

ORSAY  
n° d'ordre :

UNIVERSITE DE PARIS-SUD  
CENTRE D'ORSAY

# THESE

présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR D'ETAT

SPECIALITE : SCIENCES PHYSIQUES

PAR

HAMDY IBRAHIM ABDEL-GAWAD

**SUJET :** THEORIE DE LA TURBULENCE "FORTE" - APPLICATION A LA TURBULENCE  
ACOUSTIQUE IONIQUE.

soutenu le 2 Mars 1984 devant la Commission d'examen

MM. DELCROIX Président

BOBIN

LAVAL

SAMAIN

TU KHIET







Cette thèse a été préparée dans le Laboratoire de Physique des Gaz et des Plasmas dont le Directeur, Monsieur le Professeur DELCROIX, a accepté de présider le jury, je l'en remercie.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur BOBIN, Monsieur SAMAIN qui m'ont fait l'honneur de participer au jury et plus particulièrement à Monsieur LAVAL qui a accepté d'être le rapporteur.

Je tiens à exprimer à Monsieur TU KHIET, qui a dirigé ce travail depuis plusieurs années, ma profonde gratitude pour son aide importante.

Je remercie également Monsieur DEUTSCH de m'avoir accueilli dans son groupe.

Madame VERGAND a réalisé le travail ingrat du tirage, qu'elle soit ici remerciée.



## RESUME

Dans cette thèse nous appliquons les techniques récemment développées dans la théorie de la turbulence à l'étude de l'évolution de l'instabilité acoustique ionique, générée par un courant de dérive électronique. Nous présentons une méthode permettant de décrire analytiquement et d'une manière autocohérente la dynamique de la déformation de la fonction de distribution des particules en même temps que l'évolution de l'énergie turbulente. Nous avons ainsi discerné les différents mécanismes de saturation de l'instabilité ainsi que leur domaine de validité.

### Mots clés

- Théories renormalisées
- Instabilité acoustique ionique
- Fonction de distribution moyenne
- Mécanismes de saturation

THEORY OF "STRONG" TURBULENCE - APPLICATION TO THE ION ACOUSTIC INSTABILITY.

## ABSTRACT

In this thesis, we apply the technics recently developed in the theory of turbulence to study the evolution of the current-driven ion acoustic instability. We present a method allow to describe analytically and with a self-coherent manner the dynamic of the deformation of the distribution function of particles in the same time as the evolution of the turbulent energy. We have also discerned the saturation mechanisms of the instability as well as their domain of validity.





## I N T R O D U C T I O N

En astrophysique comme en fusion thermonucléaire, le plasma se trouve le plus fréquemment dans un état dit turbulent. Bien qu'à l'heure actuelle, la définition même du terme turbulence reste à préciser, on peut dire cependant qu'un état de turbulence est un état éloigné de l'équilibre thermodynamique et possédant un grand nombre de fluctuations électromagnétiques ou électrostatiques aléatoires, lesquelles sont excitées par le mouvement des particules chargées constituant le plasma. On dit aussi que la turbulence est faible lorsque l'énergie associée aux fluctuations reste très inférieure à l'énergie thermique des électrons et c'est précisément dans ce contexte que se situe notre étude. Dans le cadre même de la turbulence faible, il y a plusieurs types de turbulence plasma selon la nature des modes excités : la turbulence la mieux étudiée et comprise est sans doute celle des ondes de Langmuir (modes à hautes fréquences) alors que la turbulence acoustique ionique (modes à basses fréquences) pose davantage de difficultés et c'est précisément cette dernière qui constitue l'objet de cette thèse.

Les intérêts de l'instabilité acoustique ionique ont été stimulés tant sur le plan théorique que sur le plan expérimental. En effet, par la simplicité de son analyse linéaire, la turbulence acoustique ionique constitue un cas idéal pour tester les différentes théories non linéaires. Expérimentalement, si les instabilités acoustiques ioniques ont été exploitées avantageusement dans les dispositifs à confinement magnétique pour chauffer le plasma grâce à l'augmentation de la résistivité électrique (résistivité anormale) observée dans les plasmas turbulents, elles présentent néanmoins un côté négatif dans les plasmas produits par confinement inertiel. On pense, en effet, qu'elles constituent une des causes majeures qui empêchent le transport du flux de chaleur du laser vers le coeur de la cible.

Dans les expériences de chauffage, elles agissent pour ralentir le courant de chauffage, d'où la résistivité anormale, et dans les plasmas produits par laser (tout comme dans le vent solaire) la conductivité thermique ainsi diminue. Le processus sous-jacent à ces phénomènes est une collision effective entre les particules et les ondes acoustiques ioniques générées par la turbulence. Celle-ci, en effet, domine rapidement les collisions Coulombiennes à température élevée.

Tous ces aspects physiques associés à la turbulence acoustique ionique, cités auparavant, se manifestent à travers les coefficients du transport anormal, qui sont liés à la fréquence de collision effective (liée à l'énergie turbulente). Pour pouvoir examiner le rôle de l'instabilité acoustique dans un plasma turbulent, on doit déterminer l'évolution dynamique de l'énergie turbulente des ondes, c'est là un des buts essentiels de cette thèse, tout au long de laquelle, nous considérons un plasma à deux composantes dont les fonctions de distribution électronique et ionique initiales sont respectivement données par une Maxwellienne déplacée (avec un courant de dérive  $\vec{u}$ ) et une Maxwellienne pure.

Lorsque la vitesse de dérive électronique  $\vec{u}$  excède, en module, la vitesse du son  $C_s$  ( $= \sqrt{T_e/M}$ ) ;  $T_e$  est la température électronique et  $M$  est la masse ionique, les ondes acoustiques ioniques sont générées si toutefois on a l'inégalité  $T_e \gg T_i$ , où  $T_i$  est la température ionique. Cette situation est la même que dans les plasmas produits par laser, lesquels transportent de plus un flux de chaleur. Dans notre cas, le modèle mathématique qui décrit l'évolution dynamique de la turbulence est avantageusement simple.

L'analyse linéaire du système des équations "Vlasov-Poisson" relatives aux caractéristiques de propagation des modes acoustiques ioniques montre que le taux d'amortissement dû aux ions ne compense pas le taux de croissance dû aux électrons et les ondes dans les plasmas croissent exponentiellement. Le système est alors amené à un état dit turbulent. Cette terminologie

s'adresse aux plasmas ayant un niveau de fluctuations de l'énergie potentielle bien supérieur à celui des plasmas thermodynamiques, ce qu'on peut caractériser par un paramètre sans dimension :  $\alpha \equiv \sum_{\vec{k}} (|E_{\vec{k}}|^2 / n_0 k T_e)$  tel que  $\alpha \gg \frac{1}{\Lambda} \text{Log } \Lambda$  ;

où  $\Lambda = n \lambda_D^3$  et  $\lambda_D$  est la longueur de Debye. On se limite toutefois dans cette étude aux plasmas faiblement turbulents caractérisés par  $\alpha \ll 1$ , hypothèse principale dans toutes les théories non-linéaires existantes.

La question qui se pose tout naturellement alors est de savoir comment ces modes se stabilisent et ce problème est donc non-linéaire par essence. Les premiers travaux visant ce problème ont été ceux de Kadomtsev et Petviachvili [1] et se placent dans le cadre de la théorie non-linéaire de la turbulence faible. Cette théorie repose sur un développement perturbatif en puissance du champ électrique turbulent faisant intervenir le propagateur de résonance  $(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})^{-1}$ . Par cette théorie, les effets associés aux interactions non-linéaires entre les ondes acoustiques ioniques et les particules (électrons et ions) ont été étudiés.

- Concernant les ions, pour ces particules les effets non-linéaires sont importants du fait que lorsque deux modes propres  $\omega_{\vec{k}}, \vec{k}$  ;  $\omega_{\vec{k}'}, \vec{k}'$  ne sont pas résonnants avec les ions, le mode de battement  $\omega_{\vec{k}-\vec{k}'}, \vec{k}-\vec{k}'$  peut être résonnant avec ceux-ci et ce processus, appelé effet Landau non-linéaire, a été spéculé par Kadomtsev et Petviachvili [1] comme un mécanisme de dissipation de l'énergie turbulente. L'énergie des ondes, dans ce cas, cesse d'augmenter et atteint un niveau stationnaire avec un spectre d'énergie  $\alpha_k$  donné selon ces auteurs par  $\alpha_k \sim (\frac{u}{v_e})(T_e/T_i)k^{-3} \text{Log}(k_k/k)$ ,  $k_0 < k < \lambda_D^{-1}$  ;  $k_0$  est une limite inférieure artificiellement imposée. On remarque que ce résultat pour le spectre d'énergie conduit aux inconvénients suivants :

i) la coupure a été artificiellement introduite et sans laquelle, l'énergie totale divergerait

ii) le niveau d'énergie turbulente  $\alpha$  cesse d'être petit devant l'unité lorsque le rapport des températures est grand, ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse de la turbulence faible.

En conséquence, l'effet d'amortissement non-linéaire dû aux ions ne constitue pas un mécanisme de saturation plausible de l'instabilité et il serait naturel de chercher du côté des électrons.

- Pour les électrons, Sloan et Drummond [2] ont trouvé que les contributions de ces particules sont pratiquement toujours supérieures à celles des ions. De plus, elles deviennent du même ordre de grandeur que le résultat linéaire pour un niveau d'énergie tel que  $\alpha \gtrsim \frac{m}{M}$ .

On est amené alors à conclure que la théorie de la turbulence faible est incohérente. Cette incohérence est due au fait que la fonction de résonance  $(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})^{-1}$  apparaît autant de fois qu'on effectue l'itération et dans le cas où la vitesse thermique est supérieure à la vitesse de phase des ondes, cette fonction a un pôle. Nous montrons (chapitre I, partie I) qu'en effet le paramètre du développement n'est pas la puissance du champ électrique (normalisé) :  $\alpha$ , mais  $\alpha \left( \frac{v_{e,i}}{v_{\text{phase}}} \right)^2$  ;  $v_{e,i} = \sqrt{\frac{T_e}{m, M}}$ . Dans le cas de l'instabilité acoustique ionique où  $v_{\text{phase}} \approx C_s$ , ce paramètre devient, pour les électrons,  $\alpha \left( \frac{v_e}{C_s} \right)^2$ . Ce qui montre que le développement perturbatif est convergent tant que  $\alpha < \frac{m}{M}$ . Pour  $\alpha \gtrsim \frac{m}{M}$  ce développement diverge et c'est le cas étudié en [2].

Afin d'améliorer la théorie classique de la turbulence faible des théories différentes "renormalisées" ont été proposées :

- 1) Théories basées sur la resommation des termes les plus divergents dans le développement classique [3]
- 2) Théories d'élargissement de résonance [4]

- 3) Théories qui tiennent compte des termes non-markoviens négligés dans les théories (1,2) [5].

L'essentiel de ces théories peut se résumer comme suit :

- La fonction de résonance n'est plus donnée par  $(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})^{-1}$  mais par  $(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v} + i\nu_k)^{-1}$  ;  $\nu_k$  est la fréquence de collision turbulente entre les ondes et les particules. En conséquence, la résonance est élargie et s'étend aux particules satisfaisant à l'inégalité  $|\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}| < \nu_k$ , ce qui élimine la divergence lorsque  $\omega_{\vec{k}} = \vec{k} \cdot \vec{v}$ . Le paramètre du développement devient  $\alpha \left( \frac{v_{e,i}}{\nu_k} \right)^2$  et vaut approximativement  $\alpha^{1/2}$  pour les électrons, comme nous le montrons au chapitre III de la partie I. Dans la limite usuelle,  $\alpha \ll 1$ , ce paramètre est toujours inférieur à un, ce qui montre l'adéquation de la théorie renormalisée.
- La modification de la fonction de résonance a une conséquence indirecte sur la limitation de l'instabilité acoustique ionique.

En effet, l'élargissement de résonance, étendue à une plus grande population des ions conduit éventuellement à une saturation de l'instabilité [6]. Dans cette hypothèse de travail les résultats pour l'énergie des ondes sont en accord avec ceux obtenus dans les expériences numériques [7] pour des rapports  $T_e/T_i$  inférieurs à 50. Pour des rapports plus élevés de  $T_e/T_i$ , ce mécanisme n'est plus efficace.

En ce qui concerne les électrons, nous montrerons (chapitre I, partie II), que l'élargissement de résonance mène seulement à une modification du taux de croissance et ne constitue pas un mécanisme de saturation possible de l'instabilité. Dans ce même cadre de la théorie renormalisée, on obtient pour le taux de croissance non-linéaire uniquement une correction triviale contrairement à la théorie classique.

On note que i) dans toutes les études, citées auparavant, des mécanismes de saturation de l'instabilité, l'évolution de la fonction de distribution moyenne FDM (ionique et électronique),

considérée comme un processus lent au cours de la relaxation de l'instabilité, a été négligée

ii) l'amortissement dû aux ions par l'élargissement de résonance n'est pas plausible lorsque  $T_e/T_i$  est grand et le mécanisme de saturation de l'instabilité acoustique ionique reste encore indéterminé tant que l'évolution de la FDM n'a pas été considérée. Elle est jusqu'à présent mal connue de par la difficulté de résolution de l'équation de diffusion qui la décrit avec une variable temporelle dépendante de l'énergie des ondes

$$\tau = \int_0^t v_{\text{eff}}(t') dt', \quad (v_{\text{eff}} \sim \lambda_D^{-1} v_e \alpha \text{ cf. (III.31) partie II})$$
 qui nécessite en plus la résolution de l'équation cinétique des ondes.

Des études qui tiennent compte de l'évolution de la FDM ont été effectuées, en imposant une hypothèse sur l'énergie des ondes [8] : qu'elle croît d'une manière monotone et atteint un niveau stationnaire. Ce qui permet de considérer  $\tau$  comme une variable indépendante de la résolution de l'équation cinétique des ondes. De ce fait les résultats obtenus par ces études ne sont pas cohérents [9]. On remarque que toutes les études existantes ne déterminent pas l'évolution de l'instabilité et de la FDM de façon autocohérente puisque, on y trouve que les équations relatives à ce problème sont découplées, en imposant une hypothèse i) soit sur l'évolution de la FDM [1-7] ii) soit sur l'évolution de l'instabilité [8].

Nous développons une méthode (chapitre II, partie II) qui permet de décrire l'évolution de la FDM de façon autocohérente avec l'évolution de l'instabilité, en montrant toutefois que les hypothèses imposées en [1-10] ne sont pas satisfaites. A l'aide de la formule obtenue au chapitre II pour la FDM, nous étudions l'effet de la modification de cette fonction sur l'évolution de l'instabilité acoustique ionique et nous montrons que :

i) La FDM électronique, qui est initialement une Maxwellienne déplacée, s'isotropise au cours du temps du fait que la vitesse de dérive décroît au cours de l'évolution de l'instabilité.

Autrement dit, la source d'énergie fournie par les électrons aux ondes s'épuise, ce qui réduit le taux de croissance (voir [10]).

- ii) L'évolution de la partie isotrope est un processus très lent et lié au chauffage des électrons.
- iii) La modification de la FDM électronique constitue un mécanisme dominant de saturation de l'instabilité dans un plasma ayant un très grand rapport des masses et  $u/v_e > 0,3$  (cf. fig. (18)).
- iv) La FDM ionique, qui est initialement une Maxwellienne pure, devient anisotrope.
- v) Les ondes cèdent une partie de leur quantité de mouvement aux ions non-résonnants et les derniers se transfèrent au domaine résonnant où ils contribuent au processus de stabilisation. Ce processus appelé "la formation des ions énergiques dans la queue de la FDM", peut constituer un mécanisme de saturation efficace lorsque le rapport des masses n'est pas très grand et  $u/v_e > 0,5$  (cf. fig. (18)).
- vi) L'effet de l'élargissement de résonance sur la modification de la FDM ionique est plus important qualitativement que quantitativement.
- vii) L'étude que nous avons menée montre que l'énergie totale des ondes croît d'une manière monotone et atteint une valeur maximum et ensuite elle décroît, ce qui est en accord avec les simulations numériques récentes [11], et rend caduque les travaux cités en [8].

REFERENCES DE L'INTRODUCTION

- [1] KADOMTSEV, B.B. et PETVIASHVILI, V.I., JETP, 16-1578 (1963)
- [2] SLOAN, M.L. et DRUMMOND, W.E., Phys. Fluids, 13-2554 (1970)
- [3] Voir par exemple, KONO, M., et ICHIKAWA, Y.H., Prog. Theor. Phys., 49-754 (1973)
- [4] Voir par exemple, RUDAKOV, L.I. et TSYTOVICH, V.N., Plasma Phys., 13-213 (1971)
- [5] MISGUICH, J.H. et BALESCU, R., J. Plasma Phys., 13-385 (1975)
- [6] SLEEPER, A.M., WEINSTOCK, J. et BEZZERIDES, B., Phys. Fluids 16-1508 (1973)
- [7] BISKAMP, D. et CHODURA, R.C., Phys. Rev. Lett. 27-1553 (1971)
- [8] DUM, C.T., Phys. Fluids, 21-945 (1978)  
GALEEV, A.A. et SAGDEEV, R.Z., Review of Plasma Physics, vol. 7 (1979) (ed. M.A. Leontovich) Consultant Bureau  
CHOI, D.I. et HORTON, Jr. W., Phys. Fluids, 18-858 (1975)
- [9] BALESCU, R., J. Plasma Phys. 24-551 (1980)
- [10] TU KHIET et ABDEL-GAWAD, H.I., Phys. Rev. Lett., 46-1575 (1981)  
ABDEL-GAWAD, H.I., J. de Physique, 43-883 (1982)
- [11] ISHIHARA, O. et HIROSE, A., Phys. Fluids, 26-100 (1983)

Article annexé à la thèse :

TU KHIET et ABDEL-GAWAD, H.I., J. de Physique Lett., 41-L-189 (1980).

\* \*  
\*



## TABLE DES MATIERES

### PREMIERE PARTIE : THEORIE DE LA TURBULENCE FORTE

#### CHAPITRE I : THEORIE CLASSIQUE DE LA TURBULENCE ACOUSTIQUE

IONIQUE.....	1
I.a. Théorie linéaire de l'instabilité acoustique due à un courant de dérive.....	1
I.b. Théorie non-linéaire de l'instabilité acoustique ionique.....	6
I.c. Défaut de la théorie de Kadomtsev.....	12
I.d. Nécessité d'une théorie adéquate de la turbulence acoustique ionique.....	14

#### CHAPITRE II : THEORIE QUASI-LINEAIRE..... 16

II.a. Introduction.....	16
II.b. L'équation quasi-linéaire pour la fonction de distribution moyenne.....	17
II.c. Fonction de corrélation du champ électrique.....	19
II.d. Equation de diffusion quasi-linéaire.....	20
II.e. Equation cinétique d'onde.....	21
II.f. Méthode diagrammatique.....	23
II.g. Conditions de validité.....	26
II.h. Discussion générale.....	27

#### CHAPITRE III : THEORIES RENORMALISEES..... 28

III.a. Introduction.....	28
III.b. Approche statistique de la théorie de turbulence forte.....	30
III.b.1. Calcul de la fonction d'orbite moyenne	33
III.b.2. Fonction de résonance renormalisée....	38
III.c. Equation de fermeture.....	39
III.c.1. Relation de dispersion.....	39

III.d. Conditions de validité.....	40
III.e. Méthode utilisant la resommation des diagrammes.....	41
III.f. Effets non-markoviens.....	45
III.g. Conclusions.....	48
III.h. Conservation du nombre total des particules, de l'énergie et de la quantité de mouvement.....	49
III.h.1. Conservation du nombre total des particules.....	49
III.h.2. Conservation de l'énergie totale.....	50
III.h.3. Conservation de la quantité de mouvement.....	52

## DEUXIEME PARTIE : APPLICATION A LA TURBULENCE ACOUSTIQUE IONIQUE

<u>CHAPITRE I</u> : EFFET DU MECANISME DE L'ELARGISSEMENT DE RESONANCE.....	53
I.a. Effet d'amortissement dû à l'élargissement de résonance.....	54
I.a.1. Calcul de la partie réelle de la fonction diélectrique renormalisée.....	56
I.a.2. Calcul de la partie imaginaire.....	57
I.a.3. Taux d'amortissement.....	58
I.b. Résumé général.....	61
I.c. Calcul du taux d'amortissement non-linéaire dû aux électrons.....	62

<u>CHAPITRE II</u> : EVOLUTION DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION MOYENNE.....	69
II.a. Introduction.....	69
II.b. Méthodes analytiques pour décrire l'évolution de la fonction de distribution moyenne.....	71
II.b.1. Première méthode.....	71
II.b.1'. Conservation du nombre total des particules.....	74
II.b.2. Deuxième méthode.....	76
II.c. Résumé.....	80

<u>CHAPITRE III</u> : EFFET DE L'ÉVOLUTION DE LA FDM ÉLECTRONIQUE..	82
III.a. Introduction.....	82
III.b. Calcul des cumulants.....	84
III.b.1. Cas du spectre isotrope.....	85
III.b.2. Cas d'un spectre anisotrope.....	87
III.c. Résolution de l'équation cinétique des ondes....	94
III.d. Evolution de la FDM électronique.....	
III.e. Conclusions.....	97
<u>CHAPITRE IV</u> : EFFET DE L'ÉVOLUTION DE LA FDM IONIQUE.....	98
IV.a. Introduction.....	98
IV.b. Calcul des premier et second cumulants.....	99
IV.b.1. Cas du spectre isotrope.....	100
IV.b.2. Cas d'un spectre anisotrope.....	102
IV.c. Evolution dynamique de l'instabilité.....	105
IV.d. Evolution de la FDM ionique.....	109
IV.e. Calcul de la densité et la température de la queue de la FDM.....	110
IV.f. Calcul de la densité et la température du corps de la FDM.....	113
IV.g. Comparaison entre les résultats analytiques et ceux obtenus dans les expériences numériques....	116
IV.h. Comparaison avec les résultats du chapitre précédent.....	117
IV.i. Conclusions.....	118
CONCLUSIONS.....	120
APPENDICE A.....	122
APPENDICE B.....	124
APPENDICE C.....	129
APPENDICE D.....	133
REFERENCES.....	136



**P R E M I E R E   P A R T I E**



## C H A P I T R E I

### T H E O R I E C L A S S I Q U E D E L A T U R B U L E N C E A C O U S T I Q U E I O N I Q U E

#### I. a. T H E O R I E L I N E A I R E D E L ' I N S T A B I L I T E A C O U S T I Q U E I O N I Q U E D U E A U N C O U R A N T D E D E R I V E

Une des méthodes permettant de créer une instabilité acoustique ionique consiste à appliquer un champ électrique statique  $E_0$  sur un plasma. Il est essentiel que les électrons "runaway" ne soient pas produits, ce qui impose la condition  $E_0 \ll E_{Dr}$ , où  $E_{Dr}$  est le champ de Dreicer défini comme celui requis pour amener un électron à une vitesse double de la vitesse thermique (électronique) :  $v_e$  pendant un temps égal à l'inverse de la fréquence de collision électron-ion  $\nu_{ei}$ . En utilisant la formule  $E_{Dr} = m_e \nu_{ei} v_e / e$  et en considérant un plasma ayant une densité  $n_e = 10^{14}/\text{cm}^3$  et une température  $T_e = 5 \text{ keV}$ , on trouve que le champ "runaway" est de l'ordre de 200 volt/cm.

