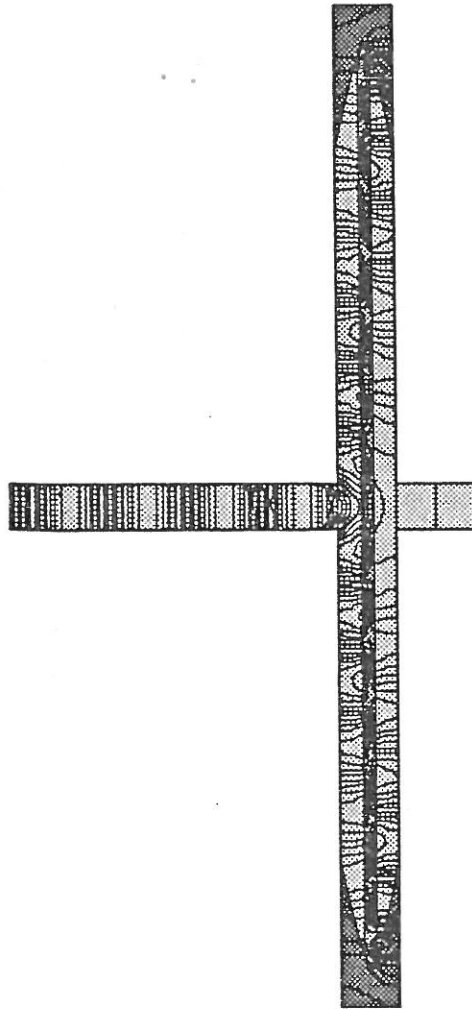


Figure 9.7: La répartition du champ électrique sans CC2

9.7. Une onde est excitée effectivement dans la ligne de plasma avec une répartition de champ dissymétrique. Le champ est plus fort dans la direction du générateur. Malgré une légère amélioration en faveur du couplage de l'énergie, le réglage du CC1 n'arrive pas à provoquer de changement significatif.

En ajoutant et déplaçant le CC2(court circuit 2) l'excitation du mode de plasma est mise en évidence. Les figures 9.8(a)(b)(c)(d) donnent des résultats typiques avec les données suivantes:

$$L_1 = 15cm \quad L_2 = 7.4cm \quad \epsilon_p = -10$$

La figure 9.8(a) montre que l'excitation du mode de plasma est correcte; une répartition de champ électrique régulière et symétrique dans la ligne de plasma. La figure 9.8(b) donne la variation de champ magnétique dans une section (à $z = -20cm$) de la ligne plasma. Il y a tout a fait correspondance avec le résultat trouvé par la méthode analytique(figure 9.5) . La variation longitudinale du champ (figure 9.8(c) sur la parois du plasma) nous permet de calculer la longueur d'onde qui correspond bien à celle du mode plasma. Ces deux courbes(figure 9.8(b) et figure 9.8(c)) confirment la présence d'un mode de plasma dans la structure. La figure 9.8(d) donne le module du champ magnétique dans le guide exciteur , ce qui permet de calculer le TOS par (7.6) et le coefficient de reflexion pour mesurer le transfert d'énergie. Ici le coefficient de reflexion est très élevée.

Nous voyons que le mode de plasma est excité mais avec un mauvais couplage. Nous nous attachons, dans ce qui suit, à améliorer le couplage de l'énergie à ce mode plasma en ajustant les paramètres physiques; autrement dit, il est nécessaire de trouver les rôles de ces paramètres dans le couplage de l'énergie.

Au niveau de la qualité de la charge adaptée, on remarque dans la figure 9.8(c) que le module du champ magnétique est pratiquement constant et on a un coefficient de réflexion est négligéable. Si l'on modifie la longueur de la ligne plasma on doit retrouver le même résultat. La figure 9.9(a)(b) montre que, malgré une prolongation de 10cm, la répartition de champ est identique à celle de la figure 9.8(a)(c). Donc la qualité de la charge adaptée est assurée.

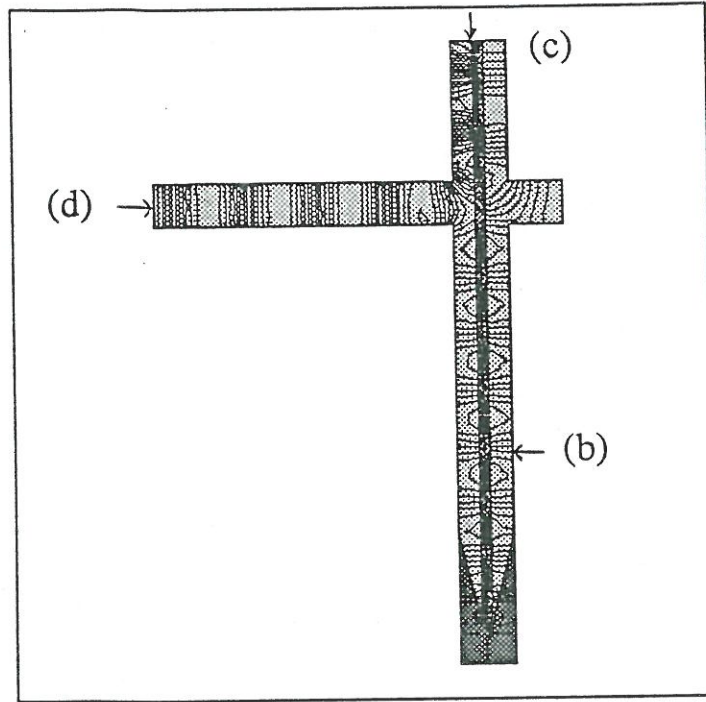


Figure 9.8: (a) La répartition du champ électrique ($L_1 = 7.4cm$, $L_2 = 15cm$, $\epsilon_p = -10$)

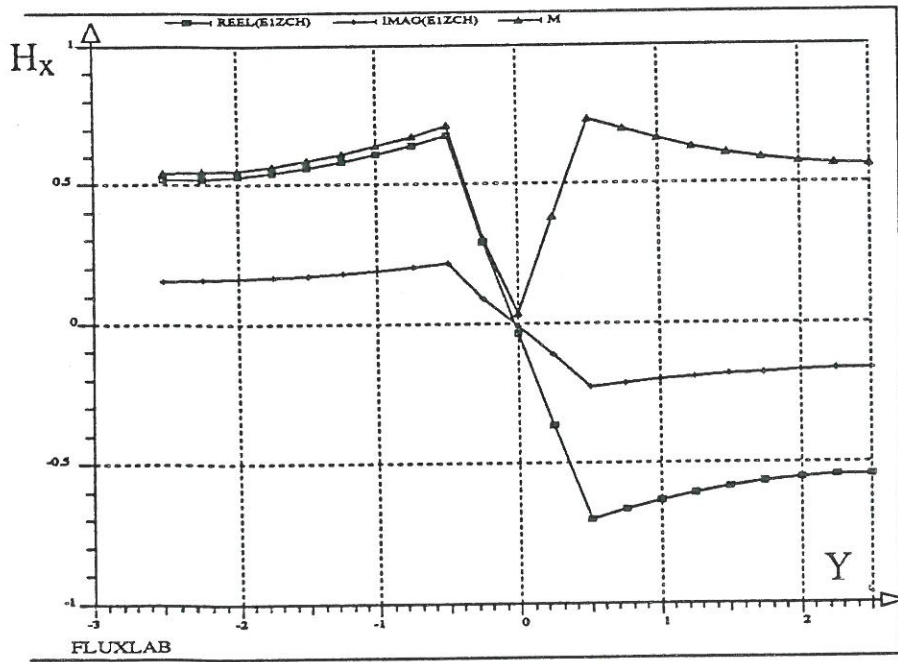


Figure 9.8: (b) La variation transversale du champ magnétique dans la ligne de plasma (à $z = -20cm$)

□: partie réelle, +: partie imaginaire, △: module

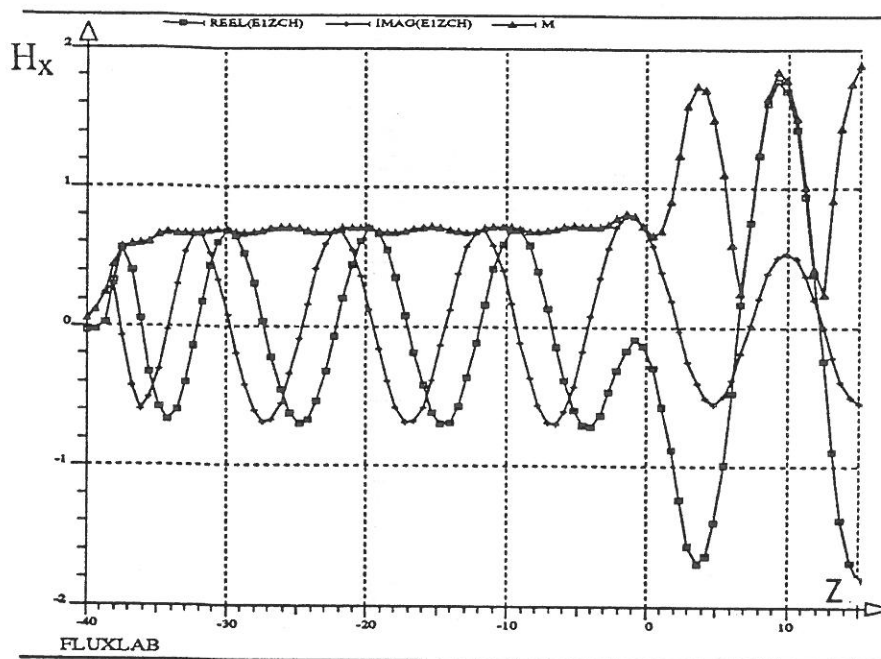


Figure 9.8: (c) La variation longitudinale du champ magnétique dans la ligne de plasma (sur la paroi gauche du plasma)
 $\square$: partie réelle, $+$: partie imaginaire, $\triangle$: module

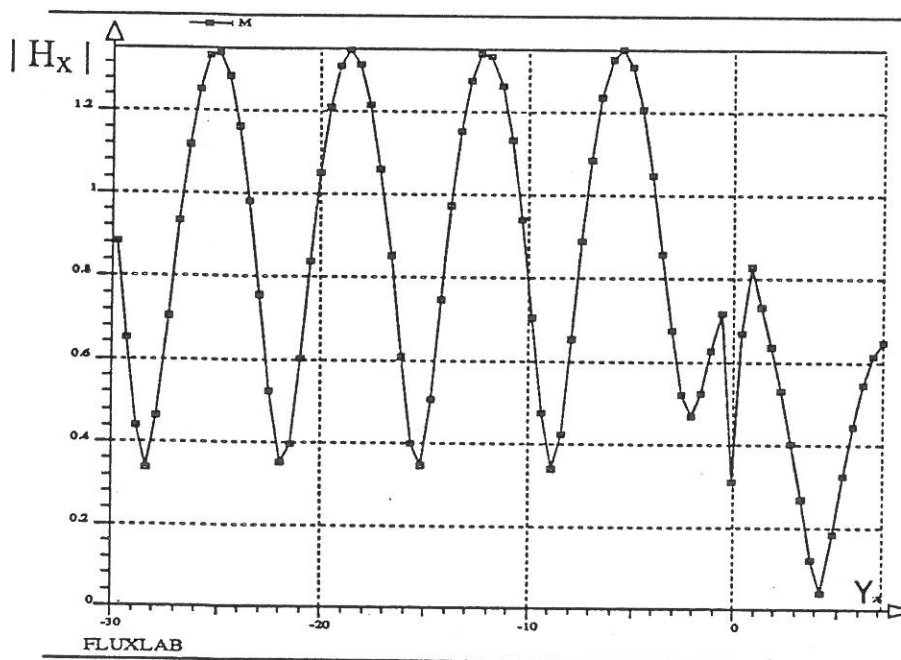


Figure 9.8: (d) Le module du champ magnétique dans la ligne horizontale

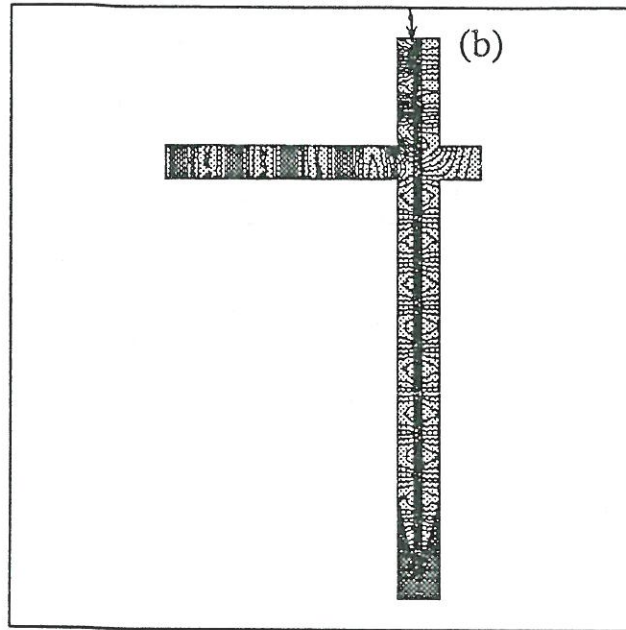


Figure 9.9: (a) La répartition du champ électrique avec une prolongation de la ligne de plasma ($L_1 = 7.4cm$, $L_2 = 15cm$, $\epsilon_p = -10$)