A cause de leur inertie, les ions peuvent être considérés comme immobiles alors que les électrons dérivent, par rapport aux premiers, par une vitesse notée  $\vec{u}$ .

Dans ce qui suit, nous représentons les distributions électronique et ionique par :

$$F_e(\vec{v}) = \left( n_0 / \sqrt{\pi^3} v_e^3 \right) \exp\left( - \frac{(\vec{v} - \vec{u})^2}{v_e^2} \right)$$

$$F_i(\vec{v}) = \left( n_0 / \sqrt{\pi^3} v_i^3 \right) \exp\left( - \frac{v^2}{v_i^2} \right) \quad (I.1)$$

où  $v_{e,i} = \sqrt{\frac{2T_{e,i}}{m,M}}$  désigne la vitesse thermique et nous supposons

de plus la condition  $T_e \gg T_i$ , situation pratique des plasmas de fusion. Il est également à noter que la vitesse de dérive  $\vec{u}$  qui figure dans (I.1) a été considérée comme un paramètre constant, hypothèse simplificatrice certes mais corroborée par les observations expérimentales, par exemple dans les travaux de Burchenko et al. [1] on observe une remarquable proportionnalité entre  $|\vec{u}|$  et la vitesse thermique  $v_e$  pour une large gamme de cette dernière, ceci est dû au fait que le plasma chauffe, ce qui explique l'augmentation de  $v_e$  en même temps que croît la vitesse de dérive.

Sur la figure (1), nous représentons les fonctions de distribution électronique et ionique correspondant à un rapport de températures  $T_e/T_i = 50$  et un rapport de vitesse  $\frac{|\vec{u}|}{v_e} = 1/2$ . Nous y reportons également la valeur de la vitesse acoustique ionique définie comme  $C_s = \sqrt{\frac{T_e}{M}}$ .

Nous allons maintenant étudier l'évolution du système à partir de l'état décrit par (I.1) en utilisant le système des équations de Vlasov-Poisson qui sont :

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \frac{e_s}{m_s} \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right] f_s(\vec{x}, \vec{v}, t) &= 0 \\ \text{div } \vec{E}(\vec{x}, t) &= 4\pi \sum_s e_s \int d\vec{v} f_s(\vec{x}, \vec{v}, t) , \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.2})$$

où  $f_s$  désigne la distribution au temps  $t$  de l'espèce  $s$ , ( $s = e, i$ ), au point  $(\vec{x}, \vec{v})$  de l'espace des phases, les autres notations sont usuelles. En suivant la méthode standard, on décompose la fonction de distribution selon

$$f_s(\vec{x}, \vec{v}, t) = f_{0s}(\vec{v}) + \tilde{f}_s(\vec{x}, \vec{v}, t), \quad (\text{I.3})$$

où  $f_{0s}(\vec{v})$  désigne la distribution initiale et  $\tilde{f}_s(\vec{x}, \vec{v}, t)$  l'écart par rapport à celle-ci. En confondant la distribution initiale avec la valeur moyenne représentée dans (I.1) et en reportant (I.3) dans (I.2), on obtient :



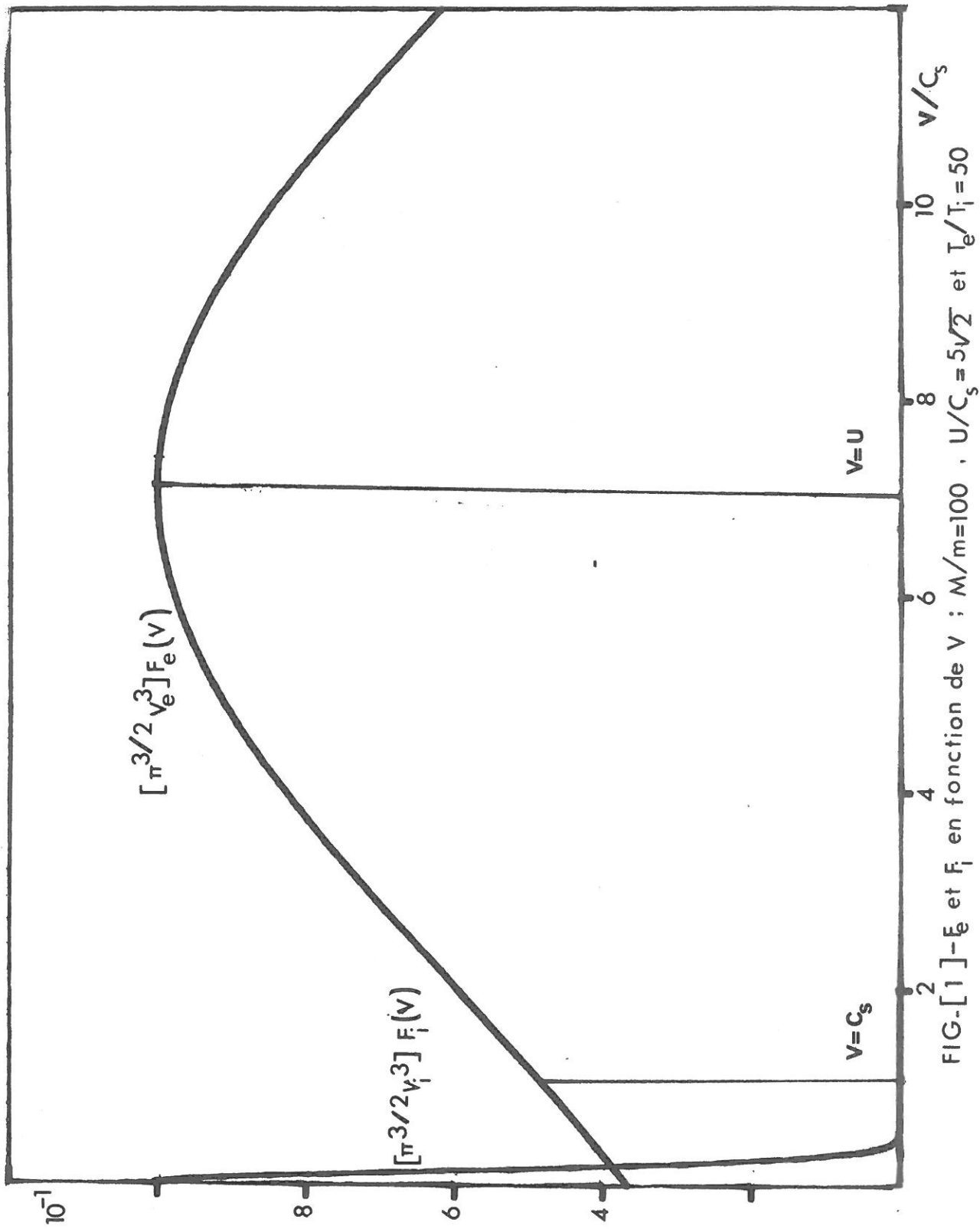


FIG.-[1]  $]-E_e$  et  $F_i$  en fonction de  $v$  :  $M/m=100$  ,  $U/C_s=5\sqrt{2}$  et  $T_e/T_i=50$



$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right) \tilde{f}_s(\vec{x}, \vec{v}, t) = -\frac{e_s}{m_s} \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} f_{os}(\vec{v}) - \frac{e_s}{m_s} \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \tilde{f}_{os}(\vec{x}, \vec{v}, t), \quad (\text{I.4.a})$$

$$\text{div } \vec{E}(\vec{x}, t) = 4\pi \sum_s e_s \int d\vec{v} \tilde{f}_s(\vec{x}, \vec{v}, t) \quad (\text{I.4.b})$$

Dans le cadre linéaire considéré dans ce paragraphe, le terme non-linéaire qui figure dans le membre de droite de (I.4.a) sera négligé, on peut ainsi faire une analyse de Fourier-Laplace du système, ce qui donne pour la composante  $\vec{k}, \omega$  de la fluctuation

$$\tilde{f}_{s\vec{k},\omega}^{(1)}(\vec{v}) = -\frac{e_s}{m_s} g_{\vec{k},\omega}^{(0)} \vec{E}_{\vec{k},\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} f_{os}(\vec{v}), \quad (\text{I.5})$$

$$g_{\vec{k},\omega}^{(0)} = \frac{i}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v} + i\delta},$$

où  $\delta$  représente la prescription du contour de l'intégration due à l'emploi de la transformation de Laplace. En reportant (I.5) dans l'équation transformée de (I.4.b), on obtient l'équation de dispersion :

$$\left. \begin{aligned} \zeta^L(\vec{k}, \omega) \vec{E}_{\vec{k},\omega} &= 0, \\ \zeta^L(\vec{k}, \omega) &= 1 - \frac{4\pi i}{k^2} \sum_s e_s^2 \int d\vec{v} g_{\vec{k},\omega}^{(0)} \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} f_{os}(\vec{v}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.6})$$

et  $f_{oe,i}$  sont donnés par (I.1). La fonction diélectrique s'écrit explicitement :

$$\zeta^L(\vec{k}, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} Z'\left(\frac{\Omega_{\vec{k}}}{k v_e}\right) - \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_i^2} Z'\left(\frac{\omega}{k v_i}\right), \quad (\text{I.7})$$

$$\Omega_{\vec{k}} = \omega - \vec{k} \cdot \vec{u}$$

où  $Z'(y)$  est la dérivée de la fonction de dispersion  $Z(y)$  donnée par :

$$Z(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt e^{-t^2}}{t - y - i\delta} \quad (\text{I.8})$$

et qui a été tabulée par Fried et Conte [2]. La fonction  $Z(y)$  possède les comportements limites suivants :

$$\text{Re}Z(y) \approx -2y \left( 1 - \frac{2y^2}{3} + \dots \right), \quad y \ll 1 \quad (\text{I.8.a})$$

$$\text{Re}Z(y) \approx -\frac{1}{y} \left( 1 + \frac{1}{2y^2} + \dots \right), \quad y \gg 1 \quad (\text{I.8.b})$$

$$\text{Im}Z(y) = \sqrt{\pi} e^{-y^2} \quad (\text{I.8.c})$$

Dans notre cas, comme on s'intéresse aux modes de basses fréquences satisfaisant à une double condition  $\frac{\omega}{kv_i} \gg 1$  et  $\frac{|\vec{k} \cdot \vec{u} - \omega|}{kv_e} \ll 1$ , on emploie donc pour la fonction  $Z$  l'expression asymptotique pour les ions et le développement en série (I.8.a) pour les électrons, ce qui donne pour les parties réelle et imaginaire de la fonction diélectrique

$$\text{Re}\zeta^L(\vec{k}, \omega) = 1 + \frac{1}{k^2 \lambda_D^2} - \frac{\omega^2 p_i}{\omega^2}, \quad (\text{I.9})$$

$$\text{Im}\zeta^L(\vec{k}, \omega) = 2\sqrt{\pi} \frac{\omega^2 p_i \omega}{k^3 v_i^3} e^{-\left(\frac{\omega^2}{k^2 v_i^2}\right)} + 2\sqrt{\pi} \frac{\omega^2 p_e \Omega_{\vec{k}}}{k^3 v_e^3} e^{-\left(\frac{\Omega_{\vec{k}}^2}{k^2 v_e^2}\right)}, \quad (\text{I.10})$$

où  $\lambda_D = (T_e/4\pi e^2 n_0)^{1/2}$  désigne la longueur de Debye associée aux électrons.

En utilisant la méthode standard, la fréquence propre réelle s'obtient en résolvant l'équation  $\text{Re}\zeta^L(\vec{k}, \omega) = 0$  et on a

$$\omega_{\vec{k}}^R = \text{Re}\omega_{\vec{k}} = \begin{cases} \omega_k & \vec{k} \cdot \vec{u} > 0 \\ -\omega_k & \vec{k} \cdot \vec{u} < 0, \end{cases}$$

$$\omega_k = kc_s / \sqrt{1 + k^2 \lambda_D^2} \quad (\text{I.11})$$

et rappelons que  $C_s = \sqrt{T_e/M}$  est la vitesse du son.

La partie imaginaire de la fréquence s'obtient en développant la fonction diélectrique  $\zeta^L(\vec{k}, \omega)$  en série de Taylor autour de la fréquence réelle  $\omega_k^R$  selon :

$$\zeta^L(\vec{k}, \omega) = (\omega - \omega_k^R) \left( \frac{\partial \text{Re} \zeta^L(\vec{k}, \omega_k^R)}{\partial \omega_k^R} \right) + i \text{Im} \zeta^L(\vec{k}, \omega_k^R) ,$$

ce qui donne

$$\gamma_k^L = - \text{Im} \zeta^L(\vec{k}, \omega_k^R) / \left( \frac{\partial}{\partial \omega_k^R} \text{Re} \zeta^L(\vec{k}, \omega_k^R) \right) \quad (\text{I.12})$$

Dans notre cas  $\gamma_k^L$  est donné explicitement par :

$$\gamma_k^L = \gamma_{ke}^L + \gamma_{ki}^L , \quad (\text{I.13})$$

$$\gamma_{ki}^L = - \frac{\sqrt{\pi} \omega_k^R}{(1+k^2 \lambda_D^2)^{3/2}} \left( T_e / 2T_i \right)^{3/2} e^{-\left( T_e / 2T_i (1+k^2 \lambda_D^2) \right)} \quad (\text{I.13.a})$$

$$\gamma_{ke}^L = - \frac{\sqrt{\pi} \omega_k^R \Omega_k^R}{2(1+k^2 \lambda_D^2) k v_e} e^{-\left( \Omega_k^2 / k^2 v_e^2 \right)} , \quad \omega_k^R \equiv \omega_k^R \quad (\text{I.13.b})$$

Si  $\gamma_{ki}^L$  est toujours négatif et reflète le fait que les ions contribuent à un amortissement des ondes, la partie électronique  $\gamma_{ke}^L$  peut être positive si on a  $\vec{k} \cdot \vec{u} - \omega_k^R > 0$  soit lorsque l'on a  $u > C_s$  et pour les modes dont le vecteur d'onde  $\vec{k}$  se trouve dans un cône autour du vecteur  $\vec{u}$ , dit cône de Cerenkov, dont le demi-angle au sommet  $\theta_0$  est donné par  $\theta_0 = \text{Arc cos} \left( \frac{C_s}{u} \right)$ . Il s'ensuit que les électrons contribuent à une déstabilisation et si on a  $T_e \gg T_i$ , l'effet d'absorption des ions (effet Landau) est négligeable devant l'effet déstabilisant des électrons et pratiquement tous les modes qui se propagent dans la direction du vecteur  $\vec{u}$  sont instables, si toutefois on a  $u \gg C_s$ . Ces résultats peuvent s'expliquer clairement si on se réfère à la figure (1) dans laquelle on trouve

que la vitesse de phase des modes acoustiques ioniques se trouve sur la partie ascendante (à pente positive) de la fonction de distribution électronique et sur la queue à pente négative de la fonction de distribution ionique.

Les résultats de l'analyse linéaire cités brièvement ci-dessus ont montré que pour des valeurs de la vitesse de dérive  $u$  supérieures à la vitesse du son  $C_s$ , le plasma devient instable vis-à-vis des modes acoustiques, lesquels croissent exponentiellement, tout au moins dans la phase linéaire, avec un taux de croissance  $\gamma_k^I$  donné par (I.13).

La question qui se pose tout naturellement alors est de savoir comment ces modes se stabilisent. Ce problème est donc non-linéaire par essence et nous allons exposer brièvement les théories anciennes qui lui ont été destinées et nous soulignerons par la suite la nécessité d'élaborer une théorie plus adéquate.

#### I. b. THEORIE NON-LINEAIRE DE L'INSTABILITÉ ACOUSTIQUE IONIQUE

Les premiers travaux non-linéaires sur ce sujet ont été ceux de Kadomtsev et Petviashvili [3] et sont placés dans le cadre de la turbulence faible. Dans cet esprit, on tient compte à présent du terme non-linéaire figurant dans le second membre de l'équation (I.4.a) et on pousse le calcul de la partie fluctuante jusqu'à l'ordre 3 par rapport au champ électrique. En utilisant la méthode d'itération qui donne la contribution à un ordre en terme de la quantité précédente conformément à

$$\gamma_{s\vec{k},\omega}^{(n)} = - \frac{e_s}{m_s} \sum_{\vec{k}',\omega'} g_{\vec{k},\omega}^{(0)} \phi_{\vec{k}',\omega'} \cdot \vec{k}' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \gamma_{s\vec{k}-\vec{k}',\omega-\omega'}^{(n-1)}, \quad n \geq 2 \quad (\text{I.14})$$

En reportant ensuite les contributions d'ordre 2 et 3 dans le second membre de l'équation de Poisson écrite sous la forme :

$$k^2 \phi_{\vec{k}, \omega} = 4\pi \sum_s e_s \int d\vec{v} \sum_{n=1}^{n=3} \tilde{f}_{s\vec{k}, \omega}^{(n)}, \quad (\text{I.4.b})$$

on obtient au lieu de l'équation de dispersion linéaire (cf. (I.6)) l'équation plus exacte suivante :

$$\begin{aligned} & \zeta^L(\vec{k}, \omega) \phi_{\vec{k}, \omega} + \sum_{\vec{k}' + \vec{k}'' = \vec{k}} \zeta^{(2)}(\vec{k}', \vec{k}''; \omega', \omega'') \phi_{\vec{k}', \omega'} \phi_{\vec{k}'', \omega''} \\ & + \sum_{\vec{k}' + \vec{k}'' + \vec{k}''' = \vec{k}} \zeta^{(3)}(\vec{k}', \vec{k}'', \vec{k}'''; \omega', \omega'', \omega''') \\ & \times \phi_{\vec{k}', \omega'} \phi_{\vec{k}'', \omega''} \phi_{\vec{k}''', \omega'''} = 0, \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

où  $\zeta^{(2)}$  et  $\zeta^{(3)}$ , appelés polarisabilités non-linéaires d'ordre 2 et 3, sont :

$$\begin{aligned} \zeta^{(2)}(\vec{k}', \vec{k}''; \omega', \omega'') &= \frac{1}{2} \sum_s (e/m)_s \frac{\omega_{ps}^2}{|\vec{k}' + \vec{k}''|^2} \times \int d\vec{v} g_{\vec{k}' + \vec{k}'', \omega' + \omega''}^{(0)} \\ & \times \left[ \vec{k}' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} g_{\vec{k}'', \omega''}^{(0)} \vec{k}'' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} + k'' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} g_{\vec{k}', \omega'}^{(0)} \vec{k}' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right] f_{os}(\vec{v}) \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

et

$$\begin{aligned} \zeta^{(3)}(\vec{k}', \vec{k}'', \vec{k}'''; \omega', \omega'', \omega''') &= \frac{i}{2} \sum_s \left(\frac{e}{m}\right)_s^2 \frac{\omega_{ps}^2}{|\vec{k}' + \vec{k}'' + \vec{k}'''|^2} \int d\vec{v} \\ & \times g_{\vec{k}' + \vec{k}'' + \vec{k}''', \omega' + \omega'' + \omega'''}^{(0)} \vec{k}' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} g_{\vec{k}'' + \vec{k}''', \omega'' + \omega'''}^{(0)} \\ & \times \left\{ k'' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} g_{\vec{k}''', \omega'''}^{(0)} \vec{k}''' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} + \vec{k}''' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} g_{\vec{k}'', \omega''}^{(0)} \vec{k}'' \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right\} f_{os}(\vec{v}) \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

L'équation (I.15) montre qu'à cause de l'interaction, deux modes propres  $(k', \omega')$  et  $(\vec{k}'', \omega'')$  peuvent se coupler pour donner un mode  $(\vec{k}, \omega)$  avec  $\vec{k} = \vec{k}' + \vec{k}''$ ,  $\omega = \omega' + \omega''$  selon

$$\phi_{\vec{k},\omega}^{(2)} = \frac{1}{\zeta^L(\vec{k},\omega)} \sum_{\substack{\vec{k}' + \vec{k}'' = \vec{k} \\ \omega' + \omega'' = \omega}} \zeta^{(2)}(\vec{k}', \vec{k}''; \omega', \omega'') \phi_{\vec{k}',\omega'} \phi_{\vec{k}'',\omega''} \quad (I.18)$$

à signaler que dans le cas des modes acoustiques ioniques, la condition de résonance  $\vec{k}' \pm \vec{k}'' = \vec{k}$  et  $\omega' \pm \omega'' = \omega$  est impossible et il n'y a pas de singularité dans le dénominateur dans (I.18). On dit, dans ce cas, que le mode  $(\vec{k}, \omega)$  ainsi généré est un mode de battement et celui-ci joue un rôle primordial dans le cas où le couplage résonnant n'a pas lieu. A présent, retournons à l'équation (I.15), après l'avoir multipliée par la quantité complexe conjuguée de  $\phi_{\vec{k},\omega}$ , on effectue une moyenne sur les phases. Dans cette opération, on stipule que la phase d'un mode  $(\vec{k}, \omega)$  est distribuée d'une manière aléatoire si bien que la fonction de corrélation double  $\langle \phi_{\vec{k},\omega}^* \phi_{\vec{k}',\omega'} \rangle$  n'est non nulle que si on a  $\vec{k}' = \vec{k}$  et  $\omega' = \omega$  et on pose dans ce cas

$$\langle \phi_{\vec{k},\omega}^* \phi_{\vec{k}',\omega'} \rangle = 2\pi \delta(\omega - \omega') \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} I_{\vec{k},\omega} \quad (I.19)$$

où  $I_{\vec{k},\omega}$  est appelé la fonction spectrale. En utilisant la représentation usuelle du potentiel électrique dans la théorie de turbulence faible, la fonction  $I_{\vec{k},\omega}$  est représentée par :

$$I_{\vec{k},\omega} = 2\pi \delta(\omega - \omega_{\vec{k}}) I_{\vec{k}}(t) \quad (I.19.a)$$

En effectuant cette opération de moyenne, les termes non linéaires de (I.15) donnent lieu ainsi à des corrélations quadruple et triple de la fonction  $\phi_{\vec{k},\omega}$ , lesquelles sont évaluées en termes des corrélations doubles de la manière suivante :

- Une fonction de corrélation quadruple est approximée par la somme des produits de deux fonctions de corrélation double, ce qui donne, compte tenu de l'approximation sur les phases aléatoires, le résultat suivant :

$$\begin{aligned} & \sum_{\vec{k}' + \vec{k}'' + \vec{k}''' = \vec{k}} \zeta^{(3)}(\vec{k}', \vec{k}'', \vec{k}'''; \omega', \omega'', \omega''') \langle \phi_{\vec{k},\omega}^* \phi_{\vec{k}',\omega'} \phi_{\vec{k}'',\omega''} \phi_{\vec{k}''',\omega'''} \rangle \\ & = 2 \sum_{\vec{k}' \neq \vec{k}} \zeta^{(3)}(\vec{k}, \vec{k}', \vec{k}; \omega', -\omega', \omega) I_{\vec{k}',\omega'} I_{\vec{k},\omega} \quad (I.20) \end{aligned}$$



où  $\zeta^{(3)}$  est donné par (I.7), et le facteur 2 provient du fait que  $\zeta^{(3)}(\vec{k}', -\vec{k}', \vec{k}; \omega', -\omega', \omega) = \zeta^{(3)}(\vec{k}', \vec{k}, -\vec{k}'; \omega', \omega, -\omega')$ .

- En ce qui concerne la fonction de corrélation triple  $\langle \phi_{\vec{k}, \omega}^* \phi_{\vec{k}', \omega'} \phi_{\vec{k}-\vec{k}', \omega-\omega'} \rangle$ , elle fournit une contribution quadratique en  $I_{\vec{k}, \omega}$  si l'une des fonctions  $\phi$  est un mode de battement conformément à la formule (I.18). Dans notre cas, compte tenu du fait que le couplage résonnant n'est pas possible, on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{\vec{k}'} \langle \phi_{\vec{k}, \omega}^* \phi_{\vec{k}', \omega'} \phi_{\vec{k}-\vec{k}', \omega-\omega'} \rangle \zeta^{(2)}(\vec{k}', \vec{k}-\vec{k}'; \omega', \omega-\omega') \\ & = 4 \sum_{\vec{k}'} \frac{\zeta^{(2)}(\vec{k}', \vec{k}-\vec{k}'; \omega', \omega-\omega') \zeta^{(2)}(\vec{k}, -\vec{k}'; \omega, -\omega')}{\zeta^L(\vec{k}-\vec{k}', \omega-\omega')} I_{\vec{k}', \omega'} I_{\vec{k}, \omega} \end{aligned} \quad (I.21)$$

où on s'est servi de la symétrie par rapport aux indices  $\vec{k}_1 \omega_1, \vec{k}_2 \omega_2$  :  $\zeta^{(2)}(\vec{k}_1, \vec{k}_2; \omega_1, \omega_2) = \zeta^{(2)}(\vec{k}_2, \vec{k}_1; \omega_2, \omega_1)$  (cf. (I.16)).

Le résultat de l'opération moyenne sur les phases des ondes peut alors s'écrire sous la forme :

$$\zeta^{NL}(\vec{k}, \omega) I_{\vec{k}, \omega} = 0, \quad (I.22)$$

où  $\zeta^{NL}(\vec{k}, \omega)$  désigne la constante diélectrique non-linéaire, laquelle dépend donc de la fonction spectrale de l'énergie et

$$\begin{aligned} \zeta^{NL}(\vec{k}, \omega) & = \zeta^L(\vec{k}, \omega) + 4 \sum_{\vec{k}'} \frac{\zeta^{(2)}(\vec{k}, -\vec{k}'; \omega, -\omega') \zeta^{(2)}(\vec{k}', \vec{k}-\vec{k}'; \omega', -\omega')}{\zeta^L(\vec{k}-\vec{k}', \omega-\omega')} I_{\vec{k}', \omega'} \\ & - 2 \sum_{\vec{k}'} \zeta^{(3)}(\vec{k}', -\vec{k}', \vec{k}; \omega', -\omega', \omega) I_{\vec{k}', \omega'} \end{aligned} \quad (I.23)$$

L'équation (I.22) généralise donc l'équation de dispersion linéaire (I.6) et donne comme pour celle-ci le taux de croissance des modes selon

$$\gamma_{\vec{k}} = - \frac{\text{Im} \zeta^{NL}(\vec{k}, \omega_{\vec{k}})}{\left( \frac{\partial}{\partial \omega_{\vec{k}}} \text{Re} \zeta^{NL}(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}) \right)} . \quad (\text{I.24})$$

A l'aide de (I.19.a), on peut remplacer  $\gamma_{\vec{k}}$  par  $\frac{1}{2I_{\vec{k}}} \frac{\partial I_{\vec{k}}}{\partial t}$  et réécrire (I.22) sous une forme équivalente :

$$\frac{\partial}{\partial t} I_{\vec{k}}(t) = 2(\gamma_{\vec{k}}^L + \gamma_{\vec{k}}^{NL}) I_{\vec{k}}(t) , \quad (\text{I.25})$$

où  $\gamma_{\vec{k}}^L$  est le taux de croissance linéaire et  $\gamma_{\vec{k}}^{NL}$  est la contribution non-linéaire :

$$\gamma_{\vec{k}}^{NL} = \left( \frac{\text{Re} \zeta^L(\vec{k}, \omega_{\vec{k}})}{\partial \omega_{\vec{k}}} \right)^{-1} \text{Im} \sum_{\vec{k}'} \left[ \frac{4 \zeta^{(2)}(\vec{k}', -\vec{k}', \omega_{\vec{k}'}, -\omega_{-\vec{k}'}) \zeta^{(2)}(\vec{k}', \vec{k}-\vec{k}', \omega_{\vec{k}'}, \omega_{\vec{k}-\vec{k}'})}{\zeta^L(\vec{k}-\vec{k}', \omega_{\vec{k}-\vec{k}'})} \right. \\ \left. - 2 \zeta^{(3)}(\vec{k}', -\vec{k}', \vec{k}; \omega_{\vec{k}'}, \omega_{-\vec{k}'}, \omega_{\vec{k}}) \right] I_{\vec{k}'}(t) \quad (\text{I.26})$$

L'équation (I.25), appelée l'équation cinétique des ondes, a été établie dans le cadre de la turbulence faible [4]. Au second membre de cette équation, le premier terme qui représente le processus linéaire fait intervenir la fonction de résonance  $g_{\vec{k}, \omega_{\vec{k}}}^{(0)}$  qui caractérise une fraction de particules (particules résonnantes) et donne lieu à une génération des modes. Le second terme du second membre est responsable de la limitation de la croissance et bien que quadratique par rapport à la densité d'énergie peut devenir comparable au premier terme. En effet, dans les termes constituant la partie non-linéaire figure la fonction  $g_{\vec{k}-\vec{k}', \omega_{\vec{k}-\vec{k}'}}^{(0)}$  qui traduit la résonance éventuelle entre les particules avec le mode de battement formé par les modes propres  $(\vec{k}, \omega_{\vec{k}})$  et  $(\vec{k}', \omega_{\vec{k}'})$ . Si ces modes propres n'interagissent qu'avec une population négligeable d'ions, comme nous avons vu, leur couplage qui donne un mode de battement  $(\vec{k}-\vec{k}', \omega_{\vec{k}-\vec{k}'})$ , en revanche, peut entrer en résonance avec tous les ions thermiques. Ce mécanisme, appelé effet Landau non-linéaire, a été considéré pendant longtemps comme un mécanisme responsable de la saturation de l'instabilité acoustique ionique.

Comme on a  $\omega_k \approx |\vec{k}| C_s$  et  $\omega_{k'} \approx |\vec{k}'| C_s$ , alors  $\omega_k - \omega_{k'} \approx (|\vec{k}| - |\vec{k}'|) C_s$ . Pour que la résonance avec les ions ait lieu, soit  $\omega_{\vec{k}-\vec{k}'} \approx |\vec{k}-\vec{k}'| v_i$  il est donc nécessaire que l'on ait  $(|\vec{k}| - |\vec{k}'|) C_s \approx |\vec{k}-\vec{k}'| v_i$ , c'est-à-dire que les deux vecteurs  $\vec{k}$  et  $\vec{k}'$  se trouvent dans l'espace  $k$  sur une couche entre deux sphères dont la différence de rayon est  $\delta k \approx \frac{k v_i}{C_s} \approx \sqrt{\frac{2 T_i}{T_e}} k$ .

Au point de vue mathématique, dans la théorie de Kadomtsev on considère seulement les contributions au taux d'amortissement dues aux ions thermiques car les électrons thermiques ont déjà fourni linéairement au taux de croissance. Par ces considérations on est amené à délaissier  $\gamma_{ke}^{NL}$  et dans le calcul de  $\gamma_{ki}^{NL}$  on peut développer en série les fonctions  $g_{k,\omega}^{(0)}$  et  $g_{k',\omega}^{(0)}$ , dans les formules appropriées pour  $\zeta^{(2)}$  et  $\zeta^{(3)}$ , ce qui donne pour  $\gamma_{ki}^{NL}$  (tous calculs faits)

$$\gamma_{ki}^{NL} \approx k C_s \left( \frac{16 T_i}{T_e} \right) (k \lambda_D) \frac{\partial}{\partial k} (k^3 \alpha_k(t)),$$

$$\alpha_k = \frac{e^2 I_k(t)}{8 \pi^2 T_e^2} \quad (I.27)$$

Dans l'esprit de la théorie de Kadomtsev, un état stationnaire en résulterait et s'obtient en faisant  $\frac{\partial I_k(t)}{\partial t} = 0$  dans l'équation (I.25). Après quelques manipulations algébriques, cet état est donné par :

$$\frac{\partial}{\partial k} (k^3 \alpha_k) \approx \left( \frac{T_e}{16 T_i} \right) \frac{\gamma_{ke}^L}{k C_s (k \lambda_D)} \quad (I.28)$$

En postulant que le spectre d'énergie s'annule pour  $k = \lambda_D^{-1}$ , l'équation (I.28) s'intègre et donne le fameux spectre de Kadomtsev :

$$\alpha_k \approx \left( \frac{T_e}{16 T_i} \right) \frac{u}{C_s} \left( \sqrt{\frac{\pi m}{8 M}} / k^3 \right) \text{Log} \frac{1}{k \lambda_D} \quad (I.28.a)$$

I.c. DEFAUT DE LA THEORIE DE KADOMTSEV

Le spectre, donné par (I.28.a), conduit à une divergence de l'énergie totale des modes (c'est-à-dire  $\sum_{\vec{k}} I_{\vec{k}}$ ), afin d'éviter un tel inconvénient Kadomtsev a été amené à stipuler qu'il doit être appliqué uniquement dans un domaine déterminé par  $k_0 < k < \lambda_D^{-1}$  où  $k_0 c_s$  est égal à la fréquence de collision. Cette théorie heuristique, d'autre part, n'explique pas l'existence de l'état stationnaire puisqu'elle montre qu'il y a une cascade d'énergie venant des modes de courte longueur d'onde vers les modes de grandes longueurs d'onde et non pas une vraie absorption. De plus, le niveau d'énergie dans l'état stationnaire, qui est de l'ordre de  $\alpha \approx \frac{T_e}{T_i} \sqrt{\frac{m}{M}} \frac{u}{c_s}$ , peut violer la condition de faible turbulence pour des rapports élevés de températures. Même pour des rapports modestes de celles-ci, le niveau d'énergie reste encore trop élevé par rapport aux résultats expérimentaux. Citons par exemple les mesures des travaux de Gekelman et Stenzel [5] où on trouve que pour des paramètres initiaux  $T_e/T_i = 10$ ,  $u/v_e \approx 0,3$ , le niveau d'énergie varie de  $10^{-4}$  à  $10^{-2}$  tandis que d'après la formule (I.28.a), le niveau maximum est environ 18 %.

La deuxième difficulté de la théorie de Kadomtsev est à double égard, plus subtile et plus intéressante : en effet dans cette théorie, les effets non-linéaires dûs aux électrons ont été tacitement ignorés du fait que, comme nous l'avons mentionné plus haut, les électrons thermiques contribuent déjà dans le mécanisme linéaire et il est donc plausible de penser qu'ils ne peuvent donner qu'une petite correction aux résultats linéaires. Sloan et Drummond [6] d'une part et Sizonenko et Stepanov [7] d'autre part, ont réexaminé le rôle non-linéaire des électrons en calculant les polarisabilités électroniques non-linéaires données par les formules (I.23), (I.16) et (I.17). Ils ont trouvé que les contributions électroniques sont pratiquement toujours plus grandes que celles des ions. De plus, elles deviennent du même ordre de grandeur que les résultats linéaires, c'est-à-dire on a  $\gamma_{ke}^{NL} \geq \gamma_{ke}^L$  pour un niveau d'énergie tel que  $\alpha \gtrsim \frac{m}{M}$ , ce qui a

fait conclure (à tort) à Sizonenko et al. que le niveau d'énergie de saturation serait donné par  $\alpha \approx \frac{m}{M}$ . En effet, les électrons cèdent constamment leur énergie aux ondes et ne peuvent donc pas conduire à une stabilisation.

Quoi qu'il en soit, on est amené à se poser la question : pourquoi la correction non-linéaire à la partie imaginaire de la polarisabilité électronique peut devenir comparable à la polarisabilité linéaire, alors que celle-ci est déjà fournie par la quasitotalité de la population électronique. La raison en est que la théorie de la turbulence faible est basée sur un développement perturbatif suivant la puissance du champ électrique turbulent, et cela fait intervenir la fonction de résonance  $g_{k,\omega}^{(0)}$ . On pense, alors, que le paramètre du développement n'est pas la puissance du champ électrique (normalisé) mais plutôt  $\rho = \left(\frac{k \cdot v_s}{\omega}\right)^2 \frac{W}{n_0 T_s}$ , où la vitesse  $v_s$  et la température  $T_s$  sont relatives à l'espèce de particule  $s$ , ( $s = e, i$ ) en considération. Dans le cas de la turbulence de Langmuir où  $\omega \approx \omega_{pe}$ , la condition de validité du développement coïncide donc avec la condition habituelle de la turbulence faible  $\alpha = \frac{W}{n_0 T_e} \ll 1$  et la théorie est justifiée. Dans le cas de la turbulence acoustique ionique, ce développement s'applique encore pour les ions, pour lesquels on a  $\rho = \alpha$ , il possède vis-à-vis des électrons le paramètre  $\rho = \frac{M}{m} \cdot \alpha$ . Ce qui explique la non validité de la turbulence faible, dès que le rapport  $\alpha$  atteint une valeur finie, tout en restant petite, lorsqu'on veut l'appliquer à des espèces dites adiabatiques, lesquelles possèdent une vitesse thermique largement supérieure à la vitesse de phase des ondes. Cette nouveauté par rapport au cas Langmuir, lequel a fait l'objet d'une abondante littérature, constitue ainsi un sujet intéressant dans le contexte de la turbulence plasma.

## I.d. NECESSITE D'UNE THEORIE ADEQUATE DE LA TURBULENCE ACOUSTIQUE IONIQUE

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que la théorie de Kadomtsev, basée sur la turbulence faible, a rencontré quelques incohérences sur ses résultats et n'a pas été vérifiée quantitativement, ce qui a motivé les travaux ultérieurs qui ont tenté d'inclure les effets négligés dans la première théorie à savoir :

- Déformation de la fonction de distribution moyenne des particules.

Cette fonction considérée comme gelée dans la théorie de Kadomtsev, subit une déformation due à la contre-réaction du champ turbulent. Cet effet constitue l'objet principal de notre étude et sera abordé en détail dans la deuxième partie de notre travail.

- Déformation des orbites (trajectoires) libres des particules par le champ turbulent.

De la même façon que pour la fonction de distribution moyenne, les champs turbulents, à leur tour, peuvent modifier les orbites des particules, lesquelles peuvent dévier d'une manière appréciable par rapport aux orbites libres, même pour des valeurs faibles du niveau de turbulence  $\alpha$ . Ce qui explique, en particulier, la non-validité de la turbulence faible habituelle pour l'espèce électronique citée précédemment. Une conséquence intéressante et importante de cet effet est que sous l'effet de la modification des orbites, les particules en résonance avec les ondes ne sont plus soumises à la condition habituelle  $\omega_{\vec{k}} = \vec{k} \cdot \vec{v}$  mais à une autre condition plus faible qui peut s'écrire comme  $|\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v}| < \nu_{\vec{k}}$ , où  $\nu_{\vec{k}}$ , qui est une quantité dépendante de l'énergie turbulente, désigne la fréquence de collision turbulente entre les ondes et les particules. Alors, le domaine de résonance

est étendu aux particules qui n'étaient pas résonnantes initialement, lesquelles peuvent absorber des ondes.

Les deux effets cités plus haut qui peuvent contribuer à un mécanisme de dissipation de l'énergie feront l'objet d'une discussion dans les chapitres suivants, dans lesquels nous exposons plus en détail leur philosophie. Celle-ci est, en effet, placée dans le contexte de la théorie renormalisée, terminologie destinée aux processus de resommation d'une série infinie (au lieu d'une série tronquée comme dans la théorie classique de turbulence faible).

\* \*  
\*





## CHAPITRE II

### THEORIE QUASI-LINEAIRE

#### II.a. INTRODUCTION

La première théorie non-linéaire destinée aux plasmas turbulents a été élaborée en 1962 simultanément et indépendamment par Drummond et Pines [8] d'une part et Vedenov, Velikhov et Sagdeev [9] de l'autre. Cette théorie appelée communément théorie quasi-linéaire a pour but de décrire l'évolution de la fonction de distribution moyenne (fond), au cours du temps, due à la présence des ondes créées par les instabilités. Depuis cette date, d'autres travaux dans cette direction ont été faits pour donner une base plus solide à cette théorie ainsi que son domaine d'application, citons pour cela les travaux de Bernstein et Engelmann [10], Frieman et Rutherford [11] ainsi que les autres auteurs cités dans les références [10,11]. Plus récemment encore cette théorie est encore le sujet de controverse et certains auteurs en sont amenés même à douter de sa validité [12].

Dans ce chapitre nous allons revoir brièvement l'établissement de l'équation cinétique d'évolution de la fonction de distribution moyenne selon une approche statistique, faisant intervenir la moyenne sur les ensembles, et puis la méthode diagrammatique dont l'intérêt est double à savoir, elle montre que la description quasi-linéaire correspond à un processus de renormalisation (resommation d'une infinité de termes d'une série de perturbation) et cette présentation servira ensuite pour la compréhension de la théorie renormalisée, proprement dite, décrite dans le chapitre suivant.

## II.b. L'ÉQUATION QUASI-LINEAIRE POUR LA FONCTION DE DISTRIBUTION MOYENNE

Nous partons du système des équations de Vlasov-Poisson :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \frac{e_s}{m_s} \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right] f_s(\vec{x}, \vec{v}, t) = 0, \quad s = e, i \quad (\text{II.1})$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \sum_s e_s \int d\vec{v} f_s(\vec{x}, \vec{v}, t), \quad (\text{II.2})$$

nous allons maintenant considérer une seule espèce de particules et nous abandonnons l'indice  $s$  sauf quand il y a confusion. Nous décomposons la fonction de distribution selon  $f = F + \delta f$ , où  $F = \langle f \rangle$  est la partie moyenne sur les ensembles et  $\delta f$  est la partie fluctuante, écart par rapport à la moyenne. Nous faisons de même pour le champ électrique  $\vec{E} = \langle \vec{E} \rangle + \delta \vec{E}$  et dans notre étude, on considère le cas sans champ extérieur, c'est-à-dire  $\langle \vec{E} \rangle = 0$ .

En effectuant la moyenne d'ensemble sur l'équation (II.1), on obtient pour la partie moyenne l'équation :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right] F(\vec{x}, \vec{v}, t) = - \frac{e}{m} \langle \delta \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \delta f(\vec{x}, \vec{v}, t) \rangle, \quad (\text{II.3})$$

où le second membre traduit l'effet des fluctuations sur l'évolution de la partie moyenne de la fonction de distribution. La partie fluctuante qui figure dans le second membre de (II.3) est maintenant décrite en retranchant membre à membre les équations (II.3) et (II.1), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \frac{e}{m} \delta \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right] \delta f(\vec{x}, \vec{v}, t) &= - \frac{e}{m} \delta \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(\vec{x}, \vec{v}, t) \\ &+ \langle \frac{e}{m} \delta \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \delta f(\vec{x}, \vec{v}, t) \rangle, \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

où la partie fluctuante est à son tour reliée à la partie moyenne

ainsi qu'aux fluctuations du champ électrique.

On note aussi que les termes  $\frac{e}{m} \delta \vec{E} \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \vec{v}}$  et  $\langle \frac{e}{m} \delta \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \delta f \rangle$  correspondent aux effets non-linéaires.

Dans ce chapitre, nous nous contentons de délaissier les termes non-linéaires, ce qui permet d'intégrer (II.4) et on obtient :

$$\delta f(\vec{x}, \vec{v}, t) = \delta f(\vec{x}, \vec{v}, 0) - \frac{e}{m} \int_0^t dt' \delta \vec{E}(\vec{x}(t'), t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}(t')} F(\vec{x}(t'), \vec{v}(t'), t'). \quad (\text{II.5})$$

où  $\delta f(\vec{x}, \vec{v}, 0)$  désigne la fluctuation initiale et les fonctions  $\vec{x}(t')$  et  $\vec{v}(t')$  données par :

$$\vec{v}(t') = \vec{v}, \quad \vec{x}(t') = \vec{x} - \vec{v}(t-t'), \quad (\text{II.6})$$

décrivent la trajectoire libre des particules.