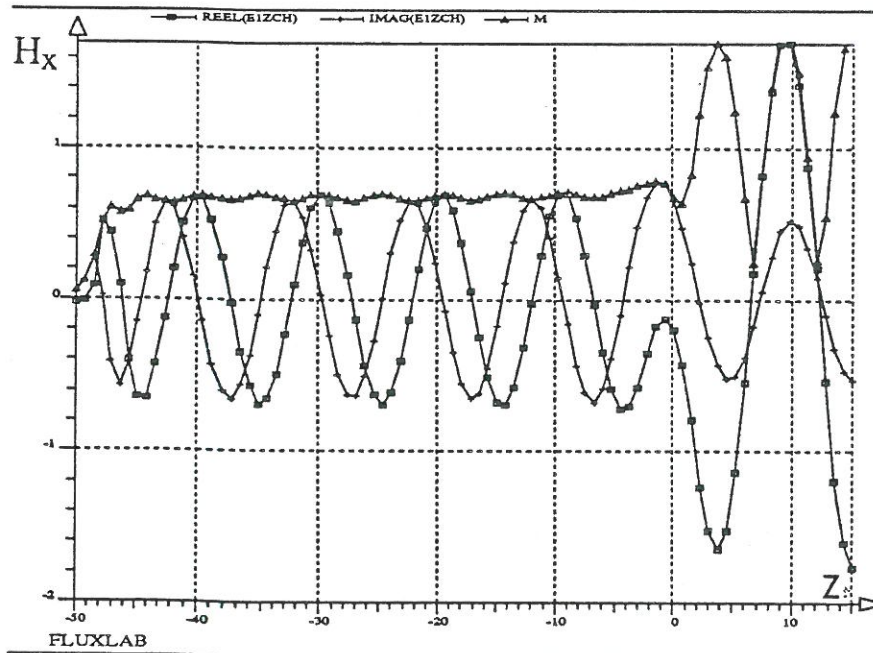


Figure 9.9 : (b) La variation longitudinale du champ magnétique dans la ligne de plasma (sur la paroi gauche du plasma)
 $\square$: partie réelle, $+$: partie imaginaire, $\triangle$: module

Influence des paramètres sur le coefficient de réflexion

Après avoir excité le mode plasma on peut commencer à vérifier les rôles de certains paramètres de l'excitateur dans l'excitation de ce mode et ainsi que dans le couplage de l'énergie. On commence par la structure précédente (figure 9.8(a)) dans laquelle on fait varier un seul paramètre tout en gardant les autres constants.

- Le coefficient de réflexion en fonction de L_1 est tracé dans la figure 9.10. On voit qu'il change périodiquement en fonction de L_1 , la période de cette courbe est approximativement une demi-longueur d'onde d'excitation λ_e . Cette variation périodique apparaît très normale pour le problème de propagation, car la même répartition de champ se retrouve toutes les demi-longueurs d'onde. Au niveau du couplage de l'énergie, l'amélioration apportée par L_1 n'est pas grande.
- Ensuite on fixe $L_1 = 10.25cm$ qui correspond dans la figure 9.10 au minimum du coefficient de réflexion et on fait varier D_1 (pour $T_1 = 5cm$). Avec l'augmentation de D_1 , le coefficient de réflexion diminue légèrement et puis remonte (figure 9.11). Ce paramètre ne permet pas d'améliorer essentiellement le couplage parce que l'augmentation importante de D_1 construit éventuellement un obstacle pour l'énergie incidente.
- Le paramètre D_2 joue d'une manière semblable. L'augmentation importante de D_2 va fermer la ligne de plasma et bloquer le transfert d'énergie. Avec la même longueur, $L_1 = 10.25cm$, on fait varier D_2 (pour $T_2 = 1cm$) (figure 9.12). Le résultat n'est pas intéressant.
- Le rôle du court circuit CC2 est plus complexe. La courbe du coefficient de réflexion en fonction de L_2 est montrée dans la figure 9.13. Si l'on observe une amélioration du couplage (pour $L_2 = 10.7cm$, $|\Gamma| = 0.18$), il y a un autre mode excité. Les figures 9.14(a)(b) donnent la répartition de champ qui correspond au coefficient de réflexion minimum dans la figure 9.13 ($L_2 = 10.7cm$). La répartition de champ dans la ligne de plasma bien que périodique n'est plus symétrique par rapport aux résultats analytiques (figure 9.3 à 9.5).

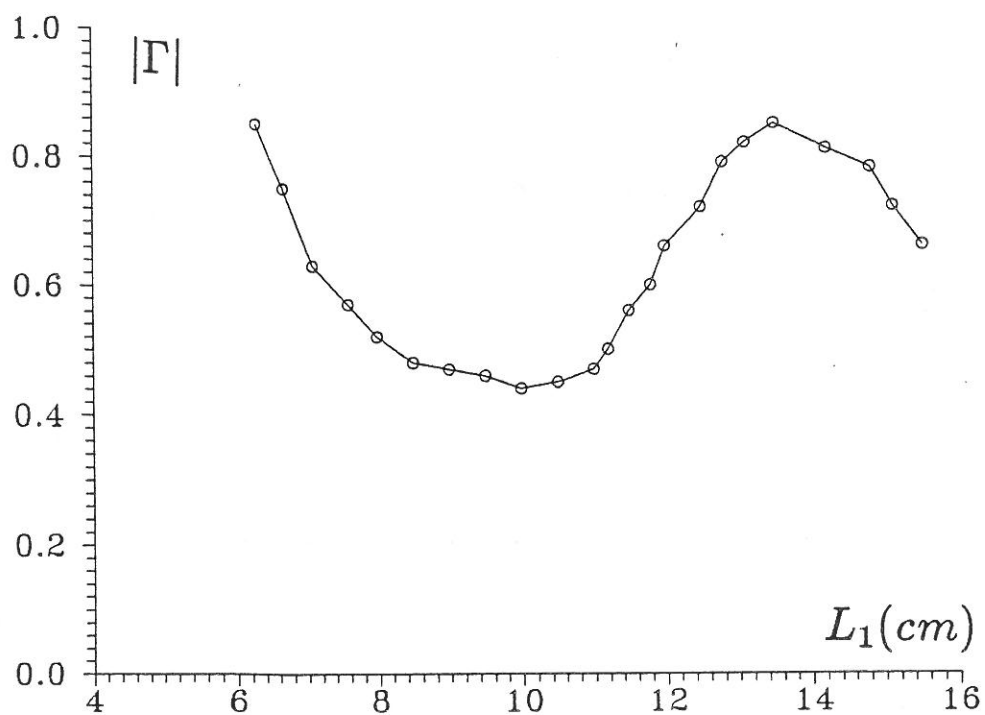


Figure 9.10: Le coefficient de réflexion en fonction de L_1
 $(L_2 = 15\text{cm}, \epsilon_p = -10)$

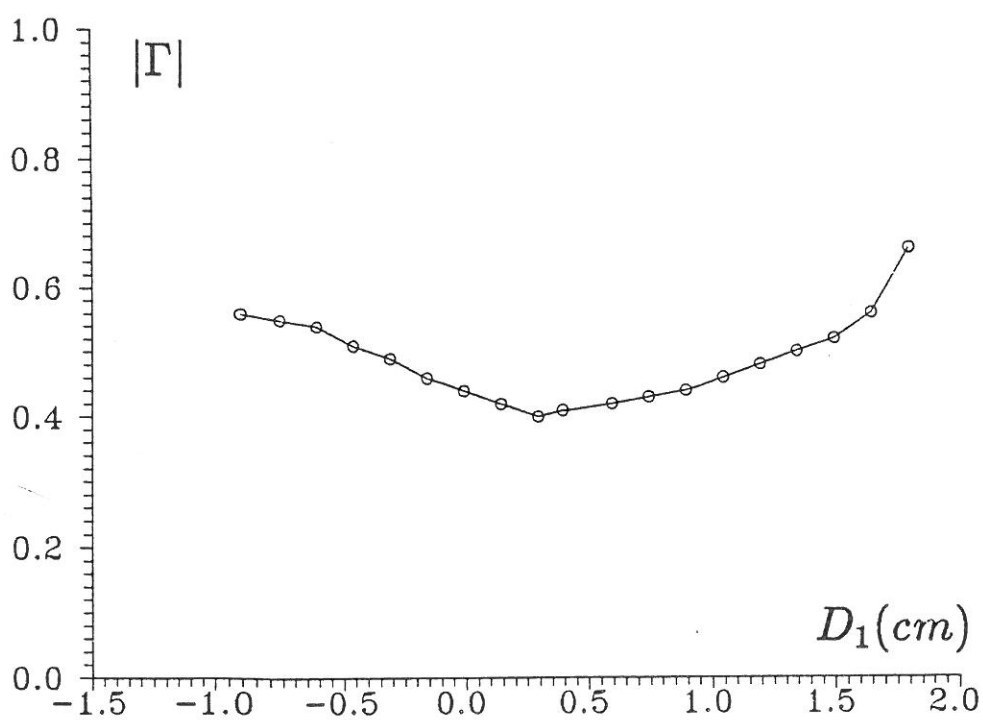


Figure 9.11: Le coefficient de réflexion en fonction de D_1
 $(L_1 = 7.4\text{cm}, L_2 = 15\text{cm}, \epsilon_p = -10)$

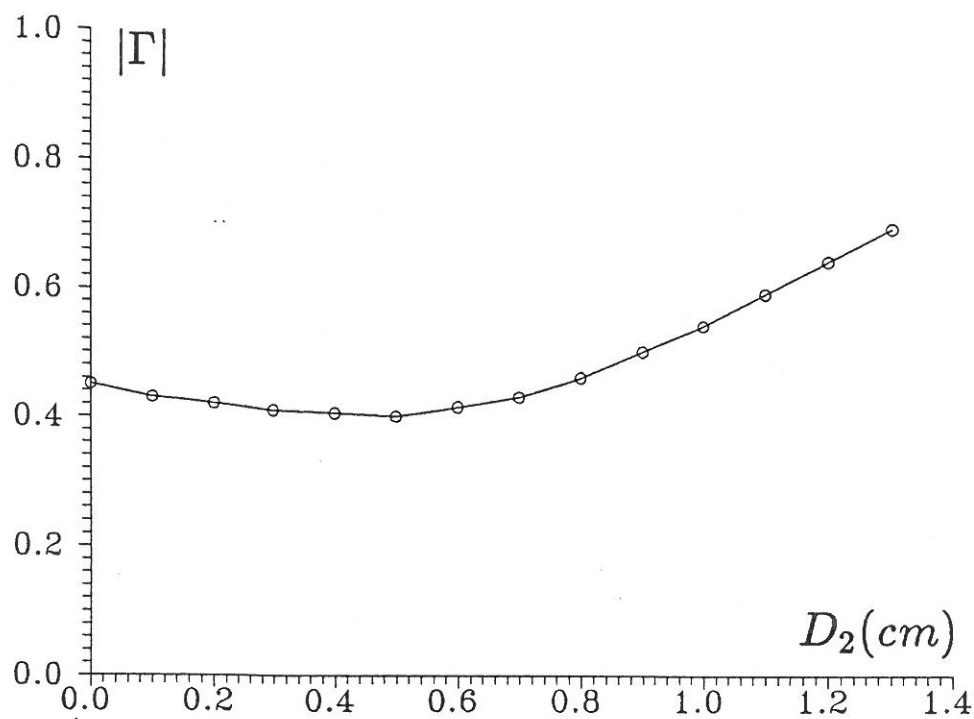


Figure 9.12: Le coefficient de réflexion en fonction de D_2
 $(L_1 = 7.4\text{cm}, L_2 = 15\text{cm}, \epsilon_p = -10)$

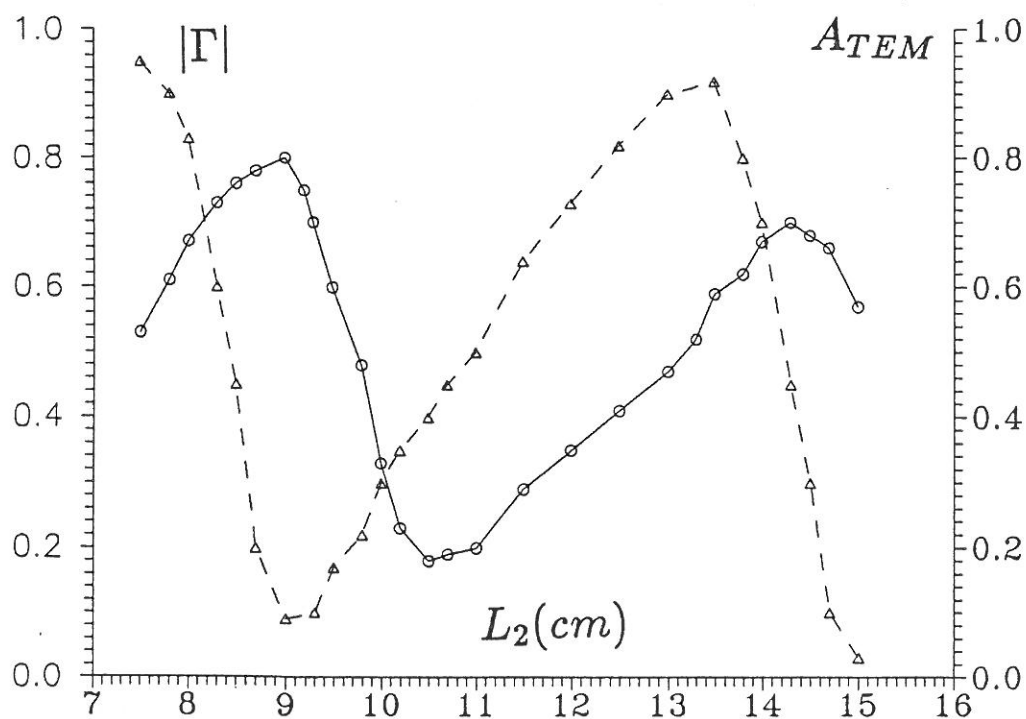


Figure 9.13: Le coefficient de réflexion et l'amplitude du mode TEM
 en fonction de L_2 ($L_1 = 7.4\text{cm}, \epsilon_p = -10$)
 ligne continue: coefficient de reflexion; ligne pointillée: amplitude du mode TEM

Si l'on regarde la variation transversale du champ (figure 9.14(b)), on trouve que le champ augmente un certain niveau sur toute la section de la ligne par rapport au résultat analytique (figure 9.5). On suppose qu'il y a une superposition d'une composante indépendante de X . Dans un système à deux conducteurs, ce mode peut être du type TEM . Le champ électromagnétique total est la superposition de deux champs: l'un est celui du mode plasma, l'autre d'un mode TEM .

Cette hypothèse est vérifiée en prenant $\epsilon_p = 1$ (absence du plasma) et en utilisant la même structure. La répartition de champ électrique dans la figure 9.15(a) montre l'excitation d'un mode TEM . Dans la figure 9.15(b) on voit par la variation longitudinale que la longueur d'onde du mode TEM excité est bien celle du générateur ($\lambda_e = 13cm$).

Dans la même figure 9.13 on trace également l'amplitude du mode TEM en fonction de L_2 . On constate qu'il y a un décalage entre les deux courbes. Le minimum du coefficient de réflexion ne correspond pas au minimum de l'amplitude du mode TEM . Donc le meilleur couplage est réalisé en présence du mode TEM . En revanche le cas du mode plasma pur (sans mode TEM) dans la figure 9.8(a) correspond à un coefficient de réflexion assez élevé.

Les résultats trouvés précédemment démontrent que le court circuit CC2 est le paramètre le plus important. Il permet:

1. de régler le coefficient de réflexion pour obtenir un bon transfert de l'énergie.
2. de sélectionner avec plus ou moins de précision l'excitation d'un mode plasma par rapport au mode TEM .

On peut encore améliorer le coefficient de réflexion en faisant varier simultanément L_1 et L_2 . Pour $L_1 = 14.05cm$ et $L_2 = 12.25cm$ on a obtenu un coefficient de réflexion de $|\Gamma| = 0.05$ soit 95 pourcent de l'énergie transférée; dans ce cas, les deux modes sont excités.

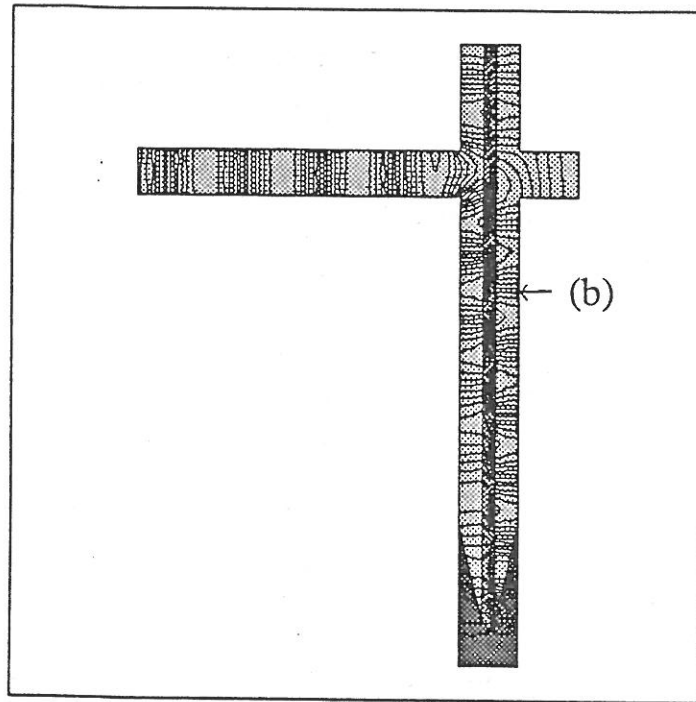


Figure 9.14: (a) La répartition du champ électrique
 $(L_1 = 7.4\text{cm}, L_2 = 10.7\text{cm}, \epsilon_p = -10)$

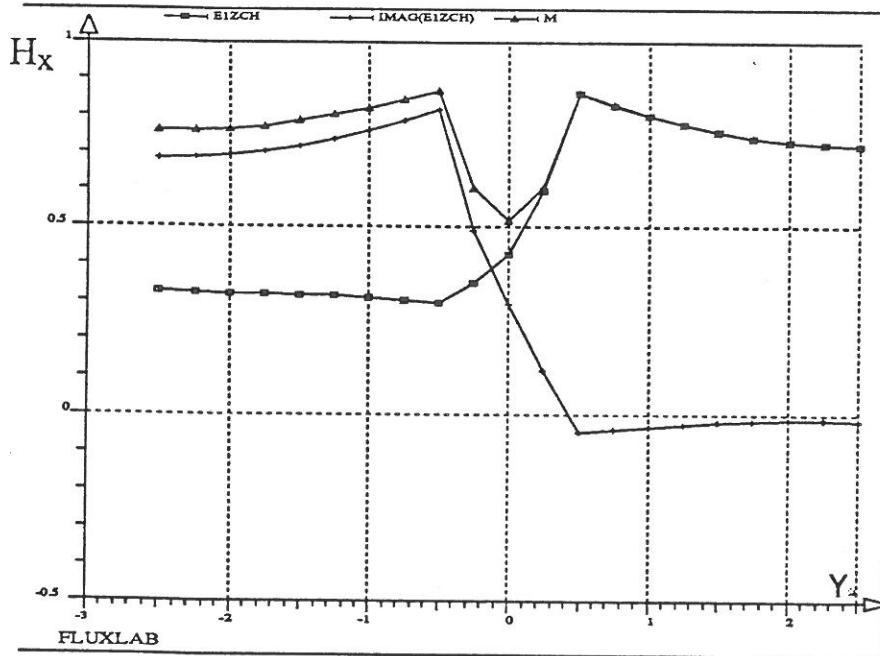


Figure 9.14: (b) La variation transversale du champ magnétique
dans la ligne de plasma (à $z = -10\text{cm}$)
□: partie réelle, +: partie imaginaire, △: module

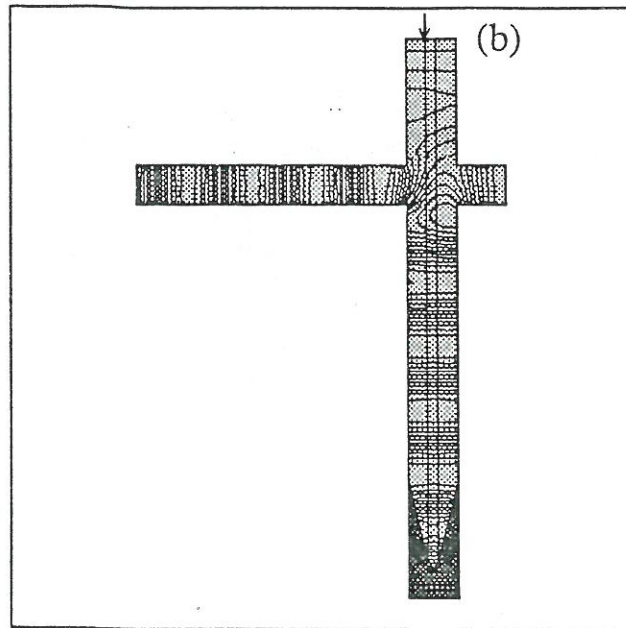


Figure 9.15: (a) La répartition du champ électrique ($L_1 = 7.4\text{cm}$, $L_2 = 15\text{cm}$, $\epsilon_p = 1$)

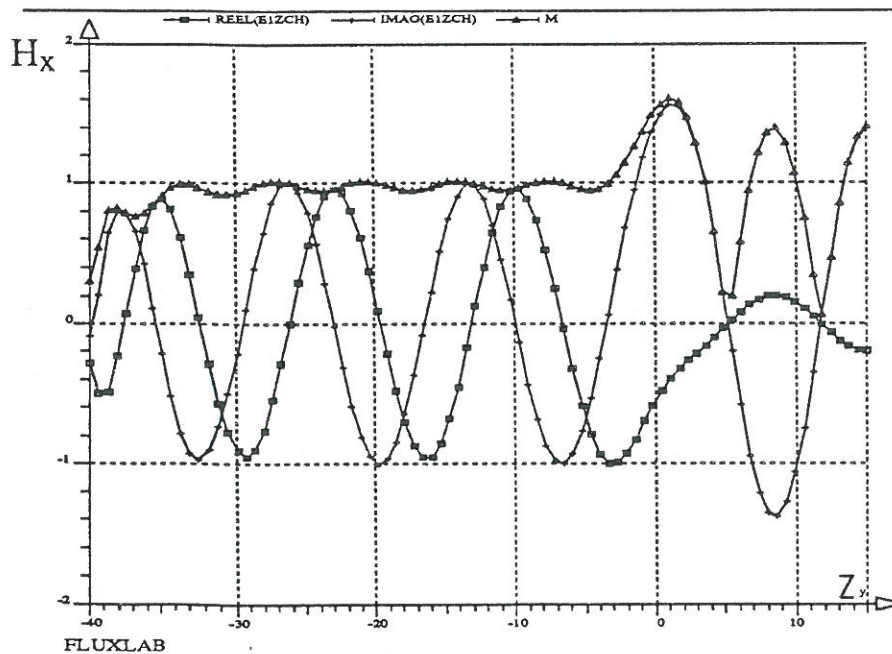


Figure 9.15: (b) La variation longitudinale du champ magnétique dans la ligne verticale

□: partie réelle, +: partie imaginaire, △: module

Pour confirmer le résultat, nous avons étudié une autre valeur de permittivité. ($\epsilon_p = -5$) pour la géométrie de travail $L_1 = 7.4cm$, $L_2 = 9cm$. On donne les résultats relatifs sur les figures 9.16(a)(b)(c)(d). Dans la figure 9.15(a) on obtient une longueur d'onde plus courte que celle de la figure 9.8(c)(pour $\epsilon_p = -10$) , ce qui est conforme à l'équation de phase (figure 9.2) du mode plasma. Un mode de plasma est excité, mais avec un coefficient de réflexion élevé. En réglant L_2 on peut diminuer le coefficient de réflexion, mais l'amplitude du mode *TEM* est augmenté. Pour chaque paramètre la même tendance se manifeste que pour le cas de $\epsilon_p = -10$ étudié dans ce paragraphe.