En reportant dans (II.3) l'expression de la fluctuation donnée par (II.5) et en négligeant les conditions initiales, on obtient, pour la partie moyenne, l'équation :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right] F(\vec{x}, \vec{v}, t) = \frac{e^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left\langle \int_0^t dt' \delta \vec{E}(\vec{x}, t) \delta \vec{E}(\vec{x}(t'), t') \right\rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F(\vec{x}(t'), \vec{v}, t'), \quad (\text{II.7})$$

qui est cependant une équation intégral-différentielle. Dans le cas d'un plasma homogène, la fonction de distribution moyenne ne dépend pas de la variable spatiale et l'équation (II.7) se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial t} F(\vec{v}, t) = \frac{e^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \int_0^t d\tau \langle \delta \vec{E}(\vec{x}, t) \delta \vec{E}(\vec{x}(t-\tau), t-\tau) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F(\vec{v}, t-\tau), \quad (\text{II.8})$$

où on a utilisé le changement de variable  $\tau = t-t'$ .

L'équation (II.8), qui est l'équation quasi-linéaire générale pour la fonction de distribution moyenne (FDM), est en principe une équation non-markovienne car l'évolution de cette fonction à un instant donné dépend de l'histoire antérieure complète de celle-ci. L'équation précédente ainsi se prête mal à la résolution et on est conduit à faire des hypothèses supplémentaires sur celle-ci. Pour cela, nous commençons par examiner la structure de la fonction de corrélation du champ électrique qui figure dans le noyau intégral de l'équation précédente.

### II.c. FONCTION DE CORRELATION DU CHAMP ELECTRIQUE

Cette fonction se définit comme

$$\vec{\Phi}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \langle \delta \vec{E}(\vec{x}, t) \delta \vec{E}(\vec{x}', t') \rangle. \quad (\text{II.9})$$

Pour un champ électrostatique réel, on a  $\delta \vec{E}(\vec{x}, t) = -\nabla \phi(\vec{x}, t)$  ; où  $\phi(\vec{x}, t)$  est le potentiel électrostatique.

En terme de la transformation de Fourier-Laplace de  $\phi(\vec{x}, t)$  on peut écrire (II.9) sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = & \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \vec{k} \vec{k}' \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty+i\delta'}^{\infty+i\delta'} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \times \\ & \times e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x}' - \omega' t')} \langle \phi_{\vec{k}, \omega} \phi_{\vec{k}', \omega'} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

où dans le cas présent  $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}(t-t')$ . En utilisant les hypothèses usuelles (cf. chapitre précédent, formules 19 et 19.a) la fonction de corrélation du champ électrique s'écrit, dans le cadre de la théorie quasi-linéaire, sous la forme :

$$\vec{\Phi}(t, t-\tau) = \sum_{\vec{k}} \vec{k} \vec{k} I_{\vec{k}}(t) e^{i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})\tau}. \quad (\text{II.11})$$

D'après (II.11), le temps de corrélation (dénnoté par  $\tau_c$ ) du champ électrique vu par les particules qui suivent une trajectoire libre est  $\tau_c = |\Delta(\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v})|^{-1}$ , où  $\Delta(\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v})$  est la largeur caractéristique de  $(\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v})$  prise sur la largeur spectrale des ondes excitées.

On définit également le temps caractéristique de l'évolution du champ (ou du spectre  $I_{\vec{k}}(t)$ )  $\tau_E$  qui est approximativement de l'ordre de  $\gamma_k^{-1}$  et le temps qui caractérise l'évolution de la FDM :  $\tau_F$ .

#### II.d. EQUATION DE DIFFUSION QUASI-LINEAIRE

L'équation quasi-linéaire générale (II.8) peut être ramenée sous la forme d'une équation de diffusion à l'aide des hypothèses suivantes :

(i) Le temps caractéristique de convergence de l'intégrale sur  $\tau$  (qui est d'ailleurs le temps de corrélation  $\tau_c$ ) est petit par rapport au temps  $\tau_E$ .

(ii) Le temps de corrélation est aussi petit par rapport au temps caractéristique de l'évolution de  $F$  ( $\tau_c \ll \tau_F$ ). Cette hypothèse, appelée l'hypothèse de markovianisation, consiste à remplacer dans (II.8)  $F(\vec{v}, t - \tau)$  par  $F(\vec{v}, t)$ ,  $\tau \leq \tau_c$  et la borne supérieure de l'intégrale sur  $\tau$  peut être étendue à l'infini. Alors, l'équation (II.8) est ramenée à :

$$\frac{\partial}{\partial t} F(\vec{v}, t) = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \overleftrightarrow{D}^{QL}(\vec{v}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F(\vec{v}, t) , \quad (\text{II.12})$$

$$\overleftrightarrow{D}^{QL}(\vec{v}, t) = \frac{e^2}{m^2} \sum_{\vec{k}} \vec{k} \vec{k} I_{\vec{k}}(t) \text{Im} \frac{-1}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v} + i\delta)} , \quad (\text{II.12.a})$$

$\overleftrightarrow{D}^{QL}$  est le tenseur de diffusion quasi-linéaire. L'équation (II.12),

appelée l'équation de diffusion quasi-linéaire, permet, en principe, d'étudier l'évolution de la FDM lorsque la variation temporelle de la fonction spectrale est connue.

Dans la suite nous allons établir l'équation cinétique des ondes, laquelle constitue l'équation de fermeture pour le système (II.12).

### II.e. EQUATION CINÉTIQUE D'ONDE

Nous commençons par l'équation (II.5), où dans l'espace de Fourier-Laplace, elle s'écrit :

$$\delta f_{\vec{k},\omega} = - \frac{e}{m} g_{\vec{k},\omega}^{(0)} \delta \vec{E}_{\vec{k},\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F(\vec{v}, t), \quad (\text{II.13})$$

où  $g_{\vec{k},\omega}^{(0)}$  est donné au chapitre précédent et la valeur initiale de  $\delta f_{\vec{k}}$  a été délaissée. En substituant (II.13) dans l'équation de Poisson (cf. (II.2)) on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \zeta^{QL}(\vec{k}, \omega, t) \delta \vec{E}_{\vec{k},\omega} &= 0 \\ \text{où } \zeta^{QL}(\vec{k}, \omega, t) &= 1 - i \sum_s \frac{4\pi e_s^2}{m_s k^2} \int d\vec{v} g_{\vec{k},\omega}^{(0)} \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F_s(\vec{v}, t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.14})$$

Nous allons utiliser (II.14) pour aboutir à l'équation cinétique des ondes. On écrit d'abord :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \delta \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \delta \vec{E}(\vec{x}', t') \rangle &= \langle \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \delta \vec{E}(\vec{x}', t') \rangle \\ &+ \langle \delta \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{E}(\vec{x}', t') \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

En prenant la dérivée partielle par rapport au temps sur l'équation (II.2), ce qui donne, compte-tenu de l'équation de Vlasov,

$$\operatorname{div} \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{E}(\vec{x}, t) = - \sum_S 4\pi e_S \int d\vec{v} \vec{v} \delta f_S(\vec{x}, \vec{v}, t) \quad (\text{II.16})$$

En substituant (II.16) dans (II.15) et en faisant une analyse de Fourier sur l'équation résultante, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \delta \vec{E}_{\vec{k}, \omega} \cdot \delta \vec{E}_{\vec{k}, \omega}^* \rangle &= -4\pi \sum_S e_S \left\{ \int d\vec{v} (\vec{v} \cdot \delta \vec{E}_{\vec{k}, \omega}^*) \delta f_{\vec{k}, \omega_S}(\vec{v}, t) \right. \\ &\quad \left. + \int d\vec{v} (\vec{v} \cdot \delta \vec{E}_{\vec{k}, \omega}) \delta f_{\vec{k}, \omega_S}^*(\vec{v}, t) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Comme on a  $\delta \vec{E}_{\vec{k}} = -i\vec{k}\phi_{\vec{k}}$ ,  $\delta \vec{E}_{\vec{k}}^* = -i\vec{k}\phi_{\vec{k}}^*$  et  $\phi_{\vec{k}}^* = \phi_{-\vec{k}}$  ainsi que  $\delta f_{\vec{k}}^* = \delta f_{-\vec{k}}$ , l'équation (II.17) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\vec{k}}(t)}{\partial t} &= -2 \operatorname{Re} \sum_S \int d\vec{v} (\vec{k} \cdot \vec{v}) g_{\vec{k}, \omega}^{(0)} \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F_S(\vec{v}, t) \left( \frac{4\pi e_S^2}{m_S k^2} \right) I_{\vec{k}}(t) \\ &= -2 I_{\vec{k}}(t) \operatorname{Re} \omega \sum_S 4\pi \left( \frac{e_S^2}{m} \right)_S \int d\vec{v} g_{\vec{k}, \omega}^{(0)} \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F_S(\vec{v}, t) \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

A l'aide de (II.14), (II.18) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} I_{\vec{k}}(t) &= 2 I_{\vec{k}}(t) \operatorname{Re} i \left[ \zeta^{QL}(\vec{k}, \omega, t) - 1 \right] \\ &= 2 \gamma_{\vec{k}}^{QL}(t) I_{\vec{k}}(t), \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

où  $\gamma_{\vec{k}}^{QL}(t)$  peut être déterminé d'après la relation :

$$\gamma_{\vec{k}}^{QL}(t) = - \frac{\operatorname{Im} \zeta^{QL}(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, t)}{\frac{\partial}{\partial \omega_{\vec{k}}} \operatorname{Re} \zeta^{QL}(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, t)}, \quad (\text{II.20})$$

et  $\omega_{\vec{k}}$  est donné par la solution de l'équation  $\operatorname{Re} \zeta^{QL}(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, t) = 0$ .

L'ensemble des équations (II.12), (II.12.a) et (II.19) constitue le système fondamental qui décrit l'évolution de la

FDM ainsi que l'évolution du champ électrique de façon auto-consistante dans le cadre de la théorie quasi-linéaire (QL).

On souligne que l'équation de diffusion pour la FDM peut être obtenue aussi en utilisant des méthodes diagrammatiques pour resommer une partie des termes séculaires dans le développement (I.14). Ce que nous allons présenter dans le paragraphe suivant.

II.f. METHODE DIAGRAMMATIQUE

Dans le développement donné par (I.14), on peut écrire  $\tilde{f}_{\vec{k}}^{(n)}$  en terme de  $f_0$ , symboliquement,

$$\tilde{f}_{\vec{k},\omega}^{(n)} = (\tilde{E}_1 \tilde{E}_2 \dots \tilde{E}_n) f_0, \quad \tilde{E}_1 \rightarrow g_{\vec{k}_1, \omega_1}^{(0)} \tilde{E}_{\vec{k}_1, \omega_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}}, \quad (II.21)$$

et la série  $\sum_{n=1} \tilde{f}_{\vec{k},\omega}^{(n)}$ , figurant dans (I.4.b), s'écrit

$$\tilde{f}_{\vec{k},\omega} = \sum_{n=1} \tilde{f}_{\vec{k},\omega}^{(n)} = \tilde{E} f_0 + \tilde{E}_1 \tilde{E}_2 f_0 + \tilde{E}_1 \tilde{E}_2 \tilde{E}_3 f_0 + \dots \quad (II.22)$$

Nous introduisons à présent une représentation diagrammatique pour (II.22) comme suit : on désigne une ligne verticale fléchée correspondant à  $\tilde{E}_{\vec{k},\omega}$  :  $\uparrow$  ;  $\downarrow$  à  $\tilde{E}_{-\vec{k},\omega}$  ; o à l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial \vec{v}}$  et une ligne horizontale correspondant au propagateur  $g_{\vec{k},\omega}^{(0)}$ . Alors, on peut écrire (II.22) sous forme de diagrammes :

$$\tilde{f}_{\vec{k},\omega} = \begin{array}{c} \uparrow E_{\vec{k},\omega} \\ \circ \\ \text{---} g_{\vec{k}}^{(0)} \text{---} \\ \circ \end{array} f_0 + \begin{array}{c} \uparrow E_{\vec{k}_1,\omega_1} \\ \circ \\ \text{---} g_{\vec{k}}^{(0)} \text{---} \downarrow g_{\vec{k}-\vec{k}_1}^{(0)} \text{---} \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \uparrow E_{\vec{k}_2,\omega_2} \\ \circ \\ \text{---} g_{\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2}^{(0)} \text{---} \\ \circ \end{array} f_0 + \dots \quad (II.23)$$



Dans l'équation (II.23), la sommation sur les nombres d'onde  $k_n$  et les intégrales sur les fréquences  $\omega_{k_n}$  sont omises pour alléger l'écriture ; par exemple le second terme en (II.23) est précédé par :

$$\left(\frac{-ie}{2m}\right)^2 \sum_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}} \int_{-\infty + i\delta_1}^{\infty + i\delta_1} d\omega_1 \int_{-\infty + i\delta_2}^{\infty + i\delta_2} d\omega_2 .$$

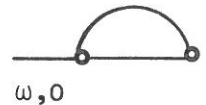
On sélectionne parmi les diagrammes constituant la série des termes figurant dans (II.23), une classe de diagrammes tels que le vecteur d'onde du champ de la  $2n$ -ième ligne est opposé à celui de  $(2n+1)$ -ième ligne qui la suit immédiatement sur sa droite et que le vecteur d'onde du premier champ dans chaque diagramme est celui de la même fluctuation en considération. La sous-série retenue à cette approximation est illustrée par la figure ci-dessous :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\vec{k},\omega} = & \frac{\vec{E}_{\vec{k},\omega_1}}{\vec{k},\omega} f_0 + \frac{\vec{E}_{\vec{k},\omega_1}}{\vec{k},\omega} \text{---} \text{---} \text{---} f_0 \\ & + \frac{\vec{E}_{\vec{k},\omega_1}}{\vec{k},\omega} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} f_0 + \dots , \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

où on a réuni ensemble, sous forme de boucle, les deux champs, dits conjugués, ayant des vecteurs d'onde opposés. L'examen de cette série montre clairement que la somme de tous les fragments figurant à droite de la ligne de champ  $\vec{E}_{\vec{k},\omega_1}$  représente la composante de Laplace  $\omega - \omega_1$  de la partie homogène ( $k = 0$ ) de la fonction de distribution, ce que nous notons par  $F(\omega - \omega_1, \vec{v})$  et dont la représentation diagrammatique est :

$$F(\omega, \vec{v}) = \frac{f_0}{\omega, 0} + \frac{\text{---} \text{---} \text{---} f_0}{\omega, 0} + \frac{\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} f_0}{\omega, 0} + \dots \quad (\text{II.25})$$

ou encore

$$F(\omega, \vec{v}) = \frac{f_0}{\omega, 0} + \frac{\text{---} \text{---} \text{---}}{\omega, 0} F(\omega - \omega_1 - \omega_2, \vec{v}) \quad (\text{II.25.a})$$


Algébriquement, on écrit (II.24) et (II.25.a) comme :

$$\tilde{f}_{\vec{k}, \omega} = - \frac{e}{m} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} g_{\vec{k}, \omega}^{(0)} \vec{E}_{\vec{k}, \omega_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F(\omega - \omega_1, \vec{v}) , \quad (\text{II.24.a})$$

$$- i\omega F(\omega, \vec{v}) = f_0 + \frac{e^2}{m^2} \sum_{\vec{k}_1} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \int \frac{d\omega_2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \frac{(\vec{E}_{\vec{k}_1, \omega_1} \vec{E}_{-\vec{k}_1, \omega_2})}{\omega - \omega_1 - \omega_2 - \vec{k}_1 \cdot \vec{v}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F(\omega - \omega_1 - \omega_2, \vec{v}) . \quad (\text{II.25.b})$$

L'équation (II.25.b) n'est autre que la transformée de Laplace de l'équation (II.12), et cela montre que la théorie QL est de nature renormalisée.

L'équation (II.25.b), qui est analogue à celle de Dyson [13], a été obtenue pour la première fois par Altshul et Karpman [14].

De façon équivalente, Galeev et al. [15] et Vedenov et al. [9] ont employé des méthodes diagrammatiques pour aboutir à une équation semblable à (II.12) dans laquelle la moyenne spatiale est remplacée par la moyenne temporelle (voir aussi Wu [16], et Drummond et Pines [17]).

On remarque que l'effet du processus de renormalisation partielle est porté sur l'évolution de la partie moyenne, c'est-à-dire sur la composante  $k = 0$ , de la fonction de distribution (cf. (II.25.a)). L'effet de renormalisation sur la composante  $k \neq 0$  fera l'objet du chapitre III.

Nous discutons maintenant les conditions de validité du système des équations quasi-linéaires.

### III.g. CONDITIONS DE VALIDITE

Avant de résumer les conditions de validité de la théorie quasi-linéaire, nous donnerons une estimation pour les échelles caractéristiques de i) l'évolution de la FDM :  $\tau_F$

ii) l'évolution du champ électrique :  $\tau_E$ .

D'après (II.12) et (II.19), on a  $\tau_F^{-1} \approx \frac{D}{(\Delta v)^2} \frac{QL}{\tau_c}$ ,  $\tau_E \approx \gamma_k^{-1}$  ainsi que  $\tau_c = (\Delta |\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v}|)^{-1}$ .

On remarque que  $\tau_c$  et  $\tau_F$  dépendent de la vitesse.

On peut, alors, postuler les conditions de validité en utilisant les notions  $\tau_c$ ,  $\tau_E$  et  $\tau_F$  comme suit :

- (1) Hypothèse de turbulence faible : celle-ci consiste à supposer que l'énergie turbulente reste faible devant l'énergie thermique (électronique), soit la condition  $\alpha \ll 1$ .
- (2) Hypothèse de faible non-linéarité : comme on a délaissé le second terme du second membre de l'équation (II.4), ce qui est équivalent à la condition  $\delta f \ll F$ . D'après (II.5) on a  $\delta f \approx \tau_c^2 \frac{ke|\vec{E}|}{m} F$ , ce qui exige  $\frac{\tau_c^2 ek|\vec{E}|}{m} \ll 1$ , soit la condition  $\tau_c^2 \Omega^2 \ll 1$ , où  $\Omega = \left(\frac{e|\vec{E}|k}{m}\right)^{1/2}$  est la fréquence de piégeage d'une particule dans une onde monochromatique de nombre d'onde caractéristique  $k$ .
- (3) Linéarité de l'orbite : la condition pour que la modification de l'orbite des particules due au champ turbulent soit négligeable est  $\frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle^{1/2}}{\bar{x}} \ll 1$ , où  $\bar{x}$  représente la trajectoire moyenne de la particule ( $\bar{x} \approx 2\pi/k$ ). Cela conduit à  $\left[ k^2 \langle (\Delta x)^2 \rangle \right]^{1/2} \ll 1$ . Nous allons voir dans le chapitre suivant que  $k^2 \langle (\Delta x)^2 \rangle \approx \tau^4 \Omega^4$  ;  $\tau \leq \tau_c$  et la condition précédente est ramenée à  $\tau_c^2 \Omega^2 \ll 1$ . Cette condition est appelée "condition de faible interaction entre ondes et particules". De par cette hypothèse, le troisième terme du membre de gauche de l'équation (II.4) a été négligé.

$$(4) \tau_c \ll \tau_E$$

$$(5) \text{ Hypothèse de markovianisation : } \tau_c \ll \tau_F \text{ et } \tau_F^{-1} \approx \frac{D^{QL}}{(\delta v)^2}.$$

Dans le cas de la turbulence acoustique ionique,  $D^{QL} \approx \alpha \tau_c (k v_m)^2 \cdot v_m^2$ ;  $v_m$  est égal à la vitesse de phase de l'onde dans le cas des ions tandis qu'il est égal à la vitesse thermique dans le cas des électrons. La condition  $\tau_c \ll \tau_F$  mène donc à  $\tau_c^4 \Omega^4 \ll 1$  car  $\alpha (k v_m)^4 \approx \left( \frac{e^2 |E|^2 k^2}{m^2} \right) = \Omega^4$ .

On remarque que les effets produits par les processus non markoviens (cf. condition (5)) sont très faibles par rapport aux autres effets non-linéaires. On trouve que lorsque les conditions (2) et (3) sont satisfaites, les conditions (1) et (5) seront satisfaites aussi. Cela nous amène à résumer les conditions de validité de la théorie QL par a)  $\tau_c^2 \Omega^2 \ll 1$   
 b)  $\tau_c \ll \tau_E$ .

### III.h. DISCUSSION GENERALE

Nous tenons à préciser que i) en effectuant la moyenne statistique sur les ensembles, l'équation (II.12) a été obtenue comme une première approximation d'un développement perturbatif ii) l'emploi des méthodes diagrammatiques conduit à une équation pour la moyenne spatiale de la fonction de distribution. Cette équation correspond au processus de resommation d'une partie des diagrammes en (II.23) et elle est la convolution de l'équation (II.12). Ce qui établit la correspondance entre la théorie basée sur la resommation d'une série infinie des termes dans un développement classique (appelée théorie renormalisée) et la théorie statistique telle que nous l'avons exposée dans le premier paragraphe.

## CHAPITRE III

### THEORIES RENORMALISEES

#### III.a. INTRODUCTION

Comme nous avons souligné, dans le chapitre précédent, que le schéma de perturbation usuel de la turbulence faible habituelle est insuffisant. D'où la nécessité de bâtir une théorie capable de décrire en particulier la turbulence acoustique ionique, sans être en contradiction avec les hypothèses de départ. La première théorie de la turbulence forte a été élaborée par Dupree en 1966 [18]. Cette théorie paraissait mystérieuse jusqu'à 1969 où elle a été corroborée par les travaux de Weinstock [19]. Ce dernier, à notre connaissance, a été le premier à utiliser la technique du développement en cumulants en physique des plasmas. Par cette méthode, il a pu retrouver l'essentiel des résultats de Dupree et c'est peut-être là où réside l'importance de ces travaux. Aussi, il a pu cerner le domaine de l'applicabilité de la théorie de Dupree, lequel s'exprime par  $\tau_c < \tau_D$ , où  $\tau_D$  est le temps requis pour qu'une particule se diffuse sur une longueur d'onde caractéristique  $2\pi/k$  et sera déterminé plus tard (en fonction de  $k$ ).

Par une méthode d'approche différente, Rudakov et Tsytoich [20] ont montré que les particules du plasma sont diffusées par des "quasi-particules" (plasmons ou phonons) avec une fréquence  $\nu_k$  associée à ce processus. Cette fréquence, appelée "fréquence de collision turbulente", est une fonction de l'énergie turbulente. Comme conséquence, la résonance, au lieu d'être décrite par la condition  $\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v} = 0$ , se trouve élargie

et décrite par  $|\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v}| < v_k (= \tau_D^{-1})$  conformément avec les résultats obtenus par la théorie de Dupree-Weinstock.