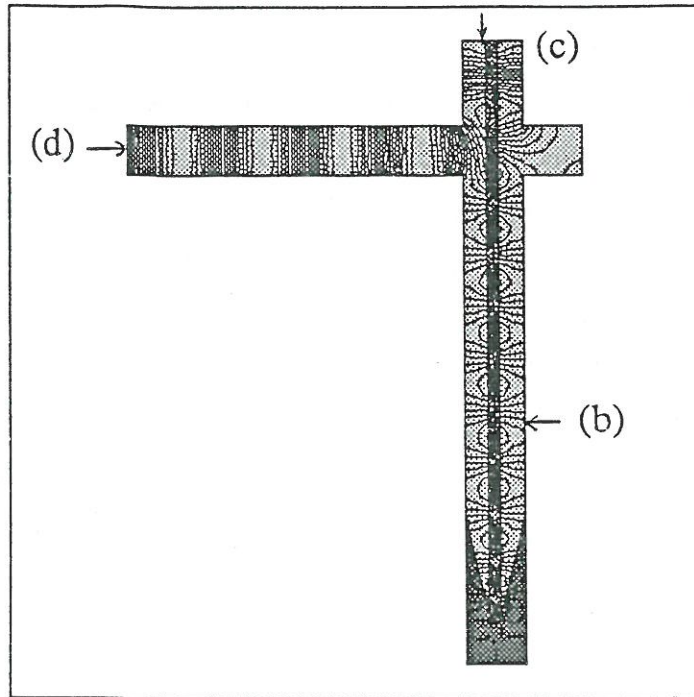


Figure 9.16: (a) La répartition du champ électrique ($L_1 = 7.4cm$, $L_2 = 9cm$, $\epsilon_p = -5$)

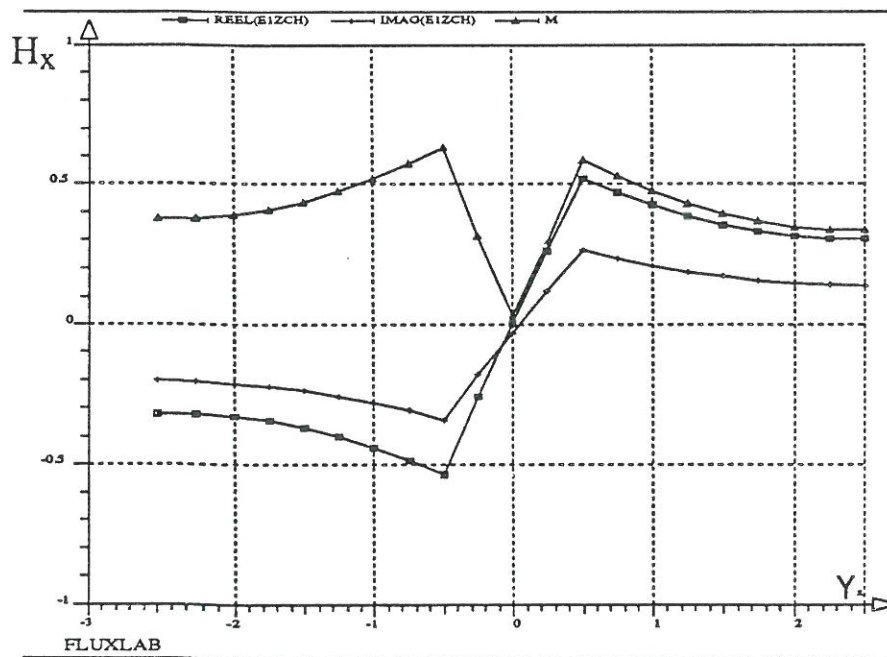


Figure 9.16: (b) La variation transversale du champ magnétique dans la ligne de plasma (à $z = -20cm$)

□: partie réelle, +: partie imaginaire, △: module

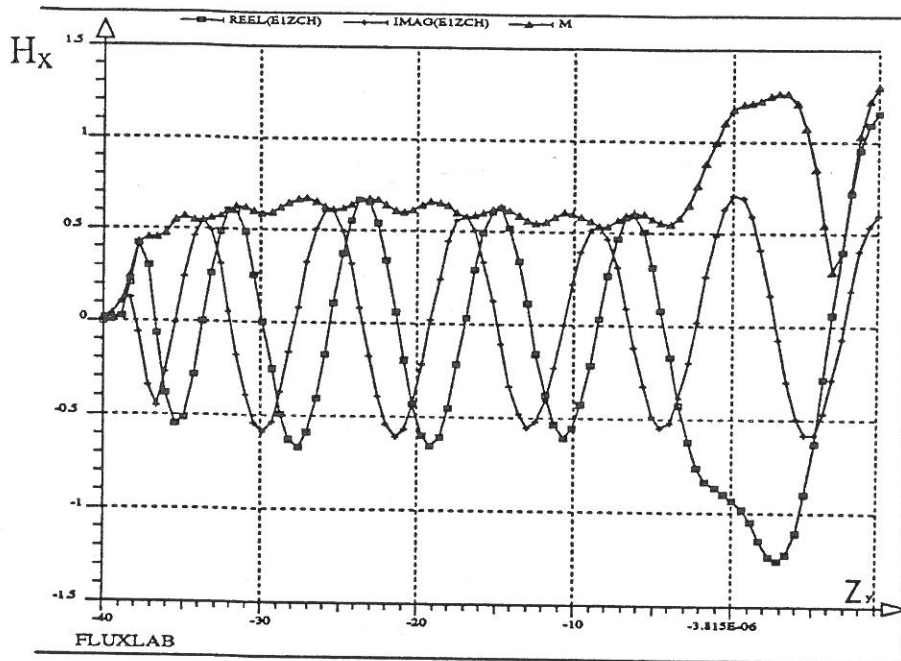


Figure 9.16: (c) La variation longitudinale du champ magnétique dans la ligne de plasma (sur la paroi gauche du plasma)
 $\square$: partie réelle, $+$: partie imaginaire, $\triangle$: module

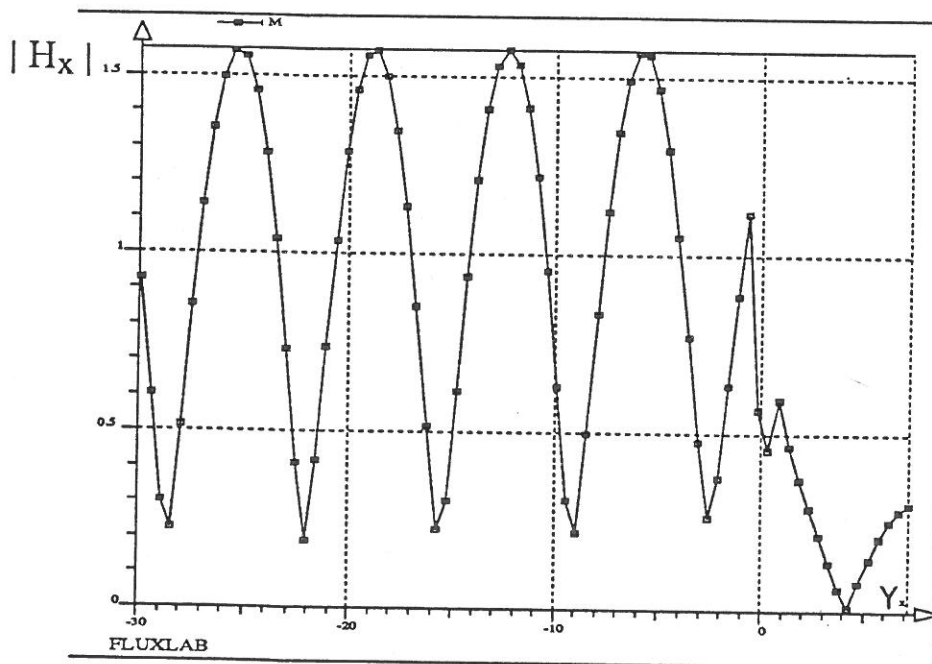


Figure 9.16: (d) Le module du champ magnétique dans la ligne horizontale

9.5 Excitation du plasma collisionnel

Dans le paragraphe 9.3 nous avons trouvé deux exemples sans modes parasites *TEM* (figure 9.8 et figure 9.16), l'un pour $\epsilon_p = -10$, l'autre pour $\epsilon_p = -5$. Dans la réalité, le plasma est "collisionnel" et caractérisé par une permittivité complexe.

Quand une perte relativement faible ($\epsilon_p = -10 + j2$) est introduite dans la structure de figure 9.8, les résultats sont donnés dans les figures 9.17(a)(b)(c)(d). Dans la figure 9.17(a) on voit que la répartition de champ au "gap" est un peu perturbée et le champ retrouve sa symétrie au delà d'une certaine distance. La variation transversale du champ magnétique (figure 9.17(b)) dans la ligne de plasma est tracée à $z = -25cm$; une répartition de champ correspond bien à un mode de plasma. Le champ est pratiquement nul au centre, ce qui signifie l'annulation du mode *TEM*. Dans la courbe de la variation longitudinale (figure 9.17(c)) tracée sur la paroi gauche du plasma, on voit une onde décroissante dont la longueur d'onde est inférieure à celle de l'excitation. Le coefficient de réflexion reste très élevé (figure 9.17(d)).

Ce coefficient de réflexion peut être amélioré en faisant varier L_2 , la position du CC2. La tendance est comparable au cas du plasma sans collisionnel (figure 9.13). Le coefficient de réflexion varie périodiquement en fonction de L_2 (figure 9.18). La figure 9.20 (a) décrit la répartition de champ qui correspondent à un des meilleurs couplages de la figure 9.19 ($L_2 = 11.2cm$). La variation transversale du champ magnétique dans la ligne de plasma (figure 9.20(b)) montre qu'un mode *TEM* est superposé avec une amplitude de 0.5. Le meilleur couplage se réalise toujours en présence du mode *TEM*. Dans la figure 9.19 on trace la courbe du coefficient de réflexion en fonction de L_1 pour $L_2 = 11.2cm$, correspondant à une réflexion minimale de la figure 9.18. On constate que le rôle de L_1 dans le couplage de l'énergie est diminué. La variation de la courbe de figure 9.18 est moins importante que celle de la figure 9.10. Ceci renforce notre conclusion du paragraphe précédent: le CC2 joue un rôle plus important vis à vis du couplage de l'énergie. Une fois que le couplage est amélioré par L_2 , la position du CC2, le changement réalisé par L_1 est beaucoup réduit. En conclusion, le réglage du

CC2 permet de coupler une grande partie de l'énergie et le réglage simultané du CC1 permet de compléter la partie résiduelle et de réaliser un couplage quasiment total.

Nous passons maintenant au deuxième exemple du plasma collisionnel (figure 9.16). Lorsque des pertes élevées ($\epsilon_p = -5 + j5$) sont introduites dans le plasma, l'onde est fortement atténuée (figure 9.21(a)(b)). L'énergie est mal couplée à cause du changement de ϵ_p . On peut toujours régler CC2 pour diminuer la réflexion. Pour $L_2 = 11.7\text{cm}$ nous avons un coefficient de réflexion de 0.17. Les variations de champ correspondantes sont montrées dans les figures 9.22(a)(b)(c)(d). Le mode *TEM* est toujours présent. De plus il n'y a pas de changement fondamental dans la courbe du coefficient de réflexion en fonction de L_1 et L_2 .

Pour le cas du plasma collisionnel, on constate que le comportement du champ dans l'excitateur est plus compliqué en raison de l'introduction des pertes dans le plasma. Pour certaines géométries le champ excité ne présente pas de sens physique. La condition d'excitation du mode de plasma devient stricte. On estime qu'il faut utiliser le modèle complet à trois dimensions afin de mieux caractériser le phénomène physique.

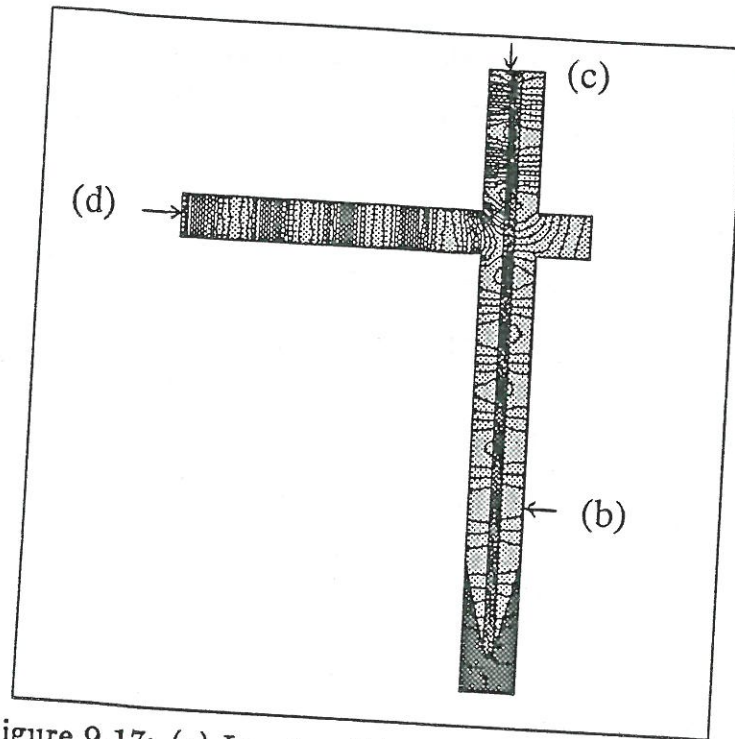


Figure 9.17: (a) La répartition du champ électrique
 $(L_1 = 7.4cm, L_2 = 15cm, \epsilon_p = -10 + j2)$

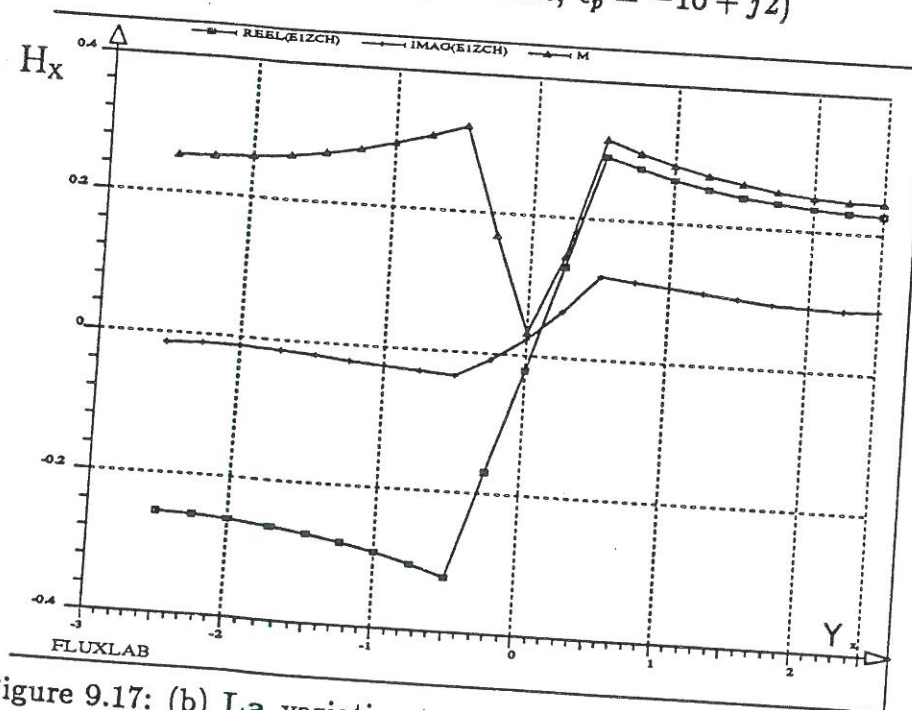


Figure 9.17: (b) La variation transversale du champ magnétique
dans la ligne de plasma (à $z = -25cm$)
□: partie réelle, +: partie imaginaire, Δ: module

CC2 permet de coupler une grande partie de l'énergie et le réglage simultané du CC1 permet de compléter la partie résiduelle et de réaliser un couplage quasiment total.

Nous passons maintenant au deuxième exemple du plasma collisionnel (figure 9.16). Lorsque des pertes élevées ($\epsilon_p = -5 + j5$) sont introduites dans le plasma, l'onde est fortement atténuée (figure 9.21(a)(b)). L'énergie est mal couplée à cause du changement de ϵ_p . On peut toujours régler CC2 pour diminuer la réflexion. Pour $L_2 = 11.7\text{cm}$ nous avons un coefficient de réflexion de 0.17. Les variations de champ correspondantes sont montrées dans les figures 9.22(a)(b)(c)(d). Le mode *TEM* est toujours présent. De plus il n'y a pas de changement fondamental dans la courbe du coefficient de réflexion en fonction de L_1 et L_2 .

Pour le cas du plasma collisionnel, on constate que le comportement du champ dans l'excitateur est plus compliqué en raison de l'introduction des pertes dans le plasma. Pour certaines géométries le champ excité ne présente pas de sens physique. La condition d'excitation du mode de plasma devient stricte. On estime qu'il faut utiliser le modèle complet à trois dimensions afin de mieux caractériser le phénomène physique.

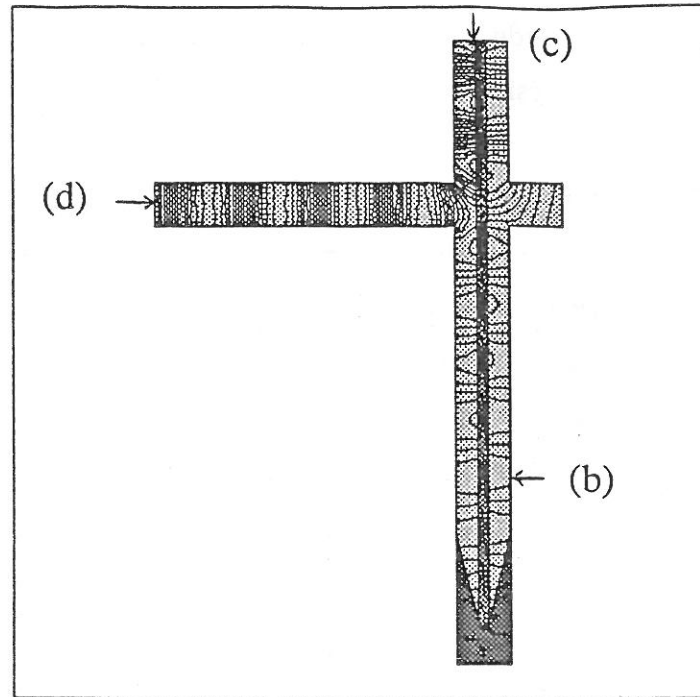


Figure 9.17: (a) La répartition du champ électrique

$$(L_1 = 7.4cm, L_2 = 15cm, \epsilon_p = -10 + j2)$$

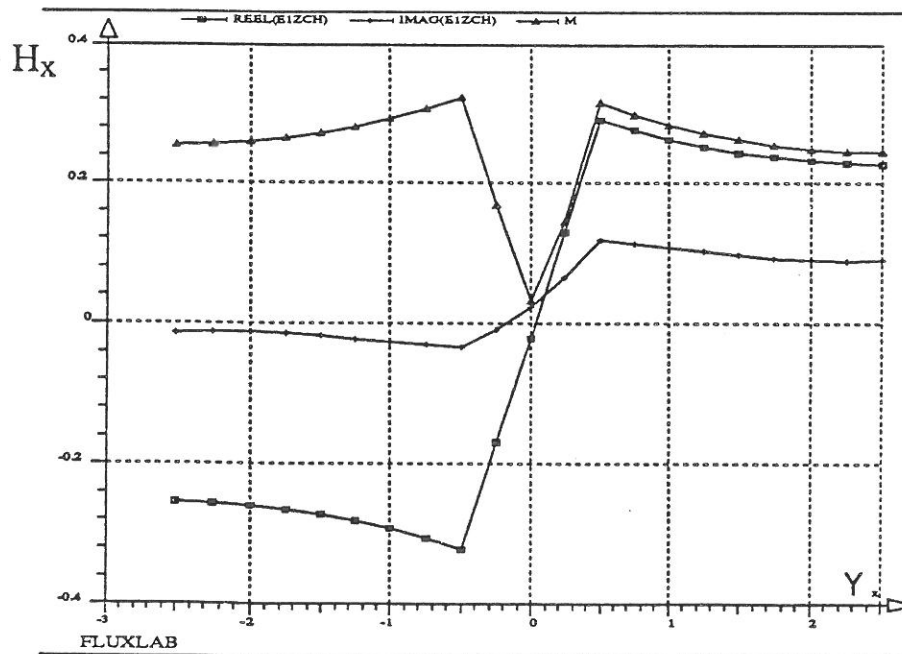


Figure 9.17: (b) La variation transversale du champ magnétique dans la ligne de plasma (à $z = -25cm$)

□: partie réelle, +: partie imaginaire, △: module

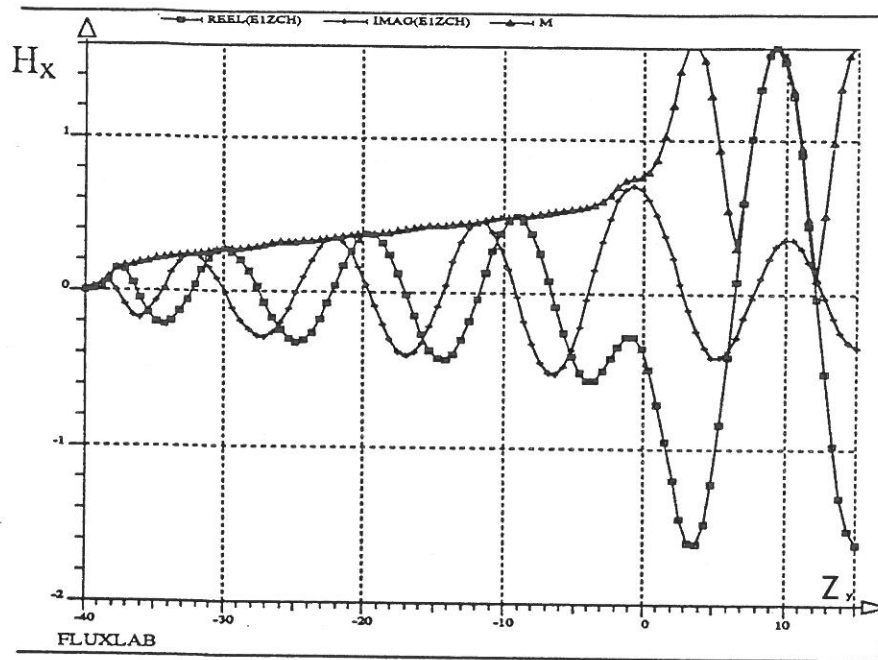


Figure 9.17: (c) La variation longitudinale du champ magnétique dans la ligne de plasma (sur la parois gauche du plasma)
 $\square$: partie réelle, $+$: partie imaginaire, $\triangle$: module

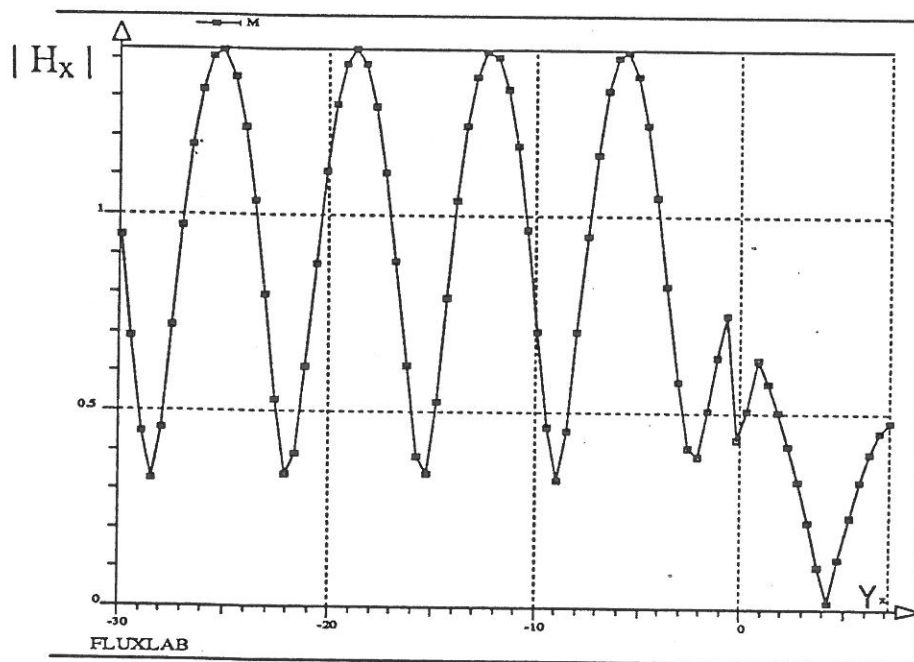


Figure 9.17: (d) Le module du champ magnétique dans la ligne horizontale

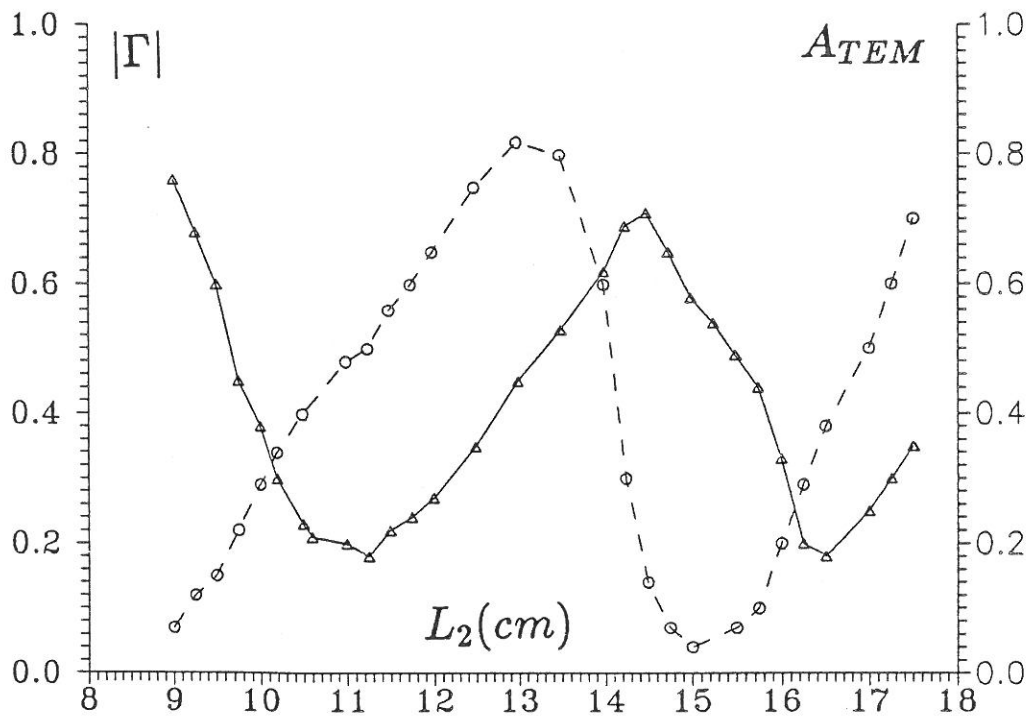


Figure 9.18: Le coefficient de réflexion et l'amplitude du mode TEM
en fonction de L_2 ($L_1 = 7.4cm$, $\epsilon_p = -10 + j2$)