En effet, dans un plasma turbulent, une particule résonnante de vitesse  $\vec{v}$  subit d'un changement de vitesse  $\Delta \vec{v}$ , elle résonne encore tant que  $|\Delta \vec{v}| < v_k/k$ . Pour une particule résonnante, on a  $|\vec{v}| \approx v_{\text{phase}}$  et l'inégalité précédente mène donc à  $(\frac{\Delta k}{k}) |v_{\text{gr}} - v_{\text{phase}}| < v_k/k$ , où  $\Delta k$  est la largeur spectrale et  $v_{\text{gr}} = \frac{d\omega_k}{dk}$  est la vitesse de groupe. La condition précédente, qui est la condition d'élargissement de résonance, est satisfaite dans le cas de la turbulence acoustique ionique car on a  $\frac{|v_{\text{gr}} - v_{\text{phase}}|}{v_{\text{phase}}} \approx k^2 \lambda_D^2 \ll 1$  quelle que soit la largeur spectrale  $\Delta k$ . Dans le cas de la turbulence à haute fréquence (turbulence de Langmuir) où  $v_{\text{gr}} \ll v_{\text{phase}}$ , la condition d'élargissement de résonance n'est probablement pas satisfaite (voir Peyraud et Coste, Rolland, et Pesme [21]).

On se posera la question : la théorie de la turbulence forte permet-elle de lever les difficultés rencontrées en turbulence acoustique ionique ? C'est là précisément le but que nous cherchons à éclaircir dans ce travail. Cette question précise sera abordée dans la seconde partie de notre thèse et nous nous concentrons dans ce chapitre à élaborer un outil mathématique en vue de ces applications ultérieurement exposées.

Le plan de ce chapitre est le suivant :

Dans le premier paragraphe nous introduisons la notion de la perturbation des orbites avec son corollaire l'élargissement de résonance. A ce sujet, nous avons adopté la présentation de Birmingham et Bornatici [22] au lieu de celle de Dupree-Weinstock dans le but de donner une clarté à notre exposé. L'équation de fermeture sera établie dans le second paragraphe.

Dans le troisième paragraphe nous présentons une alternative à la méthode précédente, reposant sur la sommation des diagrammes. L'intérêt de cette méthode réside dans le fait qu'elle

montre que la théorie en question est de nature renormalisée et en même temps elle permet d'introduire le concept de la collision turbulente, celle de Rudakov et Tsytovich.

Dans le paragraphe (III.f), nous montrons quelles sont les modifications de la partie fluctuante ( $\vec{k} \neq 0$ ) de la fonction de distribution (et par conséquent la modification de la fonction de résonance) compte tenu des effets non-markoviens.

### III.b. APPROCHE STATISTIQUE DE LA THEORIE DE TURBULENCE FORTE

Nous reconsidérons le système des équations (couplées) relatives aux parties moyenne et fluctuante de la fonction de distribution, donné par les équations (II.3) et (II.4), que nous réécrivons comme :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right) F = - \frac{e}{m} \langle \delta \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \delta f \rangle \quad (\text{III.1})$$

et

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \frac{e}{m} \delta \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right) \delta f = - \frac{e}{m} \delta \vec{E} \cdot \frac{\partial F}{\partial \vec{v}} + \frac{e}{m} \langle \delta \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \delta f \rangle \quad (\text{III.2})$$

Nous allons calculer la partie fluctuante en résolvant l'équation (III.2) en omettant le terme non-linéaire figurant au second membre car celui-ci est une quantité moyenne et ne peut donc pas fournir une composante fluctuante. Grâce à cette simplification, l'équation (III.2) peut alors s'intégrer formellement par la méthode des caractéristiques et donne la solution sous la forme :

$$\delta f(\vec{x}, \vec{v}, t) = - \frac{e}{m} \int_0^t dt' \delta \vec{E}(\vec{x}(t'), t') \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}(t')} F(\vec{x}(t'), \vec{v}(t'), t'), \quad (\text{III.3})$$

où  $\vec{x}(t')$  et  $\vec{v}(t')$  sont les caractéristiques (ou orbites) exactes, contenant l'effet du champ turbulent, et sont régies par les équations

tions de la dynamique des particules

$$\frac{d\vec{x}(t')}{dt'} = \vec{v}(t'), \quad \frac{d\vec{v}(t')}{dt'} = \frac{e}{m} \delta \vec{E}(\vec{x}(t'), t'), \quad (\text{III.4})$$

et aussi satisfaisant aux conditions "finales"  $\vec{x}(t'=t) = \vec{x}$  et  $\vec{v}(t'=t) = \vec{v}$ . Celles-ci peuvent s'intégrer formellement et donnent

$$\begin{aligned} \vec{x}(t-\tau) &= \vec{x} - \tau \vec{v} + \Delta \vec{x}(t-\tau) \\ \vec{v}(t-\tau) &= \vec{v} + \Delta \vec{v}(t-\tau), \quad \tau = t-t', \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

où  $\Delta \vec{x}$  et  $\Delta \vec{v}$  désignent les déviations par rapport aux trajectoires libres et sont données par

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v}(t-\tau) &= -\frac{e}{m} \int_0^\tau d\tau' \delta \vec{E}(\vec{x}(t-\tau'), t-\tau') \\ \Delta \vec{x}(t-\tau) &= \frac{e}{m} \int_0^\tau d\tau' (\tau-\tau') \delta \vec{E}(\vec{x}(t-\tau'), t-\tau') \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

En substituant la solution (III.3) dans (III.1) et en faisant l'hypothèse habituelle de markovianisation : la fonction F est décorrélée de son histoire antérieure (à montrer plus tard) ; on peut mettre l'équation résultante sous la forme d'une équation de diffusion (où désormais on s'intéresse au cas où F est homogène)

$$\frac{\partial}{\partial t} F(\vec{v}, t) = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \overleftrightarrow{D}^R(\vec{v}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F \quad (\text{III.7})$$

avec

$$\overleftrightarrow{D}^R(\vec{v}, t) = \frac{e^2}{m^2} \int_0^{t \rightarrow \infty} d\tau \langle \delta \vec{E}(\vec{x}, t) \delta \vec{E}(\vec{x}(t-\tau), t-\tau) \rangle \quad (\text{III.7.a})$$

La méthode standard consiste à décomposer le champ électrique sur ses composantes de Fourier, lesquelles ont une phase supposée distribuée au hasard. Dans la moyenne sur les phases, on suppose en plus que la partie dépendante de l'orbite se découple du reste, ce



qui permet d'écrire le tenseur  $\overleftrightarrow{D}^R$  sous la forme :

$$\overleftrightarrow{D}^R = \frac{e^2}{m^2} \sum_{\vec{k}} \vec{k} \vec{k} \int_0^t d\tau \langle \phi_{\vec{k}}(t) \phi_{-\vec{k}}(t-\tau) \rangle e^{i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})\tau} \langle e^{i\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau)} \rangle, \quad (\text{III.8})$$

dans lequel l'effet de la modification de la trajectoire se manifeste à travers la fonction  $\langle \exp i\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau) \rangle$  que nous désignons sous le nom de "fonction d'orbite moyenne", sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Parallèlement, on a pour la composante de Fourier  $\vec{k}$  de la fluctuation, obtenue à partir de (III.3), avec l'hypothèse de Markovianisation usuelle,

$$\delta f_{\vec{k}, \omega_{\vec{k}}}(\vec{v}, t) = -\frac{e}{m} \int_0^t d\tau \delta \vec{E}_{\vec{k}}(t-\tau) e^{i(\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v})\tau} e^{i\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau)} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F(\vec{v}, t) \quad (\text{III.9})$$

Si la partie due à la modification de l'orbite, à savoir  $\exp i\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}$ , dans cette formule était redéveloppée en série de puissance, on retrouverait le formalisme de la turbulence faible habituelle. Ici, on veut s'affranchir du cadre habituel et on cherche alors une méthode de convergence plus rapide en développant la fonction en considération non plus en série autour de un mais en série de Taylor autour de sa valeur moyenne. Même si la modification induite par le champ turbulent sur la fonction de distribution moyenne (cf. III.7) est négligeable, l'approximation la plus basse dans le cadre renormalisé donne alors pour la partie fluctuante :

$$\delta f_{\vec{k}, \omega_{\vec{k}}}(\vec{v}, t) = -\frac{e}{m} \int_0^t d\tau \delta \vec{E}_{\vec{k}}(t-\tau) e^{i(\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v})\tau} \langle e^{-i\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau)} \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F(\vec{v}, t). \quad (\text{III.10})$$

En adoptant une variation lente pour le champ électrique :

$$\delta \vec{E}_{\vec{k}}(t) \approx \delta \vec{E}_{\vec{k}}(0) e^{\int_0^t \gamma_{\vec{k}}(t') dt'}, \quad \text{on peut inclure l'incrément } \gamma_{\vec{k}} \text{ dans}$$

la fréquence qui est maintenant complexe et réécrire (III.10) comme :

$$\delta f_{\vec{k},\omega}(\vec{v},t) = -\frac{e}{m} g_{\vec{k},\omega}^R \delta \vec{E}_{\vec{k}}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F(\vec{v},t) , \quad (\text{III.11})$$

avec

$$g_{\vec{k},\omega}^R = \int_0^{t \rightarrow \infty} d\tau e^{i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})\tau} \langle e^{i\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau)} \rangle . \quad (\text{III.11.a})$$

Ici  $g_{\vec{k},\omega}^R$  désigne la fonction de résonance renormalisée, dans laquelle figure la fonction d'orbite moyenne. Cette dernière reflète la modification de la trajectoire des particules dues à la diffusion par les ondes autour de la trajectoire libre.

Les expressions (III.8) et (III.11.a) pour le tenseur de diffusion (renormalisé)  $\vec{D}^R$  ainsi que pour la fonction de résonance renormalisée  $g_{\vec{k},\omega}^R$  sont implicites et nécessitent la connaissance de la fonction d'orbite moyenne. Jusqu'à présent on ne dispose pas de méthodes exactes pour la calculer et nous donnerons dans le paragraphe suivant le calcul approché de cette fonction.

### III.b.1. CALCUL DE LA FONCTION D'ORBITE MOYENNE

Le problème que nous considérons dans ce paragraphe concerne le calcul de la moyenne d'une fonction stochastique de la forme  $\langle \exp(X) \rangle$  (dans laquelle  $X$  désigne la quantité stochastique), en l'occurrence  $X = i\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau)$ . Nous présentons ici l'approche donnée par Weinstock reposant sur la technique de développement en cumulants, dont le principe peut être décrit de la manière suivante :

On considère une fonction génératrice telle que :

$$\psi(\lambda) = \langle e^{\lambda X} \rangle$$

qui donne notre fonction pour  $\lambda = 1$ . La méthode commune consiste à exprimer l'exponentielle en série de puissances de  $\lambda$  avant d'effectuer la moyenne, ce qui donne le résultat sous la forme :

$$\psi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \mu_n}{n!}, \quad (\text{III.12})$$

où  $\mu_n = \langle \chi^n \rangle$  désigne le moment d'ordre  $n$ . Une variante à cette méthode dont le but est d'accélérer la convergence consiste à développer la fonction en question sous la forme :

$$\psi(\lambda) = \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n C_n}{n!} \right), \quad (\text{III.13})$$

où la série de puissances figure dans l'argument d'une fonction exponentielle même et le coefficient  $C_n$ , qui reste à déterminer, s'appelle le cumulants d'ordre  $n$ . En prenant les logarithmes de (III.12) et (III.13) et en identifiant les mêmes puissances en  $\lambda$  des deux développements, on peut en principe exprimer tous les cumulants en termes des moments d'ordre égal ou inférieur. Nous donnons ci-dessous l'expression des premiers cumulants :

$$\begin{aligned} C_1 &= \mu_1 \\ C_2 &= \mu_2 - \mu_1^2 \\ C_3 &= \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3 \\ C_4 &= \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2 + 12\mu_2\mu_1^2 - 6\mu_1^4 \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

Ce qui a motivé ce nouveau développement est que pour un processus gaussien, les cumulants d'ordre supérieur ou égal à trois sont nuls, (ici le processus aléatoire est supposé quasi-gaussien). C'est pour cette raison que nous gardons seulement les deux premiers cumulants dans le calcul de la fonction d'orbite et nous avons :

$$\begin{aligned} \langle e^{i\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau)} \rangle &\approx \exp \left\{ i \langle \vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau) \rangle - \frac{1}{2} \left[ \langle (\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau))^2 \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \langle \vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau) \rangle^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Le critère de convergence d'un tel développement a été étudié par Van Kampen [23] et Fox [24] et s'écrit, ici,  $|\langle \vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau) \rangle| < 1$ , autrement dit, la déviation dans la position de la particule doit être inférieure à la longueur d'onde caractéristique  $2\pi/k$ . On montrera plus tard que cette condition coïncide avec la condition  $\tau < \tau_D$ .

Revenons maintenant à (III.14) et nous commençons par évaluer le second moment qui s'écrit en utilisant (III.6),

$$\langle (\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau))^2 \rangle = \frac{e^2}{m^2} \int_0^\tau d\tau' \int_0^\tau d\tau'' (\tau-\tau')(\tau-\tau'') \vec{k} \cdot \vec{\Phi}(\tau', \tau'') \cdot \vec{k} \quad (\text{III.15})$$

avec

$$\vec{\Phi}(\tau', \tau'') = \langle \delta \vec{E}(\vec{x}(t-\tau'), t-\tau') \delta \vec{E}(\vec{x}(t-\tau''), t-\tau'') \rangle \quad (\text{III.15.a})$$

Comme l'intégrand de (III.15) est symétrique par rapport à  $\tau'$  et  $\tau''$ , on a :

$$\langle (\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau))^2 \rangle = \frac{2e^2}{m^2} \int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' (\tau-\tau')(\tau-\tau'') \vec{k} \cdot \vec{\Phi}(\tau', \tau'') \cdot \vec{k} \quad (\text{III.16})$$

En faisant un changement de variables :  $\tau' - \tau'' = \theta$ , on peut écrire (III.16) sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle (\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau))^2 \rangle &= 2 \int_0^\tau d\tau' (\tau-\tau')^2 \vec{k} \cdot \vec{D}^R(\vec{v}, t; \tau') \cdot \vec{k} \\ &+ 2 \int_0^\tau d\tau' (\tau-\tau') \vec{k} \cdot \vec{F}^R(\vec{v}, t; \tau) \cdot \vec{k} \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

avec

$$\vec{D}^R(\vec{v}, t; \tau') = \frac{e^2}{m^2} \sum_{\vec{k}'} \vec{k}' \vec{k}' I_{\vec{k}'}(t) \int_0^{\tau'} d\theta e^{i(\omega' - \vec{k}' \cdot \vec{v})\theta} \Pi(t; \tau'; \theta) \quad (\text{III.17.a})$$

et

$$\vec{F}^R(\vec{v}, t; \tau) = \frac{e^2}{m^2} \sum_{\vec{k}'} \vec{k}' \vec{k}' I_{\vec{k}'}(t) \int_0^{\tau'} \theta d\theta e^{i(\omega' - \vec{k}' \cdot \vec{v})\theta} \Pi(t; \tau'; \theta), \quad (\text{III.17.b})$$

$$\Pi(t; \tau'; \theta) = \langle e^{i\vec{k}' \cdot [\Delta\vec{x}(t-\tau') - \Delta\vec{x}(t-\tau'+\theta)]} \rangle$$

Considérons maintenant le premier terme de l'exponentielle figurant dans (III.14) :

$$\langle \vec{k} \cdot \Delta\vec{x}(t-\tau) \rangle = \frac{e}{m} \int_0^\tau d\tau' (\tau-\tau') \langle \delta\vec{E}(\vec{x}(t-\tau'), t-\tau') \cdot \vec{k} \rangle,$$

en utilisant un développement de Taylor pour la fonction  $\delta\vec{E}$  autour de l'orbite libre et en ne retenant que le premier terme non nul, on a :

$$\langle \vec{k} \cdot \Delta\vec{x}(t-\tau) \rangle \approx \frac{e}{m} \int_0^\tau d\tau' (\tau-\tau') \langle \Delta\vec{x}(t-\tau') \cdot \frac{\partial \vec{k}}{\partial \vec{x}} \cdot \delta\vec{E}(\vec{x}-\vec{v}\tau', t-\tau') \rangle \quad (\text{III.18})$$

En substituant pour  $\Delta\vec{x}(t-\tau')$ , donné par (III.6), dans (III.18) fait apparaître en (III.18)  $(\tau'-\tau'') \langle \delta\vec{E}(\vec{x}(t-\tau''), t-\tau'') \cdot \frac{\partial \vec{k}}{\partial \vec{x}} \cdot \delta\vec{E}(\vec{x}-\vec{v}\tau', t-\tau') \rangle$  et lorsqu'on transforme en Fourier "δE" on trouve que  $(\tau'-\tau'') \langle \dots \rangle \approx -\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \langle \dots \rangle$ . Compte tenu de ce détail, (III.18) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \langle \vec{k} \cdot \Delta\vec{x}(t-\tau) \rangle &= - \int_0^\tau d\tau' (\tau-\tau') \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{D}^R(\vec{v}, t; \tau') \cdot \vec{k} \\ &\quad - \int_0^\tau d\tau' \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{F}^R(\vec{v}, t; \tau') \cdot \vec{k}, \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

et  $\vec{D}^R$  et  $\vec{F}^R$  sont donnés par (III.17.a) et (III.17.b).

Pour pouvoir donner des expressions explicites pour  $\langle \Delta\vec{x}(t-\tau) \rangle$  et  $\langle (\Delta\vec{x}(t-\tau))^2 \rangle$ , qui ne contiennent pas  $\Delta\vec{x}$  à un temps antérieur, on pose la fonction  $\Pi = 1$ , c'est-à-dire qu'on coupe le processus de renormalisation. Cela est possible tant qu'on tient compte seulement des modes caractérisés par des vecteurs d'onde  $\vec{k}'$  qui ne sont pas au voisinage du mode  $\vec{k}$  et puisque le mode  $\vec{k}$  satisfait à la condition  $|\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v}| \leq v_k$ , on exige alors que les modes  $\vec{k}'$  satisfont à  $|\omega_{\vec{k}'} - \vec{k}' \cdot \vec{v}| > v_{k'}$ . Cette condition détermine, en effet, le domaine de  $\vec{k}'$ , où la variation de la

fonction  $\Pi$  de l'unité est négligeable. On peut dans ce cas écrire (III.17.a) et (III.17.b) sous les formes :

$$\overset{\leftrightarrow}{D}^R(\vec{v}, t; \tau') = \frac{e^2}{m^2} \sum_{\vec{k}' \in Q_{\vec{k}}} \vec{k}' \vec{k}' I_{\vec{k}'}(t) \int_0^{\tau'} d\theta e^{i(\omega' - \vec{k}' \cdot \vec{v})\theta}, \quad (\text{III.20})$$

$$\overset{\leftrightarrow}{F}^R(\vec{v}, t; \tau') = \frac{e^2}{m^2} \sum_{\vec{k}' \in Q_{\vec{k}}} \vec{k}' \vec{k}' I_{\vec{k}'}(t) \int_0^{\tau'} \theta d\theta e^{i(\omega' - \vec{k}' \cdot \vec{v})\theta} \quad (\text{III.21})$$

et  $Q_{\vec{k}} = \{\vec{k}' : |\vec{k} - \vec{k}'| > |k'|\}$ . La définition de  $Q_{\vec{k}}$  provient de la condition citée plus haut, qui exige d'écartier les modes  $\vec{k}'$  satisfaisant à  $|\vec{k} - \vec{k}'| \ll |\vec{k}|$ . De ces formules, on peut exprimer les comportements limites des  $\overset{\leftrightarrow}{D}^R$  et  $\overset{\leftrightarrow}{F}^R$  pour  $\tau < \tau_c$  et  $\tau > \tau_c$  comme suit :

$$\overset{\leftrightarrow}{D}^R(\vec{v}, t; \tau) = \begin{cases} \frac{e^2 \pi}{m^2} \sum_{\vec{k}' \in Q_{\vec{k}}} \vec{k}' \vec{k}' I_{\vec{k}'}(t) \left( \tau - \frac{(\omega' - \vec{k}' \cdot \vec{v})^2 \tau^3}{3!} \right), & \tau < \tau_c \\ \frac{e^2 \pi}{m^2} \sum_{\vec{k}' \in Q_{\vec{k}}} \vec{k}' \vec{k}' I_{\vec{k}'}(t) \delta(\omega' - \vec{k}' \cdot \vec{v}) \equiv \overset{\leftrightarrow}{D}^{QL}(\vec{v}, t), & \tau > \tau_c \end{cases} \quad (\text{III.20.a})$$

$$\overset{\leftrightarrow}{F}^R(\vec{v}, t; \tau) = \begin{cases} \frac{e^2}{m^2} \sum_{\vec{k}' \in Q_{\vec{k}}} \vec{k}' \vec{k}' I_{\vec{k}'}(t) \left[ \frac{\tau^2}{2} - (\omega' - \vec{k}' \cdot \vec{v})^2 \frac{\tau^4}{8} \right], & \tau < \tau_c \\ \frac{e^2}{m^2} \sum_{\vec{k}' \in Q_{\vec{k}}} \vec{k}' \vec{k}' \text{ p.p. } \frac{-1}{(\omega - k \cdot v)^2} \equiv \overset{\leftrightarrow}{F}^{QL}(\vec{v}, t), & \tau > \tau_c \end{cases} \quad (\text{III.21.a})$$

En substituant les expressions des tenseurs  $\overset{\leftrightarrow}{D}^R$  et  $\overset{\leftrightarrow}{F}^R$  données par (III.20.a) et (III.21.a) dans les formules (III.17) et (III.19), les deux premiers moments de la déviation d'orbite sont donnés, pour les limites  $\tau < \tau_c$  et  $\tau > \tau_c$ , par :

$$\langle \vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t - \tau) \rangle = \begin{cases} \frac{-e^2 \tau^5}{60 m^2} \sum_{\vec{k}' \in Q_{\vec{k}}} (\vec{k} \cdot \vec{k}') k'^2 I_{\vec{k}'}(t) (\omega' - \vec{k}' \cdot \vec{v}), & \tau < \tau_c \\ -\frac{\tau^2}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \overset{\leftrightarrow}{D}^{QL}(\vec{v}, t) \cdot \vec{k} - \tau \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \overset{\leftrightarrow}{F}^{QL}(\vec{v}, t) \cdot \vec{k}, & \tau > \tau_c \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

et

$$\langle (\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau))^2 \rangle = \begin{cases} \frac{e^2 \tau^4}{4m^2} \sum_{\vec{k}' \in Q_{\vec{k}}} (\vec{k} \cdot \vec{k}')^2 I_{\vec{k}'}(t) & \tau < \tau_c \\ \frac{2}{3} \tau^3 \vec{k} \cdot \vec{D}^{QL}(\vec{v}, t) \cdot \vec{k} + \tau^2 \vec{k} \cdot \vec{F}^{QL}(\vec{v}, t) \cdot \vec{k} & \tau > \tau_c \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

D'après les résultats précédents ((III.22) et (III.23)), on trouve que le temps requis pour que  $|\langle (\Delta \vec{x} \cdot \vec{k})^2 \rangle| \approx 1$  est de l'ordre de  $(k^2 D^{QL})^{-1/3}$ , qui est d'ailleurs le temps de diffusion des particules par les ondes dénoté par " $\tau_D$ ". Alors les expressions (III.22) et (III.23) sont valables tant que  $\tau < \tau_D$ , ce qui est la condition de validité de développement en cumulant.

Nous tenons à souligner que les coefficients numériques en (III.22) et (III.23) sont identiques à ceux donnés par Gupta [25] alors qu'ils sont différents de ceux donnés par Birmingham et Bornatici [22] (éq. 28). Cette différence provient du fait que ces derniers auteurs ont négligé le terme  $\vec{F}^R(\vec{v}, t; \tau)$ .

### III.b.2. FONCTION DE RESONANCE RENORMALISEE

Les formules (III.22) et (III.23) montrent que les deux premiers moments de  $\Delta \vec{x}$  sont, tous les deux, quadratiques par rapport au champ électrique, ce qui nous permet de négliger le dernier terme dans la formule (III.14). En substituant (III.17) et (III.19) dans (III.14) et puis dans (III.11.a), on obtient la fonction  $g_{\vec{k}, \omega}^R$  :

$$g_{\vec{k}, \omega}^R = \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})\tau + i \int_0^\tau d\tau' (\tau - \tau') \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{D}^R(\vec{v}, t; \tau') \cdot \vec{k}} \\ \times e^{-i \int_0^\tau d\tau' \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{F}^R(\vec{v}, t; \tau') \cdot \vec{k}} - \int_0^\tau d\tau' (\tau - \tau')^2 \vec{k} \cdot \vec{D}^R(\vec{v}, t; \tau') \cdot \vec{k} \\ \times e^{-\int_0^\tau d\tau' (\tau - \tau') \vec{k} \cdot \vec{F}^R(\vec{v}, t; \tau') \cdot \vec{k}} \quad (\text{III.24})$$

et  $\overleftrightarrow{D}^R$  et  $\overleftrightarrow{F}^R$  sont respectivement donnés par (III.20.a) et (III.21.a).

Dans la théorie de Dupree-Weinstock, seul le terme contenant  $\overleftrightarrow{D}^R$  (et qui est en gros proportionnel à  $\tau^3$ ) a été retenu, et celui-ci a pour effet d'élargir le domaine de résonance aux particules telles que  $|\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v}| \leq (\vec{k} \cdot \overleftrightarrow{D}^R \cdot \vec{k})^{1/3}$ . Cette inégalité définit, d'ailleurs, le domaine de validité de la fonction de résonance donnée par (III.24). Dans le domaine dit "non-résonnant" où  $|\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v}| > (\vec{k} \cdot \overleftrightarrow{D}^R \cdot \vec{k})^{1/3}$ , on a en effet pour la fonction de résonance,

$$g_{\vec{k}, \omega}^{(0)} = \int_0^{\infty} e^{i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})\tau} d\tau \quad (\text{III.25})$$

Pour illustrer l'élargissement de résonance exprimé par (III.24), nous représentons la partie réelle de la fonction de résonance en retenant seulement le terme  $\overleftrightarrow{D}^R$ , considéré comme indépendant de la vitesse, sur la figure (2), où on observe que la partie réelle de la fonction  $g_{\vec{k}, \omega}^R$  cesse d'avoir la forme d'une fonction delta et possède une largeur de l'ordre de  $\Delta v \approx (D/k)^{1/3}$ . Ici, on suppose que  $\overleftrightarrow{D}^R$  est isotrope d'où  $\vec{k} \cdot \overleftrightarrow{D}^R \cdot \vec{k} = k^2 D$ .

### III.c. EQUATION DE FERMETURE

Nous établissons, ici, l'équation de fermeture du système (III.7) et (III.7.a) et nous considérons d'abord la relation de dispersion.

#### III.c.1. RELATION DE DISPERSION

Nous venons de montrer que la partie fluctuante  $\delta f_{\vec{k}}$  est donnée, dans le cadre de la théorie de turbulence forte, par



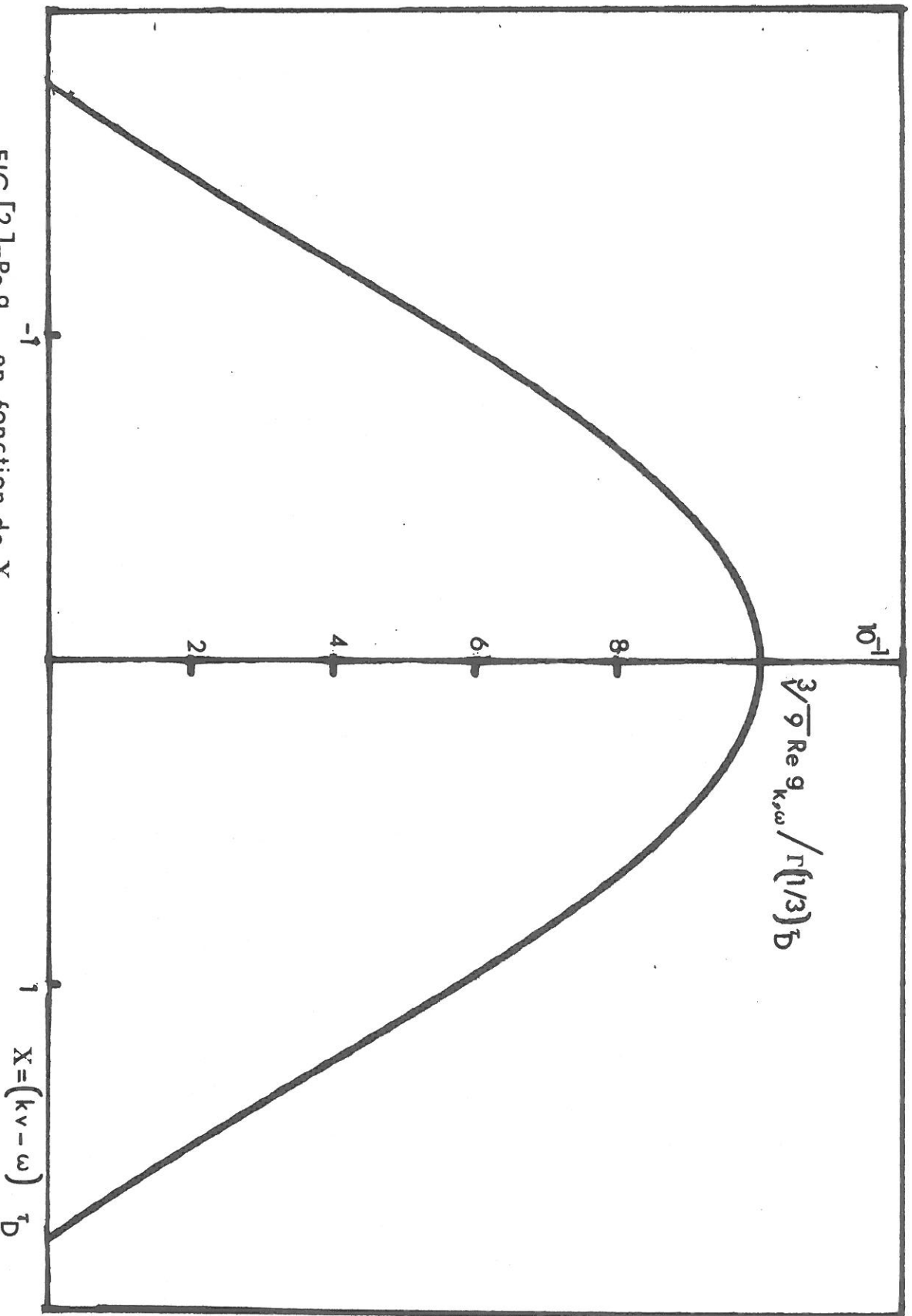


FIG.[2] -  $\operatorname{Re} g_{k,\omega}$  en fonction de  $X$



(III.11). Lorsqu'on substitue (III.11) dans l'équation de Poisson, on obtient l'équation :

$$\left. \begin{aligned} \zeta^R(\vec{k}, \omega, t) \delta \vec{E}_{\vec{k}} &= 0, \\ \zeta^R(\vec{k}, \omega, t) &= 1 - i \sum_s \frac{4\pi e_s^2}{m_s k^2} \int d\vec{v} \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F(\vec{v}, t) g_{\vec{k}, \omega}^R \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.26})$$

ainsi que l'équation cinétique d'onde qui s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} I_{\vec{k}}(t) &= 2\gamma_{\vec{k}}^R(t) I_{\vec{k}}(t), \\ \gamma_{\vec{k}}^R(t) &= - \frac{\text{Im} \zeta^R(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, t)}{\frac{\partial}{\partial \omega_{\vec{k}}} (\text{Re} \zeta^R(k, \omega_{\vec{k}}, t))} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.27})$$

L'équation (III.27) constitue l'équation de fermeture du système (III.7) et (III.7.a), qui détermine l'évolution de la FDM et du champ électrique, dans le cadre de la théorie de turbulence forte, de façon autocohérente.

#### III.d. CONDITIONS DE VALIDITE

Les conditions de validité de la théorie de turbulence forte sont i)  $\Omega^2 \tau_C^2 (\equiv \tau_C^2 / \tau_D^2) \ll 1$  ii)  $\tau_C \ll \tau_E$  iii)  $\tau_D \ll \tau_E$ . Ces trois conditions se résument par une double condition  $\tau_C \ll \tau_D \ll \tau_E$ .

Les corrections markoviennes qui résultent de garder les variations de  $\vec{x}(t-\tau)$  et  $\vec{v}(t-\tau)$  dans la fonction  $F$ , ou qui provient de garder la variation de  $F$  pendant un temps court (de l'ordre du temps de corrélation) ont été, jusqu'à présent, négligées dans notre étude. L'étude de ces corrections fera l'objet du paragraphe (III.f).

Nous passons, maintenant, à la démonstration que la théorie en question est de nature renormalisée.

### III.e. METHODE UTILISANT LA RESOMMATION DES DIAGRAMMES

Nous revenons à l'équation (III.2) relative à la partie fluctuante écrite sous la forme :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right) \delta f = - \frac{e}{m} \delta \vec{E} \cdot \frac{\partial F}{\partial \vec{v}} - \frac{e}{m} \delta \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \delta f ,$$

et que nous résolvons par la méthode itérative en employant la représentation diagrammatique déjà exposée au chapitre précédent. Parmi tous les diagrammes contribuant à la composante de Fourier  $\vec{k}$  de la partie fluctuante, nous sélectionnons uniquement, à présent, ceux qui possèdent un nombre impair de lignes du champ et dont la  $(2n)$ -ième ligne a un vecteur d'onde opposé à celui de la  $(2n-1)$ -ième ligne. Ces diagrammes se terminent donc tous par une ligne de champ  $\vec{E}_{\vec{k}, \omega_1}$  et sont représentés dans la série ci-dessous :

$$\delta f_{\vec{k}, \omega} = \frac{\vec{E}_{\vec{k}, \omega_1}}{g_{\vec{k}, \omega}^{(0)}} F + \frac{\vec{E}_{\vec{k}, \omega_1}}{g_{\vec{k}}^{(0)}} F + \frac{\vec{E}_{\vec{k}, \omega_1}}{g_{\vec{k}}^{(0)}} F + \dots \quad (\text{III.28})$$

soit encore

$$\delta f_{\vec{k}, \omega} = \frac{\vec{E}_{\vec{k}, \omega_1}}{g_{\vec{k}, \omega}^{(0)}} F + \frac{\vec{E}_{\vec{k}, \omega_1}}{g_{\vec{k}}^{(0)}} F + \dots \quad (\text{III.28.a})$$

Algébriquement, cette équation s'écrit sous la forme :

$$(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v} + i \hat{v}_{\vec{k}}) \delta f_{\vec{k}, \omega} = - \frac{ie}{m} \delta \vec{E}_{\vec{k}, \omega} \cdot \frac{\partial F}{\partial \vec{v}} , \quad (\text{III.29})$$

$$\hat{v}_{\vec{k}} = -i \frac{e^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \sum_{\vec{k}'} \int \frac{d\omega'}{2\pi} g_{\vec{k}-\vec{k}', \omega-\omega'}^{(0)} \langle \delta \vec{E}_{\vec{k}', \omega'} \cdot \delta \vec{E}_{-\vec{k}, \omega'} \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \quad (\text{III.30})$$

$$= - \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \overset{\leftrightarrow}{D}_{\vec{k}}^{QL} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}}$$

La solution de (III.29) se met sous la forme :

$$\delta f_{\vec{k},\omega} = - \frac{e}{m} \int d\vec{v}' G_{\vec{k},\omega}(\vec{v},\vec{v}') \delta \vec{E}_{\vec{k},\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}'} F(\vec{v}',t), \quad (\text{III.31})$$

où  $G_{\vec{k},\omega}(\vec{v},\vec{v}')$  est la fonction de Green non-locale. Cette propriété non-locale reflète, en effet, les effets non-markoviens.

Dans le cas où on remplace  $\frac{\partial}{\partial \vec{v}'} F(\vec{v}',t)$  par  $\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(\vec{v},t)$  dans (III.31), c'est-à-dire qu'on néglige les effets non-markoviens et qui est notre objectif à présent, ensuite on substitue dans (III.29), on obtient :

$$\int d\vec{v}' (\omega - \vec{k} \cdot \vec{v} + i\nu_{\vec{k}}) G_{\vec{k},\omega}(\vec{v},\vec{v}') = i \quad (\text{III.32})$$

et on trouve que la fonction  $G_{\vec{k},\omega}(\vec{v},\vec{v}')$  est proportionnelle à la fonction  $\delta(\vec{v}-\vec{v}')$ , autrement dit qu'elle est locale.

Maintenant, on pose  $G_{\vec{k},\omega}(\vec{v},\vec{v}') = g_{\vec{k},\omega}^* \delta(\vec{v}-\vec{v}')$  et l'équation (III.32) est ramenée sous la forme :

$$\left( \omega - \vec{k} \cdot \vec{v} - \frac{i\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \overset{\leftrightarrow}{D}_{\vec{k}}^{QL} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right) g_{\vec{k},\omega}^* = i \quad (\text{III.33})$$

La résolution de l'équation (III.33) ne peut évidemment pas se faire dans le cas général sans préciser la dépendance en  $\vec{v}$  du tenseur  $\overset{\leftrightarrow}{D}^{QL}$ . Nous nous contentons de nous placer auprès de la résonance  $\omega - \vec{k} \cdot \vec{v} = 0$  et approximer le tenseur  $\overset{\leftrightarrow}{D}_{\vec{k}}^{QL}$  et  $\overset{\leftrightarrow}{D}_{\vec{k}} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \overset{\leftrightarrow}{D}$  par des quantités constantes et l'équation à résoudre s'écrit :

$$\left( \omega - \vec{k} \cdot \vec{v} - i\overset{\leftrightarrow}{D}_{\vec{k}}^{QL} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} - i\overset{\leftrightarrow}{D}_{\vec{k}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right) g_{\vec{k},\omega}^* = i \quad (\text{III.34})$$

En définissant la transformée de Fourier de la fonction  $g_{\vec{k},\omega}^*$  dans l'espace des vitesses comme

$$g_{\vec{k},\omega}^*(\vec{v}) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{v}} g_{\vec{k},\omega}^*(\vec{p}), \quad (\text{III.35})$$

et dans l'hypothèse d'un spectre quasi-isotrope  $\overset{\leftrightarrow}{D}_k^{QL} = D_k \overset{\leftrightarrow}{I}$  ;  $\overset{\leftrightarrow}{I}$  est le tenseur unité, l'équation vérifiée par la fonction transformée est donc :

$$\left[ \omega + ik \frac{d}{dp_{\parallel}} + \overset{\leftrightarrow}{D}'_k \cdot \vec{p} + iD_k(p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2) \right] g_{\vec{k},\omega}(p) = i(2\pi)^3 \delta(\vec{p}) , \quad (\text{III.36})$$

où les indices  $\parallel$  et  $\perp$  se réfèrent à la direction de  $\vec{k}$  choisi le long de l'axe  $\vec{z}$ . L'équation différentielle ordinaire précédente s'intègre facilement et donne :

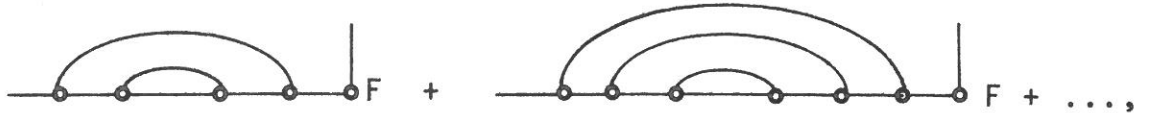
$$g_{\vec{k},\omega}(p_{\parallel}, p_x, p_y) = \frac{(2\pi)^3}{k} \delta(p_x) \delta(p_y) \times \exp \left\{ - \frac{D_k p_{\parallel}^3}{3k} + \frac{iD'_k p_{\parallel}^2}{2k} + \frac{i(\omega - D_k p_{\perp}^2) p_{\parallel}}{k} \right\} \Theta(p_{\parallel}) \quad (\text{III.37})$$

En substituant (III.37) dans (III.35), on trouve que l'intégration sur les variables  $p_x$  et  $p_y$  est triviale alors que l'intégration sur  $p_{\parallel}$  subsiste et on obtient la fonction  $g_{\vec{k},\omega}^*$ , qui est en effet la fonction de résonance contenant l'effet de l'élargissement de résonance (en posant  $p_{\parallel} = k\tau$ ).

$$g_{\vec{k},\omega}^* = \int_0^{\infty} d\tau e^{i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})\tau + iD'_k k \tau^2 - \frac{\tau^3 k^2}{3} D_k} \quad (\text{III.38})$$

Une expression analogue pour  $g_{\vec{k},\omega}$  a été donnée par Rudakov et Tsytovich [20], à l'exception du terme  $D'_k$ . On remarque, toutefois, que la comparaison de  $g_{\vec{k},\omega}^*$  donné par (III.38) avec la fonction  $g_{\vec{k},\omega}^R$  donnée par (III.24) montre que  $g_{\vec{k},\omega}^*$  est une forme particulière de  $g_{\vec{k},\omega}^R$  en représentant  $\overset{\leftrightarrow}{D}^R(\vec{v}, t; \tau')$  et  $\overset{\leftrightarrow}{F}^R(\vec{v}, t; \tau')$  par leur expression pour  $\tau' > \tau_c$  (cf. (III.20.a) et (III.21.a)). On note aussi que le terme  $\overset{\leftrightarrow}{F}^{QL}(\vec{v}, t)$  qui apparaîtrait en substituant (III.21.a) dans (III.24) est déjà contenu dans le terme  $D_k$  apparaissant dans (III.38). En effet si l'on avait développé  $\overset{\leftrightarrow}{D}_k^{QL}(\vec{v}, t)$  autour de  $(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$  :  $\overset{\leftrightarrow}{D}_k^{QL}(\vec{v}, t) = \overset{\leftrightarrow}{D}^{QL} - (\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \overset{\leftrightarrow}{F}^{QL} + \dots$  et substitué dans (III.34), on aurait dû obtenir des termes contenant  $\overset{\leftrightarrow}{F}^{QL}(\vec{v}, t)$  dans (III.38) exactement comme dans (III.24) (après avoir introduit dedans (III.21.a)).

Plusieurs auteurs (Kono et Ichikawa [26], Thomson et Benford [27] et Choi et Horton [28]) ont obtenu, à tort comme nous allons le montrer, une formule pour la fonction de résonance analogue à (III.38) où le tenseur de diffusion quasi-linéaire est remplacé par le tenseur renormalisé. En effet, dans la série (III.28), on a négligé l'ensemble des diagrammes



où compte tenu de cet ensemble est équivalent à renormaliser le propagateur  $g_{\vec{k}-\vec{k}_1}^{(0)}$  qui apparaît dans  $\hat{v}_{\vec{k}}^R$  (cf. (III.30)). On réécrit (III.28) avec l'ensemble des diagrammes cités :

$$\begin{aligned} \delta f_{\vec{k},\omega} &= \text{---} \circ \text{---} F + \left( \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} F + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} F + \dots \right) \\ &+ \left( \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} F + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} F + \dots \right) \\ &= \text{---} \circ \text{---} F + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} F + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} F + \dots \quad (\text{III.39}) \end{aligned}$$

ou encore

$$\delta f_{\vec{k},\omega} = \text{---} \circ \text{---} F + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \delta f_{\vec{k},\omega} \quad (\text{III.40})$$

Algébriquement (III.40) s'écrit :

$$(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v} + i\hat{v}_{\vec{k}}^R) \delta f_{\vec{k},\omega} = - \frac{ie}{m} \delta \vec{E}_{\vec{k},\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F, \quad (\text{III.40.a})$$

$$\hat{v}_{\vec{k}}^R = - \frac{ie^2}{m^2} \sum_{\vec{k}_1} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \int_{-\infty+i}^{\infty+i\delta} \frac{d\omega'}{2\pi} \langle \delta \vec{E}_{\vec{k}_1, \omega'} \cdot \delta \vec{E}_{-\vec{k}_1, \omega'} \rangle g_{\vec{k}-\vec{k}_1}^R \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \quad (\text{III.40.b})$$

$$\equiv - \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \hat{D}^R \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}},$$

$$g_{\vec{k}-\vec{k}'}^R = \left( g_{\vec{k}-\vec{k}'}^{(0)-1} + i\hat{v}_k^R \right)^{-1} \quad (\text{III.40.c})$$

On remarque qu'on ne peut pas appliquer la technique employée précédemment pour résoudre le système des équations (III.40.a)-(III.40.c) puisqu'ici le tenseur  $\hat{D}^R$  est un opérateur. Par conséquent, on ne peut pas obtenir une formule pour  $g_{\vec{k},\omega}^R$ , analogue à celle donnée par (III.38), à partir du système des équations (III.40.a)-(III.40.c) (comme il a été donné dans les références [26-28]).