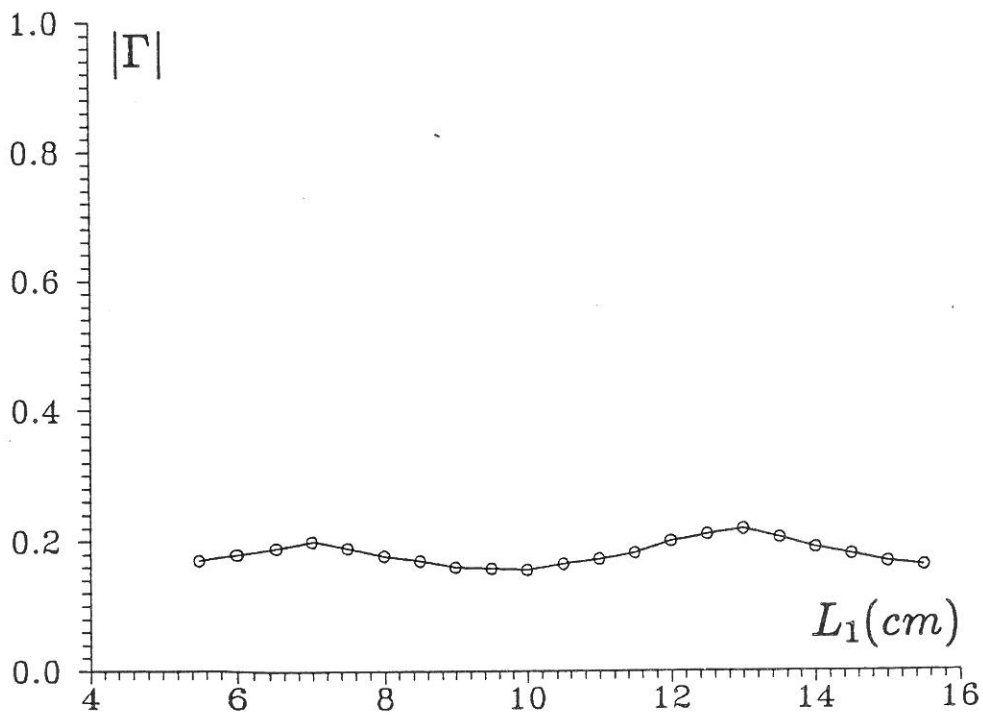


Figure 9.19: Le coefficient de réflexion en fonction de L_1
($L_2 = 11.2cm$, $\epsilon_p = -10 + j2$)

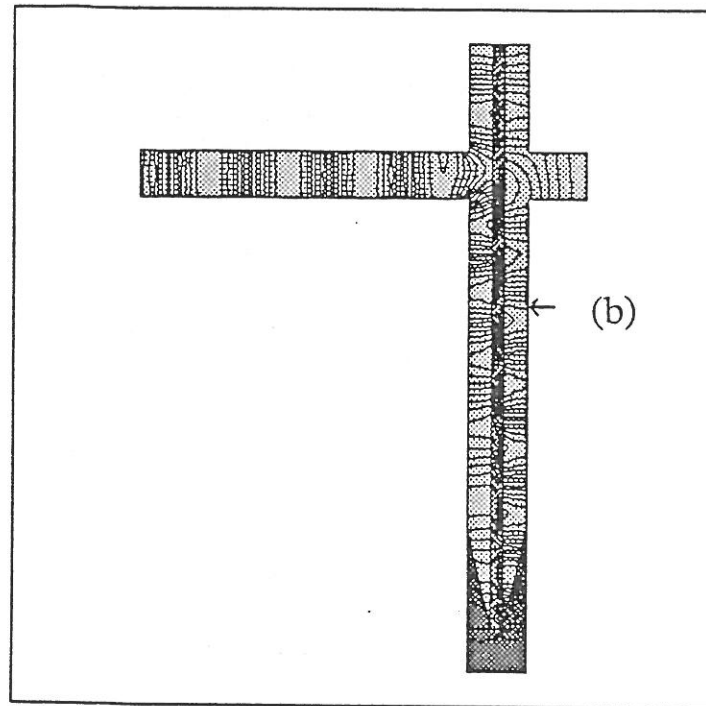


Figure 9.20: (a) La répartition du champ électrique

$$(L_1 = 7.4cm, L_2 = 11.2cm, \epsilon_p = -10 + j2)$$

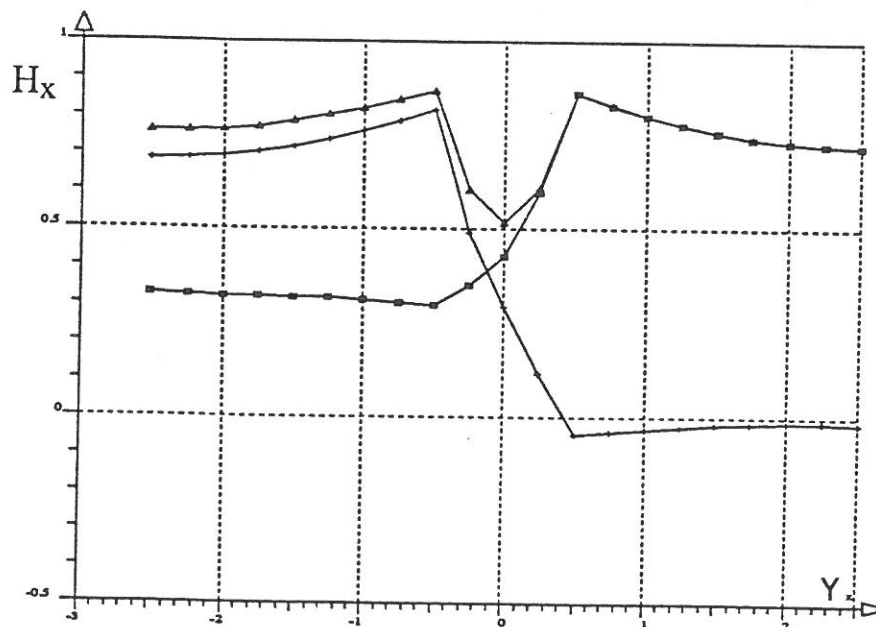


figure 9.20: (b) La variation transversale du champ magnétique dans la ligne de plasma(à $z = -12cm$)

□: partie réelle, +: partie imaginaire, Δ : module

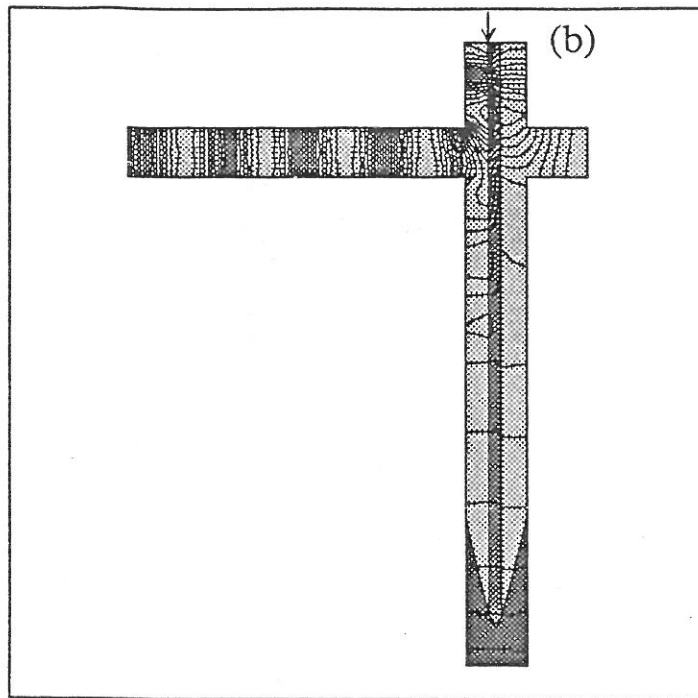


Figure 9.21: (a) La répartition du champ électrique

$$(L_1 = 7.4cm, L_2 = 9cm, \epsilon_p = -5 + j5)$$

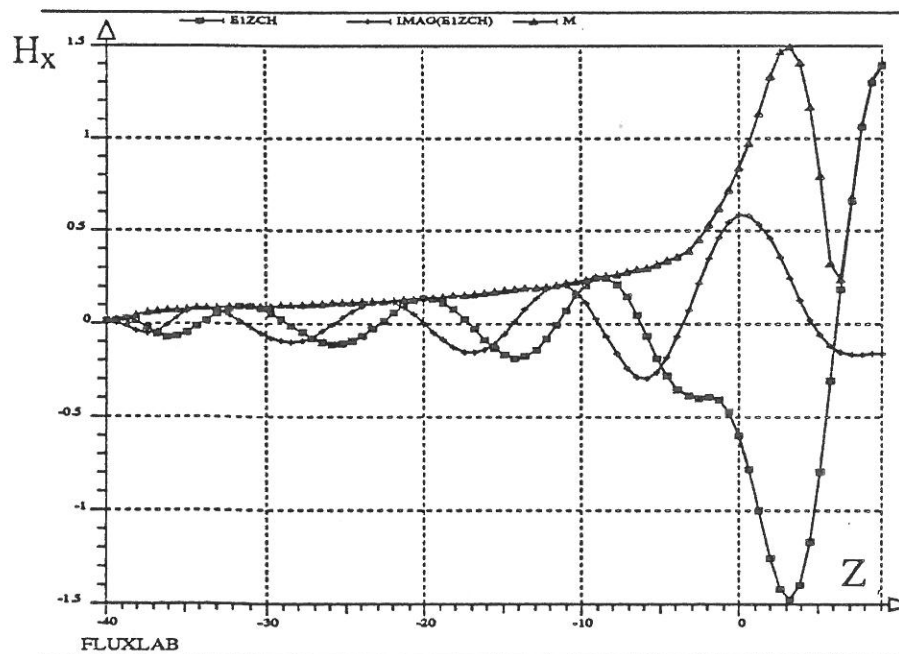


Figure 9.21: (b) La variation longitudinale du champ magnétique dans la ligne de plasma (sur la paroi gauche du plasma)

□: partie réelle, +: partie imaginaire, △: module

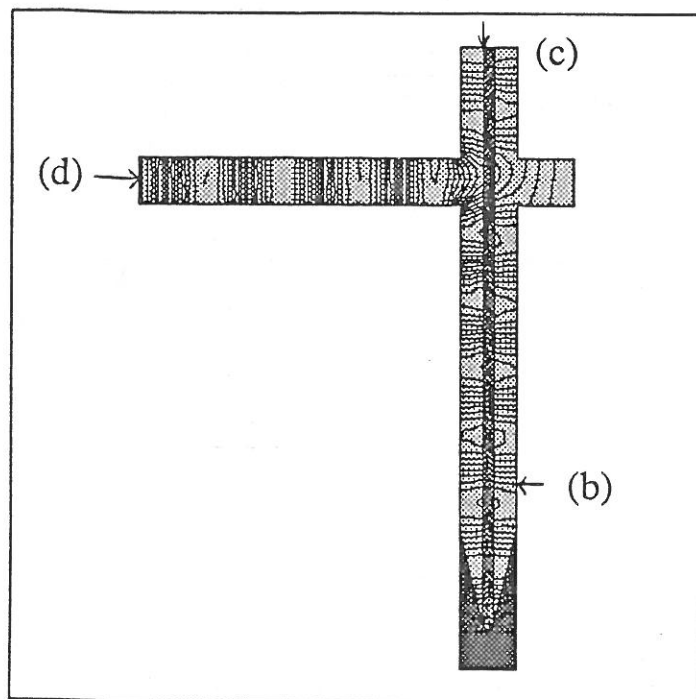


Figure 9.22: (a) La répartition du champ électrique

$$(L_1 = 7.4cm, L_2 = 11.7cm, \epsilon_p = -5 + j5)$$

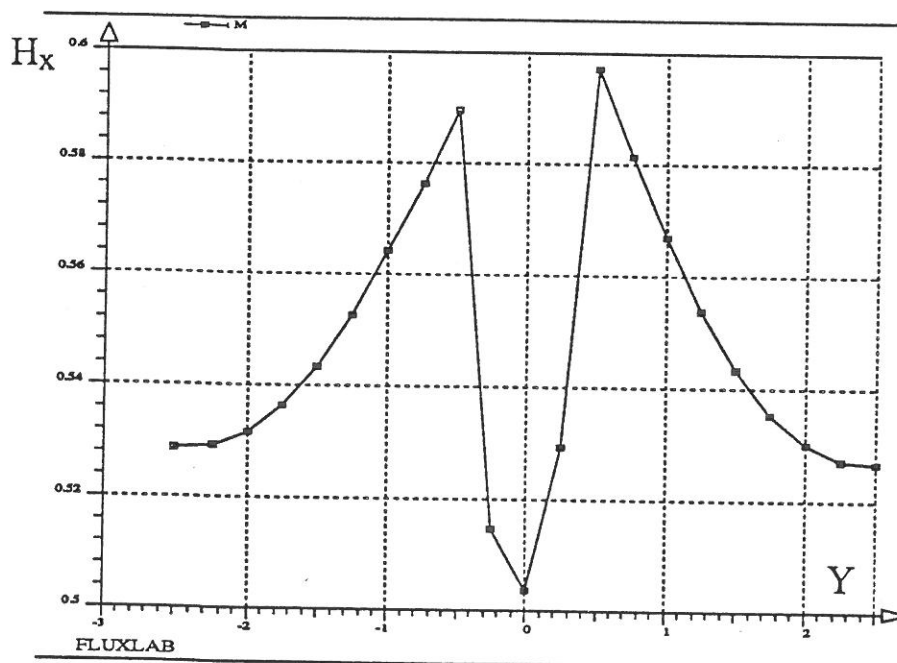


Figure 9.22: (b) La variation transversale du champ magnétique dans la ligne de plasma($z = -25cm$)