### III.f. EFFETS NON-MARKOVIENS

Dans ce paragraphe nous tenons compte des termes non-markoviens négligés dans les paragraphes (III.b) (cf. (III.3) et (III.7)) et (III.e) (cf. (III.31) et (III.32)), et montrons la contribution de ces termes à la partie fluctuante de la fonction de distribution ainsi qu'à la fonction de résonance. Des théories plus sophistiquées, destinées à ce problème ont été formulées par Misguich et Balescu [29], et Pelletier et Pomot [30] (voir aussi Catto [31]). Mais, ici, on continue l'exposé développé dans le paragraphe précédent. Dans la solution (III.31) de l'équation (III.30), on conserve dans ce cas  $\frac{\partial F}{\partial \vec{v}'}(\vec{v}', t)$  et lorsqu'on reporte (III.31) dans (III.28), on obtient l'équation :

$$\int d\vec{v}' (\omega - \vec{k} \cdot \vec{v} + i\hat{v}_k) G_{\vec{k},\omega}(\vec{v}, \vec{v}') \delta \vec{E}_{\vec{k}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}'} F(\vec{v}', t) = \\ i \int d\vec{v}' \delta(\vec{v} - \vec{v}') \delta \vec{E}_{\vec{k}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}'} F(\vec{v}', t) . \quad (\text{III.41})$$

On introduit la fonction  $\Psi(\vec{v}', t) = \frac{\partial}{\partial \vec{v}'} F(\vec{v}', t)$  et en définissant la transformée de Fourier de la fonction  $\Psi(\vec{v}', t)$  :

$$\Psi(\vec{v}', t) = \int \frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}' \cdot \vec{v}'} \Psi_0(\vec{p}') , \quad (\text{III.42})$$



on peut écrire l'équation (III.31) sous la forme :

$$(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v} + i\nu_k) G_{\vec{k}, \omega}(\vec{v}; \vec{p}') = i e^{i\vec{p}' \cdot \vec{v}}. \quad (\text{III.43})$$

On définit de plus la transformée de Fourier du propagateur  $G_{\vec{k}, \omega}$  par rapport à  $\vec{v}$  et en utilisant la même méthode qu'au paragraphe précédent, on obtient :

$$\left[ \omega + ik \frac{d}{dp_{\parallel}} + \vec{D}'_k \cdot \vec{p} + iD_k(p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2) \right] \tilde{G}_{\vec{k}, \omega}(\vec{p}, \vec{p}') = i(2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (\text{III.44})$$

Cette équation s'intègre facilement et donne :

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\vec{k}, \omega}(\vec{p}, \vec{p}') &= (2\pi)^3 \Theta(p_{\parallel} - p'_{\parallel}) \delta(p_x - p'_x) \delta(p_y - p'_y) \times \\ &\exp \left\{ -\frac{D_k}{3k} (p_{\parallel}^3 - p'_{\parallel}{}^3) + \frac{iD'_k}{2k} (p_{\parallel}^2 - p'_{\parallel}{}^2) + \frac{(i\omega - D_k p_{\perp}^2)}{k} (p_{\parallel} - p'_{\parallel}) \right. \\ &\left. + i \frac{D'_k}{k} (p_x + p_y) (p_{\parallel} - p'_{\parallel}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

Le propagateur  $G_{\vec{k}, \omega}(\vec{v}, \vec{v}')$  s'obtient maintenant en substituant dans la formule liant la transformée de Fourier  $\tilde{G}_{\vec{k}, \omega}$  à la fonction originale  $G_{\vec{k}, \omega}$  :

$$G_{\vec{k}, \omega}(\vec{v}, \vec{v}') = \iiint \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{v} - \vec{p}' \cdot \vec{v}')} \tilde{G}_{\vec{k}, \omega}(\vec{p}, \vec{p}') \quad (\text{III.46})$$

Dans (III.46), l'intégration sur les variables  $p_x, p_y, p'_x$  et  $p'_y$  est triviale alors que l'intégration sur les variables  $p_{\parallel}$  et  $p'_{\parallel}$  nécessite le changement de variables

$$\begin{aligned} p_{\parallel} - p'_{\parallel} &= k\tau, \\ p_{\parallel} + p'_{\parallel} &= ky, \end{aligned}$$

lequel permet d'effectuer l'intégrale sur  $y$  tandis que l'intégrale sur  $\tau$  reste. Le résultat de cette opération s'écrit :

$$G_{\vec{k}, \omega}(\vec{v}, \vec{v}') = \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{(4\pi D\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{k^2 D_k \tau^3}{12} + i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})\tau - \frac{i\vec{k} \cdot (\vec{v} - \vec{v}')\tau}{2} + \frac{(\vec{v} - \vec{v}' + \vec{D}'_k \tau)^2}{4D\tau}\right\}, \quad (\text{III.47})$$

et on voit que la fonction de Green n'est pas locale dans l'espace des vitesses, c'est-à-dire qu'elle n'est pas proportionnelle à la fonction  $\delta(\vec{v} - \vec{v}')$ . Cela provient du fait qu'on tient compte de l'effet non-markovien.

### III.f.1. COMPARAISON AVEC LA THEORIE STATISTIQUE DE LA TURBULENCE FORTE

Nous voulons montrer, ici, que les termes non-markoviens, apparaissant dans (III.47), peuvent être obtenus aussi par la théorie statistique de la turbulence forte, que nous avons développée dans le paragraphe III.b.

D'abord, on reporte l'expression (III.47) pour la fonction de Green dans (III.31) et à l'aide de (III.42) on peut effectuer l'intégrale sur la variable  $\vec{v}'$  et on obtient :

$$\delta f_{\vec{k}, \omega} = -\frac{e\delta E_{\vec{k}, \omega}}{m} \int \frac{d\vec{p}}{2\pi} \vec{\psi}_0(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{v}} \int_0^{\infty} d\tau e^{-\frac{k^2 D_k \tau^3}{3} + i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})\tau} \times e^{-i\vec{k} \cdot \vec{D}'_k \frac{\tau^2}{2} + p k D_k \tau^2 - p^2 D_k \tau + i\vec{p} \cdot \vec{D}'_k \tau}. \quad (\text{III.48})$$

Si la dépendance en  $p$  (associé à  $D_k$  et  $\vec{D}'_k$ ) dans l'exponentielle était ignorée, on retrouverait le résultat du paragraphe III.b pour la fonction de résonance et la partie fluctuante de la fonction de distribution. Ces termes supplémentaires proviennent des effets non-markoviens. Autrement dit, ils correspondent aux corrélations position-vitesse et vitesse-vitesse, compte tenu de la variation de  $\vec{v}' \equiv \vec{v}(t')$  dans la fonction  $F$  (cf. (III.31) ou (III.3)).

Maintenant, revenons à (III.3). Considérons la fonction  $F$  homogène et en faisant une analyse de Fourier pour la fonction  $\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}$  selon (III.42) puis approcher la partie stochastique par sa moyenne, ce qui donne pour la transformée de Fourier  $\delta f_{\vec{k}, \omega}$  :

$$\delta f_{\vec{k}, \omega} = - \frac{e}{m} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \delta \vec{E}_{\vec{k}, \omega} \cdot \vec{\psi}_0(\vec{p}) \int_0^{\infty} d\tau e^{i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})\tau + i\vec{p} \cdot \vec{v}} \langle e^{i\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau) + i\vec{p} \cdot \Delta \vec{v}(t-\tau)} \rangle \quad (\text{III.49})$$

En employant à nouveau la technique du cumulants, comme dans la section III.b.1 (voir aussi Misguich et Balescu [32]), on a donc à calculer les quantités  $\langle \Delta \vec{x}(t-\tau) \rangle$ ,  $\langle \Delta \vec{v}(t-\tau) \rangle$ ,  $\langle \Delta \vec{x}(t-\tau) \Delta \vec{x}(t-\tau) \rangle$ ,  $\langle \Delta \vec{v}(t-\tau) \Delta \vec{v}(t-\tau) \rangle$  et  $\langle \Delta \vec{x}(t-\tau) \Delta \vec{v}(t-\tau) \rangle$ . Les moments de  $\Delta \vec{x}$  ont déjà été calculés dans la section III.b.1, alors que les moments de  $\Delta \vec{v}$  ainsi que la corrélation espace-vitesse, soit  $\langle \Delta \vec{x} \Delta \vec{v} \rangle$ , peuvent être calculés de la même façon et on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \langle \Delta \vec{v} \rangle &= \tau \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \text{Tr} \overset{\leftrightarrow}{D}^{QL} \\ \langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle &= 2 \overset{\leftrightarrow}{D}^{QL} \cdot \tau \\ \langle \Delta \vec{x} \Delta \vec{v} \rangle &= \overset{\leftrightarrow}{D}^{QL} \tau^2, \quad \tau > \tau_c \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.50})$$

ce qui donne précisément le résultat donné par (III.48).

### III.g. CONCLUSIONS

Nous résumons ici les conclusions importantes sur les résultats obtenus dans ce chapitre par :

- Puisqu'en utilisant la méthode de resommation de diagrammes, on a pu aboutir aux mêmes résultats (pour la fonction de résonance ainsi que pour la fonction de distribution) que ceux obtenus par la théorie (statistique) de la turbulence forte, alors cela montre que la théorie en question est de nature renormalisée.
- Le résultat donné par la formule (III.48), tenant compte des effets non-markoviens, peut s'interpréter comme celui donné par la théorie renormalisée en considérant des corrélations espace-vitesse.
- En gros, dans le cadre de la théorie de turbulence forte, la résonance est élargie selon l'inégalité  $|\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v}| \leq (\vec{k} \cdot \overleftrightarrow{D}^R \cdot \vec{k})^{1/3}$ , et cette condition définit le domaine de validité de la fonction de résonance "dite renormalisée".

### III.h. CONSERVATION DU NOMBRE TOTAL DES PARTICULES, DE L'ENERGIE ET DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

Nous montrons, ici, que le système des équations qui détermine l'évolution de la FDM et l'instabilité, obtenu soit dans le cadre de la théorie QL (cf. (II.12), (II.12.a) et (II.19)), soit dans le cadre de la théorie renormalisée (cf. (III.7), (III.8) et (III.27)), satisfait aux lois de conservation du nombre total des particules, de l'énergie et de la quantité de mouvement.

Nous montrons cela indépendamment de la forme particulière de la fonction de résonance.

#### III.h.1. CONSERVATION DU NOMBRE TOTAL DES PARTICULES

L'équation qui détermine l'évolution de la FDM est de type "équation de diffusion" :

$$\frac{\partial}{\partial t} F_s(\vec{v}, t) = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{D}_s(\vec{v}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F_s(\vec{v}, t), \quad s = e, i \quad (\text{III.51})$$

où, ici,  $\vec{D}(\vec{v}, t)$  peut être représenté par  $\vec{D}^{QL}$  ou  $\vec{D}^R$ .

En intégrant l'équation (III.51) sur la vitesse, on a

$$\frac{dn_s(t)}{dt} \equiv \int d\vec{v} \frac{\partial}{\partial t} F_s(\vec{v}, t) = \int d\vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{D}(\vec{v}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F_s(\vec{v}, t). \quad (\text{III.52})$$

et le membre de droite de (III.52) donne zéro du fait que  $F(\pm\infty, t) = 0$ , et on aboutit à :

$$n_s(t) = \text{const} = n_0, \quad s = e, i, \quad (\text{III.52.a})$$

où  $n_s(t)$  désigne le nombre total des particules en considération.

### III.h.2. CONSERVATION DE L'ENERGIE TOTALE (des particules et des ondes créées dans les plasmas)

On définit, d'abord, la densité d'énergie associée à un nombre des quasi-particules (plasmons ou phonons)  $N_{\vec{k}}$  par  $W_{\vec{k}} = N_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}$  ;  $N_{\vec{k}} = \frac{k^2}{8\pi} I_{\vec{k}}(t) \frac{\partial}{\partial \omega_{\vec{k}}} \text{Re} \zeta(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, t)$ . On commence par considérer la variation de l'énergie cinétique totale des particules :

$$\frac{d}{dt} \sum_s K_s = \frac{1}{2} \sum_s m_s \int d\vec{v} \vec{v}^2 \frac{\partial F_s(\vec{v}, t)}{\partial t}, \quad (\text{III.53})$$

où à l'aide de l'équation de diffusion (III.51), (III.53) devient :

$$\frac{d}{dt} \sum_s K_s = - \sum_s m_s \int d\vec{v} \vec{v} \cdot \vec{D}_s(\vec{v}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F_s(\vec{v}, t), \quad (\text{III.54})$$

$$\vec{D}_s(\vec{v}, t) = \frac{e_s^2}{m_s^2} \sum_{\vec{k}} \vec{k} \vec{k} I_{\vec{k}}(t) \text{Re} g_{\vec{k}, \omega}, \quad (\text{III.55})$$

et encore, ici,  $g_{\vec{k}, \omega}$  qui est la fonction de résonance peut être

remplacée soit par  $g_{\vec{k},\omega}^{(0)}$  soit par  $g_{\vec{k},\omega}^R$ . En substituant (III.55) dans (III.54), on obtient :

$$\frac{d}{dt} \sum_s K_s = - \sum_s \frac{e_s^2}{m_s} \sum_{\vec{k}} \int d\vec{v} (\vec{k} \cdot \vec{v}) \operatorname{Re} g_{\vec{k},\omega} I_{\vec{k}}(t) \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F(\vec{v}, t) \quad (\text{III.56})$$

Maintenant, on multiplie (III.33) (ou (III.40.a)) par  $\vec{k} \cdot \frac{\partial F_s}{\partial \vec{v}}$  et en intégrant sur la vitesse (à présent on considère (III.33)), on obtient

$$\int d\vec{v} \omega_{\vec{k}} \vec{k} \cdot \frac{\partial F_s}{\partial \vec{v}}(\vec{v}, t) g_{\vec{k},\omega_{\vec{k}}} = \int \vec{k} \cdot \vec{v} \vec{k} \cdot \frac{\partial F_s}{\partial \vec{v}}(\vec{v}, t) g_{\vec{k},\omega_{\vec{k}}} d\vec{v} \quad (\text{III.57})$$

Alors, à l'aide de (III.57), (III.56) s'écrit

$$\frac{d}{dt} \sum_s K_s = - \sum_s \frac{e_s^2}{m_s} \sum_{\vec{k}} \int d\vec{v} \omega_{\vec{k}} \operatorname{Re} g_{\vec{k},\omega_{\vec{k}}} I_{\vec{k}}(t) \vec{k} \cdot \frac{\partial F_s}{\partial \vec{v}}(\vec{v}, t) \quad (\text{III.58})$$

A l'aide de l'équation cinétique des ondes, (III.58) devient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_s K_s &= - \sum_{\vec{k}} \gamma_{\vec{k}}(t) I_{\vec{k}}(t) \omega_{\vec{k}} \frac{\partial \operatorname{Re} \zeta(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, t)}{\partial \omega_{\vec{k}}} \left( \frac{k^2}{4\pi} \right) \\ &= - \sum_{\vec{k}} \left( \frac{\partial N_{\vec{k}}}{\partial t} \right) \omega_{\vec{k}}, \end{aligned} \quad (\text{III.59})$$

d'où, on obtient la loi de conservation de l'énergie totale :

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_s K_s + \sum_{\vec{k}} N_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \right] = 0 \quad (\text{III.60})$$

### III.h.3. CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

Par la même technique employée en III.h.2, on peut montrer que :

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_s \vec{M}_s + \sum_{\vec{k}} N_{\vec{k}} \vec{k} \right] = 0 , \quad (\text{III.61})$$

où  $\vec{M}_s = \int d\vec{v} \vec{v} F_s(\vec{v}, t)$  désigne la quantité de mouvement pour une espèce de particules "s",  $s = e, i$ .

\* \*  
\*





DEUXIEME PARTIE



## C H A P I T R E I

### EFFET DU MECANISME DE L'ELARGISSEMENT DE RESONANCE

Dans la première partie (premier chapitre), nous avons abordé la question de saturation de l'instabilité acoustique ionique par l'effet Landau non-linéaire dû à l'interaction du mode de battement formé par deux modes résonnants avec les particules (ions et électrons). Nous avons montré que cet effet ne constitue pas un mécanisme de saturation plausible de l'instabilité et que la théorie de la turbulence faible n'est pas cohérente, en ce sens que la série de perturbation peut même diverger dans la limite des faibles niveaux d'énergie ( $\alpha \ll 1$ ).

Nous sommes amenés donc à considérer l'effet associé au processus de renormalisation de l'interaction entre modes et particules sur l'instabilité acoustique ionique. On procède par l'étude du mécanisme de l'élargissement de résonance qui entraîne l'emploi de la fonction de résonance renormalisée. On remarque, dans cette fonction, que la modification de l'orbite de particule se manifeste par  $\langle \vec{k} \cdot \Delta \vec{x} \rangle$  ainsi que par  $\langle (\vec{k} \cdot \Delta \vec{x})^2 \rangle$ ; et ce dernier terme qui apparaît dans une exponentielle (cf. (III.11.a)) accélère la convergence de l'intégrale sur  $\tau$ . En outre, puisque la fonction de résonance renormalisée ne se comporte pas comme la fonction delta, on s'attend à ce que le taux d'amortissement dû aux ions soit augmenté. Nous allons montrer cela dans le sous-chapitre (I.a), en considérant aussi le cas des électrons.

### I.a. EFFET D'AMORTISSEMENT DU A L'ELARGISSEMENT DE RESONANCE

Pour étudier l'effet associé à l'élargissement de résonance sur l'évolution de l'instabilité acoustique ionique, générée par un courant de dérive électronique, nous nous servons du système des équations qui décrit l'évolution de la fonction de distribution moyenne et de l'instabilité établie dans le cadre de la théorie renormalisée (cf. (III.7), (III.8) et (III.27)). On se contente, ici, de supposer que la fonction de distribution moyenne est gelée au cours de l'évolution de l'instabilité. Ce qui nous permet, d'une part d'approcher cette fonction, partout, par sa valeur initiale dans le calcul de la fonction diélectrique  $\zeta_s^R(\vec{k}, \omega, t)$  et d'autre part de nous limiter à considérer uniquement l'équation cinétique des ondes. Nous verrons aux chapitres suivants que l'hypothèse invoquée n'est plus valable lorsque l'énergie turbulente atteint un niveau fini tout en restant petit devant l'unité.

Nous reconsidérons l'équation cinétique des ondes, dans laquelle figure le taux d'amortissement et qui s'exprime, dans le cadre de la théorie renormalisée, par :

$$\gamma_{\vec{k}}^R(t) = \gamma_{\vec{k}e}^R(t) + \gamma_{\vec{k}i}^R(t) , \quad (I.1)$$

$$\gamma_{\vec{k}s}^R(t) = - \frac{\text{Im } \zeta_s^R(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, t)}{\frac{\partial}{\partial \omega_{\vec{k}}} \text{Re } \zeta_s^R(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, t)} , \quad (I.2)$$

$$\zeta^R = 1 + \zeta_e^R + \zeta_i^R = 1 - i \sum_s \frac{4\pi e_s^2}{m_s k^2} \int d\vec{v} \, k \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F_s(\vec{v}, 0) \times \int_0^\infty d\tau \exp i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})\tau + i \langle \vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau) \rangle - \frac{1}{2} \langle (\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau))^2 \rangle \quad (I.3)$$

et les fonctions d'orbites sont données par (III.22) et (III.23).

Dans (I.3), la contribution à l'intégration sur  $\tau$  provient des petites valeurs de  $\tau$  ( $\tau < \tau_c$ ) car l'intégrand décroît rapidement (comme  $e^{-k^2 D \tau^3}$ ) pour les grandes valeurs de  $\tau$  ( $\tau \gg \tau_c$ ). On

se contente alors de substituer pour les fonctions d'orbites par leur expression pour  $\tau < \tau_c$ , soit

$$\langle (\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau))^2 \rangle = v_k^4 \tau^4, \quad \tau < \tau_c, \quad (I.4)$$

$$\langle \vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau) \rangle = \Delta_k^5 T^5, \quad \tau < \tau_c, \quad (I.5)$$

$$v_k^4 = \frac{e^2}{4m^2} \sum_{\vec{k}' \in Q_{\vec{k}}} (\vec{k} \cdot \vec{k}')^2 I_{\vec{k}'}(t), \quad (I.4.a)$$

$$\Delta_k^5 = \frac{-e^2}{60m^2} \sum_{\vec{k}' \in Q_{\vec{k}}} (\vec{k} \cdot \vec{k}') k'^2 I_{\vec{k}'}(t) (\omega' - \vec{k}' \cdot \vec{v}), \quad (I.5.a)$$

et  $Q_{\vec{k}} = \{ \vec{k}' : |\vec{k} - \vec{k}'| \geq |\vec{k}'| \}$  définit le domaine où  $\vec{k}'$  ne se situe pas au voisinage de  $\vec{k}$  (cf. chapitre précédent). D'après (I.5.a), on remarque que  $|\Delta_k^5| \approx v_k^4 \Delta |\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}|$  d'où  $|\tau^5 \Delta_k^5| \approx \tau^4 v_k^4 (\Delta |\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}| \tau)$ , ce qui implique que

$$|\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau)| < |(\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}(t-\tau))^2|,$$

tant que  $\tau < \tau_c$ . Dans ce qui suit, le terme  $i \langle \vec{k} \cdot \Delta \vec{x} \rangle$  sera délaissé puisqu'étant imaginaire, il correspond seulement à une modification de la fréquence du mode par le champ électrique turbulent. Cette modification est de l'ordre de  $\Delta\omega/\omega \sim \Delta |\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}| \tau_c^{1/4} \approx \alpha^{1/4} < 1$ .