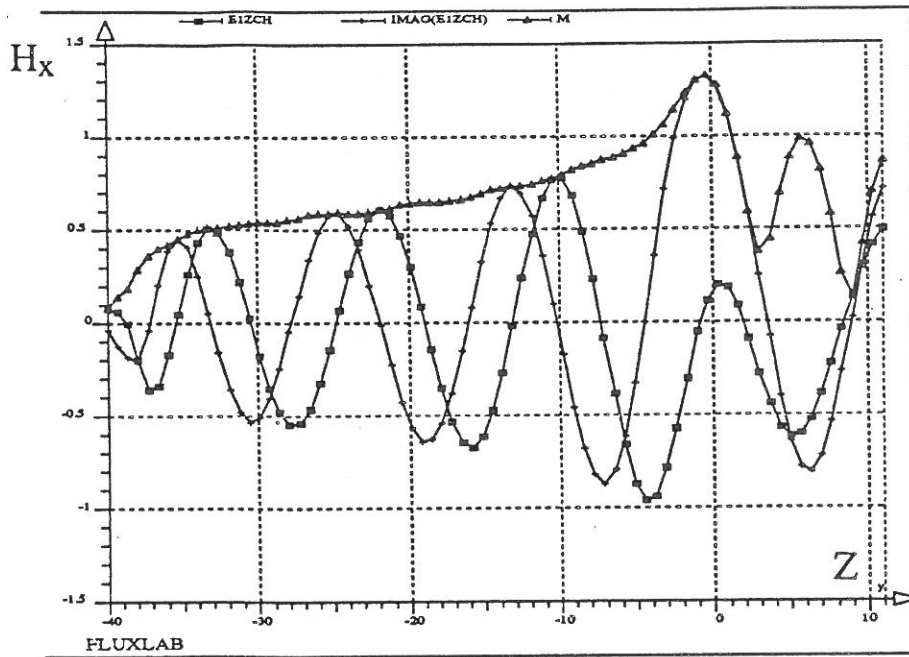


Figure 9.22: (c) La variation longitudinale du champ magnétique dans la ligne de plasma (sur la paroi gauche du plasma)
 $\square$: partie réelle, $+$: partie imaginaire, $\triangle$: module

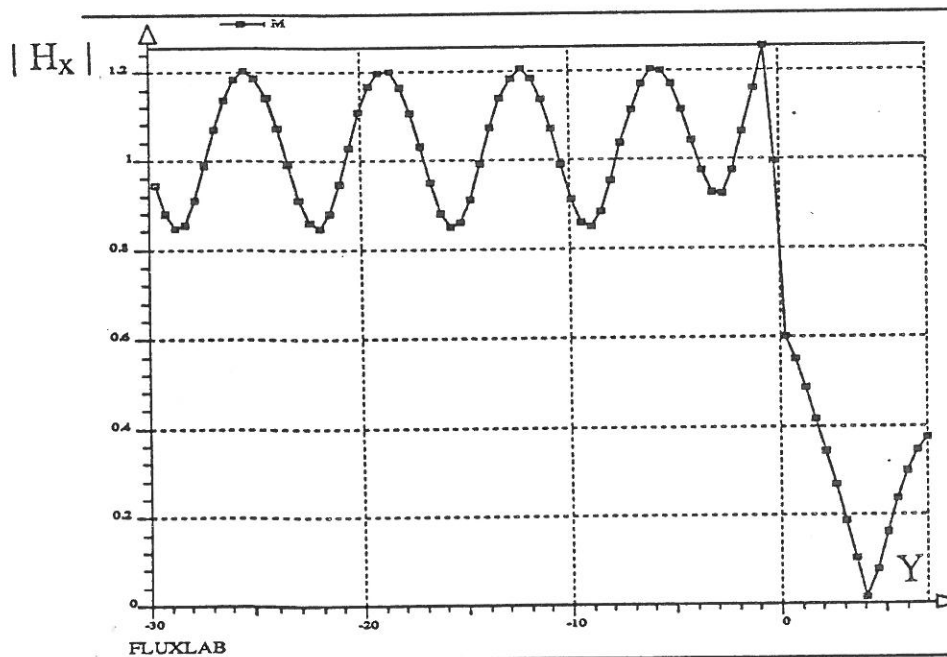


Figure 9.22: (d) Le module du champ magnétique dans la ligne horizontale

Conclusion

Nous avons modélisé dans cette thèse plusieurs structures hyperfréquences (microonde) par la méthode des éléments finis. Deux type de problème, celui aux valeurs propres et celui de répartition, ont été traités soit avec la fonctionnelle vectorielle soit avec la fonctionnelle scalaire. Le premier type de problème concerne les systèmes fermés à deux dimensions et à trois dimensions dans lesquels on cherche les modes propres, tandis que le deuxième type concerne la répartition des champs dans un système excité par un mode.

La méthode variationnelle a été utilisée pour mettre sous forme intégrale, qu'on appelle fonctionnelle, les équations de Maxwell. Pour trouver les solutions des équations de Maxwell, cette fonctionnelle a été minimisée et puis discrétisée par la méthode des éléments finis. Le choix du type de fonctionnelle dépend du problème physique. La fonctionnelle scalaire (une seule composante longitudinale E_z ou H_z) est simple et facile à utiliser, mais ne peut s'appliquer généralement qu'au problème de milieu homogène. La fonctionnelle vectorielle est utilisée avec généralité au problème de milieu homogène et inhomogène. Pour les fonctionnelles, quelque soit scalaires ou vectorielles, la condition aux limites de Neumann est déjà incluse, n'a pas besoin d'être imposée. Il faut appliquer la condition aux limites de Dirichlet pour pouvoir résoudre le problème. L'existence des modes non-physiques perturbe les modes propres. En ajoutant la condition de divergence nulle la méthode de "pénalité" nous permet d'éliminer certains modes non-physiques. On estime que les modes non-physiques proviennent d'une présence incomplète des équations de Maxwell et des conditions aux limites associées dans la fonctionnelle. D'autres techniques pour éliminer les modes non-physiques sont citées. La formulation variationnelle pour la matrice d'impédance a été reprise dans

cette thèse et mise en forme explicite. C'est une formulation de base pour étudier les composants hyperfréquences.

Sur le plan des applications, la méthode des éléments finis est très bien adaptée aux problèmes de la modélisation de structures en hyperfréquences. Pour le problème aux valeurs propres, nous avons calculé à deux dimensions les guides d'onde homogènes avec une section transversale quelconque. On utilise respectivement $F(E_z)$ et $F(H_z)$ pour calculer les modes TM et TE . Les géométries de travail des modes TM et TE sont différentes. Pour les modes TM , la géométrie de travail est "fermée" par la condition de Dirichlet; les modes sont sortis en ordre correctement. Pour les modes TE , il faut définir plusieurs géométries de travail pour éviter la perte des modes. Le guide d'onde inhomogène chargé de diélectrique a été calculé par la fonctionnelle vectorielle avec le terme de pénalité. Les modes non-physiques ont été trouvés malgré un renforcement de la condition de divergence nulle. Les courbes de dispersion et les répartitions de champ du mode fondamental et du mode hybride ont été obtenues. On constate qu'il faut la courbe de dispersion et la répartition de champ pour confirmer un mode physique et que l'ordre des modes physiques change en fonction du coefficient de pénalité. La présence des modes non-physiques rend la méthode des éléments finis moins intéressante pour les structures simples chargées ou non de matériaux, car on peut aussi utiliser les méthodes analytiques. Pour les structures complexes, la méthode des éléments finis reprend tout son intérêt. Des cavités vides cylindriques, coaxiales et coaxiales dissymétriques ont été traitées en trois dimensions par les fonctionnelles $F(E_z)$ et $F(h_z)$. Les résultats de la cavité cylindrique sont satisfaisants. Le changement des modes dans la cavité coaxiale et la cavité coaxiale dissymétrique par rapport à la cavité cylindrique a été bien expliqué. Il est possible de traiter les cavités inhomogènes chargées de diélectrique de la même manière que pour le guide d'onde chargé de diélectrique; néanmoins les modes non-physiques sont toujours présents. Pour la ligne TEM nous avons calculé les lignes coaxiales de différentes sections transversales et trouvé leurs impédances caractéristiques Z_0 . Dans l'ensemble, les modes TEM, TE, TM et hybrides sont trouvés dans les différentes structures en deux et trois dimensions.

Pour le problème de répartition, bien que nous ayons travaillé seulement à deux dimensions, les résultats obtenus sont significatifs. Physiquement ce type de problème consiste à modéliser les composants microondes. Connaissant le mode d'excitation du système, on cherche à trouver le comportement des composants du point de vue de la transmission de l'énergie. Deux méthodes de calcul ont été proposées pour modéliser ce type de problème:

- La méthode de la charge adaptée, développée originalement dans cette thèse, consiste à simuler la mesure du TOS (Taux d'Onde Stationnaire) du composant. Appliquant un mode d'excitation à une entrée et terminant les autres entrées par des charge adaptées bien définies, on calcule le TOS et puis le coefficient de réflexion. La charge adaptée doit être définie et testée pour chaque entrée du composant. Bien qu'elle ne nous donne que des informations partielles d'un composant, cette méthode simple est efficace pour de nombreuses applications.
- La méthode matricielle permet d'avoir une analyse complète, rigoureuse du composant, mais elle nécessite en général n résolution du système et n^2 intégrations numériques pour un composant à n entrées. On peut connaître par cette méthode la matrice d'impédance $[z]$ ou la matrice d'admittance $[y]$ et puis la matrice de répartition $[s]$ du composant.

Ces deux méthodes de calcul ont été utilisées pour deux guides d'onde avec obstacles et les résultats ont été comparés. Elles peuvent être étendues à trois dimensions en utilisant la fonctionnelle vectorielle, mais comme pour le problème de valeur propre les modes non-physiques vont réapparaître. La même mesure doit être prise pour réduire ces modes non-physiques.

L'excitateur de plasma a été modélisé dans la dernière partie de cette thèse. Le but de cette modélisation est d'essayer d'améliorer le couplage d'énergie au plasma. Dans un premier temps, nous avons calculé les modes de propagation dans les deux guides de l'excitateur et donné quelques propositions pour favoriser le couplage. En-

suite, pour analyser le champ à la jonction de deux guides, la méthode des éléments finis a été utilisée sur un modèle simplifié de deux dimensions. Puisque qu'on s'intéresse au couplage de l'énergie à l'entrée de l'excitateur, la méthode de la charge adaptée a été choisie pour étudier le modèle simplifié. Le mode de plasma a été excité dans la ligne de plasma non-collisionnel (pour $\epsilon_p = -5, -10$) et collisionnel (pour $\epsilon_p = -10 + j2, -5 + j5$). Nous avons calculé le coefficient de réflexion à l'entrée de l'excitateur en fonction de plusieurs paramètres physiques, notamment L_1 , la position du court-circuit 1(CC1); L_2 , la position du court-circuit 2(CC2). Il est montré que CC2 est plus important vis à vis du couplage de l'énergie. Un mode supplémentaire *TEM* a été trouvé dans le modèle simplifié. Nous avons mis en évidence les conditions de transfert de l'énergie sur le mode propre plasma par rapport à celui du mode supplémentaire.

En résumé, la méthode des éléments finis permet de résoudre un grand nombre de problèmes en hyperfréquences. Etant souple et générale, cette méthode nécessite une certaine connaissance du phénomène physique à étudier pour bien choisir la fonctionnelle, la géométrie de travail et exploiter les résultats. Il serait indispensable de trouver les moyens efficaces pour éviter les modes non-physiques.

Annexe A

Etant donné que les composantes longitudinales H_z et E_z s'annulent pour la ligne *TEM*, les équations de Maxwell (1.1) à (1.4) deviennent:

$$\nabla \times \vec{E}_t = -j\omega\mu\vec{H}_t \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \times \vec{H}_t = j\omega\epsilon\vec{E}_t \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_t = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \cdot \vec{H}_t = 0 \quad (\text{A.4})$$

A partir des deux équations rotationnelles (A.1) et (A.2), nous avons:

$$\nabla_t \times \vec{H}_t = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla_t \times \vec{E}_t = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\hat{z} \times \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = j\omega\epsilon\vec{E}_t \quad (\text{A.7})$$

$$\hat{z} \times \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu\vec{H}_t \quad (\text{A.8})$$

Puisque le rotationnel du gradient d'un scalaire vaut zéro (1.31)(1.32), nous introduisons deux potentiels scalaires ψ et ϕ pour décrire $\vec{H}_t$ et $\vec{E}_t$.

$$\vec{H}_t = I(z) \nabla_t \psi(u, v) = I(z) \vec{h}_t(u, v) \quad (\text{A.9})$$

$$\vec{E}_t = U(z) \nabla_t \phi(u, v) = U(z) \vec{e}_t(u, v) \quad (\text{A.10})$$

$I(z)$ et $U(z)$ sont les amplitudes du champ magnétique et électrique.

En utilisant (A.3) et (A.4) sur (A.9) et A.10), les deux potentiels scalaires satisfont les deux équations suivantes:

$$\nabla_t^2 \phi(u, v) = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla_t^2 \psi(u, v) = 0 \quad (\text{A.12})$$

Ce sont les équations de Laplace en 2 dimensions. Les deux potentiels ne sont pas indépendants et se sont liés par les équations (A.7) et (A.8).

A partir de (A.7) (A.8) nous pouvons avoir:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial z^2} - \Gamma^2 \vec{E}_t = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}_t}{\partial z^2} - \Gamma^2 \vec{H}_t = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$-\Gamma^2 = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

Reprenons (A.9) et (A.10), nous avons:

$$\frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 I(z) = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 U(z) = 0 \quad (\text{A.16})$$

Ce sont les équations de propagation.

Annexe B

Pour calculer le courant et la tension équivalents du mode TE_{10} du guide d'onde rectangulaire, nous écrivons les expressions des champs:

$$E_y = -j \frac{\omega \mu a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) (Ae^{-j\beta z} + Be^{j\beta z}) \quad (\text{B.1})$$

$$H_x = j \frac{\beta a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) (Ae^{-j\beta z} - Be^{j\beta z}) \quad (\text{B.2})$$

$$H_z = \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) (Ae^{-j\beta z} + Be^{j\beta z}) \quad (\text{B.3})$$

et nous supposons que les champs transversaux de (A.9) et (A.10):

$$h_x = C_1 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \hat{x}$$

$$e_y = C_2 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \hat{y}$$

Selon la première condition (1.62), nous avons:

$$C_1 C_2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \int_0^b dy \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx = 1$$

donc:

$$C_1 C_2 = \frac{2}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 ab} \quad (\text{B.4})$$

Selon la deuxième condition (1.63) nous avons:

$$\frac{e_y}{h_x} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{Z_w}{Z_c} \quad (\text{B.5})$$

Les deux équations (B.4) (B.5) nous donne:

$$C_1 = \pm \frac{a}{\pi} \sqrt{\frac{2}{ab} \frac{Z_c}{Z_w}} \quad (\text{B.6})$$

$$C_2 = \pm \frac{a}{\pi} \sqrt{\frac{2}{ab} \frac{Z_w}{Z_c}} \quad (\text{B.7})$$

Les champs transversaux et la tension et le courant sont:

$$h_x = \pm \sqrt{\frac{2}{ab} \frac{Z_c}{Z_w}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \hat{x} \quad (\text{B.8})$$

$$e_y = \pm \sqrt{\frac{2}{ab} \frac{Z_w}{Z_c}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \hat{y} \quad (\text{B.9})$$

$$I(z) = \pm \sqrt{\frac{2}{ab} \frac{Z_c}{Z_w}} \left(\frac{\beta}{\omega\mu}\right) (Ae^{-j\beta z} - Be^{j\beta z}) \quad (\text{B.10})$$

$$U(z) = \mp \sqrt{\frac{2}{ab} \frac{Z_w}{Z_c}} \left(\frac{\pi}{a}\right) (Ae^{-j\beta z} + Be^{j\beta z}) \quad (\text{B.11})$$

On peut vérifier que:

$$\frac{U(z)^\pm}{I(z)^\pm} = Z_c$$

Annexe C

$$\begin{aligned}
 [M_{11}] &= \sum_e \int \int_e \frac{\beta^2}{\epsilon_r} [N_i N_j] dx dy + \sum_e \int \int_e \frac{1}{\epsilon_r} \left[\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \\
 [M_{22}] &= \sum_e \int \int_e \frac{\beta^2}{\epsilon_r} [N_i N_j] dx dy + \sum_e \int \int_e \frac{1}{\epsilon_r} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] dx dy \\
 [M_{33}] &= \sum_e \int \int_e \frac{1}{\epsilon_r} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] dx dy + \sum_e \int \int_e \frac{1}{\epsilon_r} \left[\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \\
 [M_{12}] &= [M_{21}]^t = - \sum_e \int \int_e \frac{1}{\epsilon_r} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \\
 [M_{13}] &= [M_{31}]^t = \sum_e \int \int_e \frac{\beta}{\epsilon_r} \left[\frac{\partial N_i}{\partial y} N_j \right] dx dy \\
 [M_{23}] &= [M_{32}]^t = \sum_e \int \int_e \frac{\beta}{\epsilon_r} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} N_j \right] dx dy \\
 [N_{11}] &= [N_{22}] = [N_{33}] = \sum_e \int \int_e \beta^2 [N_i N_j] dx dy \\
 [P_{11}] &= \sum_e \int \int_e \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] dx dy \\
 [P_{22}] &= \sum_e \int \int_e \left[\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \\
 [P_{33}] &= - \sum_e \int \int_e \beta^2 [N_i N_j] dx dy \\
 [P_{12}] &= [P_{21}]^t = \sum_e \int \int_e \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \\
 [P_{13}] &= [P_{31}]^t = - \sum_e \int \int_e \beta \left[\frac{\partial N_i}{\partial y} N_j \right] dx dy
 \end{aligned}$$

$$[P_{23}] = [P_{32}]^t = - \sum_e \int \int_e \beta \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} N_j \right] dx dy$$

Bibliographie

- [1] ITOH T., "Recent advances in numerical methods for microwave and millimeter-wave passive structures", *IEEE Transactions on Magnetics* , Vol.25, NO.4, pp.2931-2934, July 1989
- [2] SAAD S.D., "Review of numerical methods for the analysis of arbitrarily-shaped microwave and optical dielectric waveguides", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* , Vol. MTT-33, NO.10, pp.894-899, October 1985
- [3] FOOK L.N. , "Tabulation of methods for the numerical solution of the hollow waveguide problem", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* , pp.322-329, March 1974
- [4] ARLETT P.L. et ZIENKIEWICZ O.C. , "Application of finite elements to the solution of Helmholtz's equation", *Proceeding of IEE* , Vol.115 NO.12, pp.1762-1766, December 1968
- [5] AHMED S. et DALY P. , "Waveguide solution by the finite-element method", *The radio and electronic engineering* , Vol.38 NO.4, pp.217-223, October 1969
- [6] AHMED S. et DALY P. , "Finite element method for inhomogeneous waveguides", *Proceeding of IEE* , Vol.116 NO.10, pp.1661-1664, October 1969
- [7] DALY P., "Hybrid-mode analysis microstrip by finite-element methods", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* , Vol. MTT-19, NO.1, pp.19-25, January 1971

- [8] BERK A.D., "Variational principles for electromagnetic resonators and waveguides", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. AP-4, NO.1, pp.104-111, April 1956
- [9] KONRAD A., "Vector variational formulation of electromagnetic fields in anisotropic media", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-24, pp.553-559, September 1976
- [10] MORISHITA K. et KUMAKAI N., "Unified approach to the derivation of variational expression for electromagnetic fields", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-15, NO.1, pp.34-40, January 1977
- [11] SVEDIN A.M., "A numerically efficient finite-element formulation for the general waveguide problem without spurious modes", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-37, NO.11, pp.1708-1715, November 1989
- [12] BARDI I., "Improved finite-element formulation in terms of the two-component magnetic vector potential for dielectric waveguides", *Department of Electromagnetic Theory, Technical University of Budapest, Budapest Egry J.U.18., Hungary H-1521*
- [13] COLLIN R.E. *Field Theory of Guided Waves*, McGRAW BOOK COMPANY, INC. 1960
- [14] VASSALLO C. *Théorie des Guides d'Ondes Electromagnétiques*, Tome 1, EYROLLES, 1985
- [15] ANGKAEW T., "Finite-element analysis of waveguide modes: A novel approach that eliminates spurious modes", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-35, NO.2, pp.117-123, February 1987
- [16] WEBB P.J. *Developments in a Finite-Element Method for Three-Dimensional Electromagnetic Problems*, Doctor Thesis, Corpus Christi College, University of Cambridge, England, 1981

- [17] MAILE G.L. *Three-Dimensional Analysis of Electromagnetic Problems by Finite Element Method*, Doctor Thesis, Corpus Christi College, University of Cambridge, England, 1979
- [18] WEBB J.P., "Finite-element solution of three-dimensional electromagnetic problems", *IEE Proceeding* , Vol.130, Pt.H, NO.2, pp.153-159, March 1983
- [19] AZIZUR RAHMAM B.M., "Penalty function improvement of waveguide solution by finite element method", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* , Vol. MTT-32, NO.8, pp.922-928, August 1984
- [20] AZIZUR RAHMAM B.M., "Finite element analysis of optical and microwave waveguide problems", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* , Vol. MTT-32, NO.1, pp.20-28, January 1984
- [21] WEBB P.J., "Efficient generation of divergence-free fields for the finite element analysis of 3D cavity resonances", *IEEE Transactions on Magnetics* , Vol.24, NO.1, pp.162-165, January 1988
- [22] WEBB P.J., "The finite element method for finding modes of dielectric-loaded cavities", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* , Vol. MTT-33, NO.7, pp.635-639, July 1985
- [23] KOSHIBA M., "Finite element formulation in terms of the electric-field vector for electromagnetic waveguide problems", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* , Vol. MTT-33, NO.10, pp.900-905, October 1985
- [24] KOSHIBA M., "Improved finite-element method in terms of the magnetic field vector for dielectric waveguides", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* , Vol. MTT-33, NO.3, pp.227-233, March 1985
- [25] HAYATA K., "Vectorial finite-element method without any spurious solution for dielectric waveguiding problems using transverse magnetic-field component", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* , Vol. MTT-34, NO.11, pp.1120-1124, November 1986

- [26] HAYATA K., "Finite element formulation for lossy waveguides", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* , Vol. MTT-36, NO.2, pp.268-276, February 1988
- [27] SCHELKUNOFF S.A. *Electromagnetic Waves*, pp.393
- [28] KONRAD A. *Triangular Finite Element Vector Fields in Electromagnetics*, Doctor Thesis, Department of Electrical Engineering, MCGILL University, Montreal, Québec, July, 1974
- [29] HARRINGTON R.F. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, MCGRAW HILL BOOK COMPANY, INC. 1961
- [30] SAAD T.S. *Microwave Engineers' Handbook*, Artech House INC., Dedham, Massachusetts
- [31] MARCUVITZ N. *Waveguide Handbook*, MCGRAW HILL BOOK COMPANY INC., 1951
- [32] GARDIOL F. *Hyperfréquences*, Dunod, 1987
- [33] WEBB P.J., "Finite element solution of three-dimensional electromagnetic problems", *IEE Proceedings* , Vol.130, Part H, NO.2, pp.153-159 March 1983
- [34] WEBB P.J., "Finite element analysis of H-plane rectangular waveguide problems", *IEE Proceedings* , Vol.133, Part H, NO.2, pp.91-94 April 1986
- [35] M. de Pourcq, "Field and power-density calculations by three-dimensional finite elements", *IEE Proceedings* , Vol.130, Part H, NO.6, pp.377-384 October 1983
- [36] M. de Pourcq, "New power-density calculation method by three-dimensional finite elements", *IEE Proceedings* , Vol.131, Part H, NO.6, pp.411-419 December 1984
- [37] DHATT G. et TOUZOT G., *Une Présentation de la Méthode des Eléments Finis*, Maloine S.A. Editeur, 1984
- [38] ZIENKIEWICZ O.C., *La Méthode des Elements Finis*(traduit de l'anglais), Plurais, France, 1976

- [39] SABONNADIÈRE J.C. et COULOMB J.L. *Elements Finis et CAO*, Hermes, 1986
- [40] SCHWEIG E., "Computer analysis of dielectric waveguide : A finite-difference method", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-32, pp.531-541, May 1989
- [41] DECOTIGNIE J.D., "Birefringence properties of twin-core fibers by finite differences", *Journal of Optics and Communications*, Vol.3, No.1, pp.8-12, March 1982
- [42] KOSHIBA M., "Finite element analysis of H-plan waveguide junction with arbitrarily shaped ferrite post", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-34, NO.1, pp.103-108, January 1985
- [43] LEPRINCE P. *Décharge Hyperfréquence et Microonde* dans l'édition de l'école d'été "Réactivité dans les plasmas", pp.263-296, août, 1983
- [44] SAADA S. *Etude d'une décharge microonde dans les mélanges argon-hélium*, Thèse de doctorat du troisième cycle, Université de Paris-Sud, 1983
- [45] PASQUIERS S. *Décharge Créée par une Onde Progressive en Présence d'un Champ Magnétique Statique*, Thèse de doctorat du nouveau régime, Université de Paris-Sud, 1987
- [46] BOISSE-LAPORTE C. *Etude du Transfert d'Energie d'une Onde à un Plasma*, Thèse de doctorat d'état, Université de Paris-Sud, 1989
- [47] ALLIS W.P. *Waves in Anisotropic Plasma*, Massachusetts Institute of Technology, 1963