De plus, afin de faire une étude analytique propre, dans (I.3) nous remplaçons le facteur  $v_k^4 \tau^4$  par  $v_k^2 \tau^2$  comme dans les travaux de Sleeper et al. [33], Wesson et Sykes [34], et Tu Khiet [35]. L'expression (I.3) s'écrit :

$$\zeta^R(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, t) = 1 - i \sum_s \frac{4\pi e_s^2}{m_s k^2} \int d\vec{v} \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F_s(\vec{v}, 0) \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})\tau - v_{ks}^2 \tau^2}, \quad (I.6)$$

et  $v_{ks}^4$  est donné par (I.4.a), où lorsqu'on convertit la somme sur  $\vec{k}'$  en intégrale selon  $\int_{|\vec{k}' - \vec{k}| \geq k'} \frac{d\vec{k}'}{(2\pi)^3}$  et en supposant un spectre quasi-isotrope, on a

$$v_{ks}^4 = \frac{k^2 T_e^2}{6m_s^2} \left\{ \int_0^{k/2} dk' k'^4 \alpha_{k'}(t) + \frac{1}{2} \int_{k/2}^{\infty} dk' k'^4 \alpha_{k'}(t) \left( 1 + \left( \frac{k}{2k'} \right)^3 \right) \right\},$$

$$\alpha_k(t) = \frac{e^2 I_k(t)}{8\pi^2 T_e^2} \quad (I.7)$$

I. a. 1. CALCUL DE LA PARTIE REELLE DE LA FONCTION DIELECTRIQUE RENORMALISEE

D'après (I.6) on a, pour la partie réelle de  $\zeta_s^R(\vec{k}, \omega, t)$  ( $\equiv \zeta_s^R(\vec{k}, \omega, \alpha)$ ),

$$\text{Re} \zeta_s^R(\vec{k}, \omega, \alpha) = \frac{\omega^2 p_s}{n_0 k^2} \int d\vec{v} \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F_s(\vec{v}, 0) \int_0^{\infty} dt \sin(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) t e^{-v_{ks}^2 \tau^2} \quad (I.8)$$

Lorsqu'on effectue l'intégrale sur  $\vec{v}$  par parties et substitue pour  $F_s(\vec{v})$ ,  $s = e, i$  par leur expression donnée par (I.1) et (I.2) (partie I), on obtient :

$$\text{Re} \zeta_i^R = \omega_{pi}^2 \int \frac{d\vec{v} e^{-v^2/v_i^2}}{\sqrt{\pi^3} v_i^3} \int_0^{\infty} \tau d\tau \cos(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \tau e^{-v_{ki}^2 \tau^2}, \quad (I.8.a)$$

$$\text{Re} \zeta_e^R = \omega_{pe}^2 \int \frac{d\vec{w} e^{-w^2/v_e^2}}{\sqrt{\pi^3} v_e^3} \int_0^{\infty} \tau d\tau \cos(\Omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{w}) \tau e^{-v_{ke}^2 \tau^2}, \quad (I.8.b)$$

où on a écrit  $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$  et  $\Omega_{\vec{k}} = \omega - \vec{k} \cdot \vec{u}$ . On effectue les intégrales sur  $\vec{v}$  et sur  $\vec{w}$  dans le système de coordonnées sphériques dans lequel le vecteur  $\vec{k}$  est choisi le long de l'axe  $\vec{z}$ , alors (I.8.a) et (I.8.b) sont ramenés à :

$$\left. \begin{aligned} \text{Re} \zeta_i^R &= -\frac{\omega_{pi}^2}{4\omega^2} \beta_i^2 Z' \left( \frac{\beta_i}{2} \right), \\ \text{Re} \zeta_e^R &= -\frac{\omega_{pe}^2}{4\Omega_{\vec{k}}^2} \beta_e^2 Z' \left( \frac{\beta_e}{2} \right), \\ \beta_i &= \frac{\omega}{(v_{ki}^2 + k^2 v_i^2/4)^{1/2}} \quad \beta_e = \frac{\Omega_{\vec{k}}}{(v_{ke}^2 + k^2 v_e^2/4)^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (I.9)$$

et  $Z(x)$  est la fonction de dispersion. Comme on a  $\beta_i^2 \gg 1$  et  $\beta_e^2 \ll 1$ , on peut utiliser les expressions limites de la fonction  $Z(x)$  (cf. (I.8.a) et (I.8.b) partie I) et on obtient pour la partie réelle le résultat :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \zeta_i^R &\approx -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{6}{\beta_i^2}\right) \\ \operatorname{Re} \zeta_e^R &\approx \frac{\omega_{pe}^2}{2\Omega_k^2} \beta_e^2 \left(1 + \frac{\beta_e^2}{2}\right), \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.10})$$

et donc l'équation  $\operatorname{Re} \zeta^R(\vec{k}, \omega, t) = 0$  mène à :

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\vec{k}} &= \begin{cases} \omega_k(\alpha) & \vec{k} \cdot \vec{u} > 0 \\ -\omega_k(\alpha) & \vec{k} \cdot \vec{u} < 0 \end{cases}, \\ \omega_k(\alpha) &= \omega_k \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \alpha^{1/2} + o(\alpha)\right), \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.11})$$

où on a utilisé  $v_{ke} \approx \frac{kv_e}{4\sqrt{24}} \alpha^{1/4}$  et  $v_{ki} \approx \frac{kC_s}{4\sqrt{6}} \alpha^{1/4}$  ;  $\alpha$  est le rapport des énergies.

La déviation par rapport au résultat classique est donc  $|\Delta\omega_k^*/\omega_k| \sim \alpha^{1/2} \ll 1$ . Cette correction sera délaissée en cohérence avec l'approximation utilisée auparavant et qui consiste à délaissier le terme  $i\langle \vec{k} \cdot \Delta \vec{x} \rangle$  (qui conduit à une modification de fréquence de l'ordre de  $(\Delta\omega_k/\omega_k) \sim \alpha^{1/4}$ ).

#### I.a.2. CALCUL DE LA PARTIE IMAGINAIRE DE LA FONCTION DIELECTRIQUE $\zeta^R(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, \alpha)$

On calcule maintenant,  $\operatorname{Im} \zeta_s^R$ ,  $s = e, i$  et qui, d'après (I.6), est donné par :

$$\operatorname{Im} \zeta_s^R = -\frac{\omega_{ps}^2}{n_0 k^2} \int d\vec{v} \vec{k} \cdot \frac{\partial F_s(\vec{v}, 0)}{\partial \vec{v}} \int_0^\infty \cos(\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v}) \tau e^{-v_{ks}^2 \tau^2} d\tau \quad (\text{I.12})$$

En intégrant par parties sur la vitesse et en substituant pour  $F_s$  par leur expression, les intégrales dans (I.12) donnent :

$$\left. \begin{aligned} \text{Im}\zeta_i^R &= \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_k} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \beta_i^3 e^{-\beta_i^2/4} \\ \text{Im}\zeta_e^R &= \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_k} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \beta_e^3 e^{-\beta_e^2/4} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.13})$$

où  $\beta_i$  et  $\beta_e$  sont donnés par (I.9).

### I.a.3. TAUX D'AMORTISSEMENT

A l'aide des résultats (I.10) et (I.13), on peut calculer le taux d'amortissement selon  $\gamma_{ks}^R = -\text{Im}\zeta_s^R / \frac{\partial}{\partial \omega_k} \text{Re}\zeta_s^R$ , et on obtient :

$$\gamma_{ke}^R = - \frac{\omega_k^3}{\Omega_k^2} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{M}{2m}\right) \beta_e^3 e^{-\beta_e^2/4}, \quad (\text{I.14.a})$$

$$\gamma_{ki}^R = - \omega_k \frac{\sqrt{\pi}}{8} \beta_i^3 e^{-\beta_i^2/4}. \quad (\text{I.14.b})$$

On remarque que lorsque  $v_{ks} \rightarrow 0$ ,  $s = e, i$ , on obtient les résultats habituels. Des résultats (I.14.a) et (I.14.b), on peut tirer les conclusions suivantes sur la modification des taux de croissance et d'amortissement.

#### i) Taux de croissance dû aux électrons

Comme on a  $v_{ke}(t)/kv_e \sim \alpha^{1/4} < 1$ , on peut écrire (I.14.a) sous la forme :

$$\gamma_{ke}^R = \gamma_{ke}^L \left(1 - \frac{v_{ke}^2(t)}{2k^2 v_e^2}\right), \quad (\text{I.15})$$



ce qui montre que l'élargissement de résonance dans le cas des électrons a pour effet de réduire le taux de croissance et ne constitue pas un mécanisme de saturation de l'instabilité acoustique ionique. Un résultat similaire à (I.15) a été donné par Choi et Horton [28].

## ii) Taux d'amortissement dû aux ions

Pour ces particules, on a deux situations :

-  $v_{ki}(t)/kv_i < 1$ , dans ce cas l'effet de l'élargissement de résonance est négligeable. En outre, du fait que le spectre  $\alpha_{k'}(t)$  pique autour de  $k' = \bar{k} = \lambda_D^{-1}/\sqrt{2}$  (voir [36]),  $v_{ks}$  est alors donné par (cf. (I.7)) :

$$v_{ks} = \frac{\sqrt{k\lambda_D}}{\lambda_D \sqrt[4]{24}} \sqrt{\frac{T_e}{m_s}} \alpha^{1/4}, \quad (\text{I.16})$$

et la condition citée plus haut conduit à  $k_0 < k < \lambda_D^{-1}$  avec  $k_0 \lambda_D = \left(\frac{T_e}{4T_i}\right) \sqrt{\frac{\alpha}{3}}$ . On peut donc dire que dans le domaine  $k_0 < k < \lambda_D^{-1}$ , le mécanisme dominant est le couplage des modes via les ions (voir chapitre I, partie I). Comme nous l'avons montré, dans ce cas, l'énergie turbulente est transférée de modes de courte longueur d'onde aux modes de grande longueur d'onde. En outre, comme on a  $k_0 < \lambda_D^{-1}$ , ce qui a lieu pour  $\alpha < 12(T_i/T_e)^2$ , on peut postuler que lorsque  $\alpha$  satisfait à  $\alpha \geq 12(T_i/T_e)^2$  le mécanisme de l'élargissement de résonance devient important, ce que nous allons voir dans ce qui suit.

-  $v_{ki}(t)/kv_i \geq 1$ , ce qui implique  $k < k_0$ . Comme on a aussi  $v_{ke}(t)/kv_e < 1$ , qui nécessite  $k\lambda_D > \sqrt{\frac{\alpha}{2}}$ , les deux limites précédentes définissent le domaine  $k_* = \lambda_D^{-1} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} < k < k_0$ , où le mécanisme de l'élargissement de résonance est dominant. Dans ce domaine, les modes seront absorbés par les ions et on s'attend, donc, à une saturation de l'instabilité acoustique ionique et ceci aura lieu pour :

d'où

$$\gamma_{ke}^R + \gamma_{ki}^R = 0,$$

$$-\left(\frac{\Omega_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}}\right)\left(\frac{M}{m}\right) e^{-\frac{\Omega_{\vec{k}}^2}{(4v_{ke}^2 + k^2 v_e^2)}} = \frac{\left(v_{ke}^2 + \frac{k^2 v_e^2}{4}\right)^{3/2}}{2\left(v_{ki}^2 + \frac{k^2 v_i^2}{4}\right)^{3/2}} e^{-\frac{\omega_k^2}{(4v_{ki}^2 + k^2 v_i^2)}} \quad (I.17)$$

Nous montrons que dans le domaine  $\lambda_D^{-1} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} < k < k_0$ , le spectre  $\alpha_k(t)$  se comporte comme  $k^{-3}$ . Pour cela, on se contente de considérer les modes ayant un vecteur d'onde  $k$  quasi-parallèle au vecteur  $\vec{u}$  et pour lesquels on a  $-\Omega_k/\omega_k \approx \frac{u}{c_s}$ , alors le membre de gauche de (I.17) est indépendant de  $k$ . En le désignant par  $B \approx \frac{M u}{m c_s}$ , les logarithmes de deux côtés de (I.17) donne lieu à :

$$ck^4 \equiv \left(\frac{1}{\text{Log } B}\right)^2 k^4 \approx \left(\frac{v_{ki}}{c_s}\right)^4, \quad (I.18)$$

En y substituant l'expression de  $v_{ki}^4$  donnée par (I.7), on obtient l'équation intégrale :

$$6Ck^2 \approx \int_0^{k/2} k'^4 \alpha_{k'}(t) dk' + \frac{1}{2} \int_{k/2}^{\infty} k'^4 dk' \alpha_{k'}(t) \left[1 + \left(\frac{k}{2k'}\right)^3\right] \quad (I.18.a)$$

En effectuant la dérivée sur, par rapport à  $k$  deux fois, on obtient

$$\alpha_k \approx \frac{32C}{k^3}. \quad (I.19)$$

La solution exacte de (I.17), pour  $\alpha$  dans l'état de saturation, s'obtient lorsqu'on s'est donné des valeurs numériques pour les paramètres  $u/v_e$ ,  $m/M$  et  $T_e/T_i$ . Par exemple, pour  $u/v_e = 1/2\sqrt{2}$ ,  $T_e/T_i = 15$  et  $M/m = 1836$ , on obtient, d'après (I.17), pour le niveau d'énergie  $\alpha_{st}$  :  $\alpha_{st} = 3,6 \times 10^{-3}$ , ce qui est en accord avec le résultat de Sleeper et al. [33] et aussi avec les résultats des simulations numériques de Biskamp et al. [37], et expérimentaux de Kawai et Guyot, Kawai et al., et Machalek et Nielsen [38]. Ces résultats confirment aussi la dépendance du spectre en  $k^{-3}$  (voir aussi Stenzel, et Slusher et al. [39]).

Pour des valeurs élevées du rapport de température et même pour des petites valeurs de  $u/v_e$ , par exemple :  $T_e/T_i \geq 100$  et  $u/v_e \leq 0,1$  dans le cas du plasma d'hydrogène, on trouve que le niveau d'énergie  $\alpha_{st}$  déterminé d'après (I.17) est élevé. On peut en conclure que le mécanisme de l'élargissement de résonance n'est pas plausible dans un plasma turbulent ayant un grand rapport de températures.

### I.b. RESUME GENERAL

- L'élargissement des résonances entre les modes acoustiques ioniques et les ions devient important lorsque le rapport des énergies  $\alpha$  est supérieur à  $(T_i/T_e)^2$ . Le taux d'amortissement dû aux ions peut atteindre le taux de croissance (dû aux électrons) et l'instabilité se sature. Dans cet état, le spectre  $\alpha_k$  se comporte comme  $k^{-3}$  dans le domaine du nombre d'onde tel que  $\sqrt{\frac{\alpha}{2}} < k\lambda_D < 1$ .

- Dans un plasma ayant un rapport de température élevé, le mécanisme de l'élargissement de résonance ne conduit pas à des résultats en accord avec les résultats expérimentaux pour le niveau d'énergie en état de saturation. Dans ce cas on est amené à tenir compte des autres mécanismes, comme par exemple la déformation de la fonction de distribution moyenne (électronique et ionique) qui a été abandonnée dans les calculs effectués dans ce chapitre (et aussi dans les références citées dedans).

- Elargir les résonances entre les modes et les électrons conduit seulement à une modification du taux de croissance et ne constitue pas un mécanisme de saturation possible de l'instabilité. Cela est dû au fait que  $v_{ke}(t)/kv_e$  est toujours inférieur à un.

- Bien que l'élargissement des interactions résonnantes entre les modes et les électrons ne mène pas à un effet stabilisant, nous allons montrer dans le paragraphe suivant qu'en te-

nant compte de cet effet on aboutit à un résultat pour le taux d'amortissement non-linéaire cohérent :  $\gamma_{ke}^{NLR} < \gamma_{ke}^R$  et ceci est valable même pour des niveaux d'énergie tels que  $\alpha \geq m/M$ , contrairement aux résultats classiques.

### I.c. CALCUL DU TAUX D'AMORTISSEMENT NON-LINEAIRE DU AUX ELECTRONS

Dans le chapitre I (partie I), nous avons obtenu une expression pour  $\gamma_{ke}^{NL}$ , en utilisant le développement (I.14). De façon analogue, on peut obtenir une expression similaire où la fonction de résonance classique  $g_{k,\omega}^{(0)}$  sera remplacée par la fonction de résonance renormalisée  $g_{k,\omega}^R$ . Maintenant, on a :

$$\gamma_{ke}^{NLR} = - \left( \frac{\partial \text{Re} \zeta^R(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, \alpha)}{\partial \omega_{\vec{k}}} \right) \text{Im} \int \frac{d\vec{k}'}{(2\pi)^3} I_{\vec{k}'}(t) \left\{ \frac{4 \zeta^{(2)R}(\vec{k}_1 - \vec{k}', \alpha) \zeta^{(2)R}(\vec{k}', \vec{k} - \vec{k}', \alpha)}{\zeta^R(\vec{k} - \vec{k}', \omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}'}, \alpha)} - \zeta^{(3)R}(\vec{k}', \vec{k}, -\vec{k}', \alpha) \right\} \quad (\text{I.20})$$

Dans (I.20), pour alléger l'écriture on a omis  $\omega_{\vec{k}}, \omega_{\vec{k}'}, \dots$  etc. en  $\zeta^{(j)R}$  et  $\zeta^{(j)R}$  ;  $j = 2, 3$  sont donnés comme par (I.16) et (I.17) où le propagateur  $g_{k,\omega}^{(0)}$  sera remplacé par  $g_{k,\omega}^R$ . Dans un plasma à une dimension, le calcul de  $\text{Im} \zeta^{(2)}(\vec{k}, -\vec{k}') \zeta^{(2)}(\vec{k}', \vec{k} - \vec{k}')$  est long mais trivial et donne un résultat nul. Dans un plasma à trois dimensions, on s'attend à ce qu'il donne aussi une contribution négligeable en comparaison avec  $\text{Im} \zeta^{(3)}(\vec{k}', \vec{k}, -\vec{k}', \alpha)$  et l'expression (I.20) pour  $\gamma_{ke}^{NLR}$  se réduit à :

$$\gamma_{ke}^{NLR} = \left( \frac{\partial \text{Re} \zeta^R(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, \alpha)}{\partial \omega_{\vec{k}}} \right)^{-1} \text{Im} \int \frac{d\vec{k}'}{(2\pi)^3} I_{\vec{k}'}(t) \zeta^{(3)R}(\vec{k}', \vec{k}, -\vec{k}', \alpha), \quad (\text{I.21})$$

où la fonction  $\zeta_e^{(3)R}$ , qui nous intéresse, est donnée par :

$$\begin{aligned} \zeta_e^{(3)R}(\vec{k}', \vec{k}, -\vec{k}', \alpha) &= \frac{i\omega^2 p e^2}{n_0 m^2 k^2} \int d\vec{v} g_{\vec{k}, \omega_{\vec{k}}}^R \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} g_{\vec{k}'', \omega_{\vec{k}''}}^R \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \\ &\times g_{-\vec{k}', \omega_{-\vec{k}'}}^R \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F_e(\vec{v}, 0), \quad \vec{k}'' = \vec{k} - \vec{k}' \\ &\quad \omega_{\vec{k}''} = \omega_{\vec{k} - \vec{k}'} \end{aligned} \quad (I.22)$$

et on intègre ensuite sur la vitesse par partie trois fois. Dans ces opérations, l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial \vec{v}}$  agit sur les différentes fonctions de résonance, par exemple sur  $g_{\vec{k}, \omega_{\vec{k}}}^R$  selon l'identité

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}} g_{\vec{k}, \omega_{\vec{k}}}^R = -\vec{k} \frac{\partial}{\partial \omega_{\vec{k}}} g_{\vec{k}, \omega_{\vec{k}}}^R,$$

ce qui permet de ramener la fonction  $\text{Im} \zeta_e^{(3)R}$  sous la forme :

$$\text{Im} \zeta_e^{(3)R}(\vec{k}', \vec{k}, -\vec{k}') \alpha = - \frac{\omega^2 p e^2 (\vec{k} \cdot \vec{k}')}{n_0 m^2 k^3 k' k'' v_e^3} \quad (I.23)$$

$$\left( k^2 \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} + \vec{k} \cdot \vec{k}'' \frac{\partial^2}{\partial \omega \partial \omega''} \right) \left( \vec{k} \cdot \vec{k}' \frac{\partial}{\partial \omega} + k'^2 \frac{\partial}{\partial \omega'} + \vec{k}' \cdot \vec{k}'' \frac{\partial}{\partial \omega''} \right) K,$$

avec

$$K = \text{Re} \frac{kk'k''v_e^3}{n_0} \int d\vec{v} F_e(\vec{v}, 0) g_{\vec{k}, \omega_{\vec{k}}}^R g_{\vec{k}'', \omega_{\vec{k}''}}^R g_{-\vec{k}', \omega_{-\vec{k}'}}^R, \quad (I.23.a)$$

$$g_{\vec{k}, \omega_{\vec{k}}}^R = \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v}) - v_{ke}^2 \tau^2} \quad (I.23.b)$$

⋮

En reportant les expressions des fonctions de résonance dans (I.23.a) et après avoir fait le changement de variable  $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$ , l'intégration sur  $\vec{w}$  donne :

$$\begin{aligned} K &= \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int_0^\infty d\tau_3 e^{-(\vec{v}^2 \tau_1^2 + \vec{v}'^2 \tau_2^2 + \vec{v}''^2 \tau_3^2)} \\ &\quad e^{-\frac{1}{4}(\hat{k}\tau_1 - \hat{k}'\tau_2 + \hat{k}''\tau_3)^2} \cos(z\tau_1 - z'\tau_2 + z''\tau_3), \end{aligned} \quad (I.24)$$

où on a utilisé les notations  $z = \frac{\vec{k} \cdot \vec{u} - \omega_{\vec{k}}}{kv_e}$ ,  $\bar{v} = v_{ke}/kv_e$ ,  $\hat{k} = \vec{k}/k$  pour le mode  $\vec{k}$  et des notations similaires pour les modes  $\vec{k}'$  et  $\vec{k}''$ . Avec ces notations, le taux d'amortissement non-linéaire est donné par

$$\gamma_{ke}^{NLR} \approx -\omega_{\vec{k}} \left( \frac{e^2}{16T_e^2} \right) \int \frac{dk'}{(2\pi)^3} (\vec{k} \cdot \vec{k}') I_{\vec{k}'}(t) \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \hat{k} \cdot \hat{k}' \frac{\partial}{\partial z \partial z''} \right) \times$$

$$\left( \hat{k} \cdot \hat{k}' \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z'} + \hat{k}' \cdot \hat{k}'' \frac{\partial}{\partial z''} \right) K, \quad (I.25)$$

et le taux de croissance linéaire

$$\gamma_{ke}^L \approx \omega_{\vec{k}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} z \quad (I.26)$$

Nous avons cité précédemment (partie I, chapitre I) que le taux d'amortissement non-linéaire (dû aux électrons) peut devenir du même ordre que le taux de croissance linéaire, si on utilise le développement classique. Ce que nous vérifions, ici, en prenant la limite  $\bar{v} \rightarrow 0$  dans la formule (I.24) donnant K.

### 1. Limite $\bar{v} \rightarrow 0$ (système faiblement turbulent)

$$K = \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int_0^\infty d\tau_3 e^{-\frac{1}{4}(\hat{k}\tau_1 - \hat{k}'\tau_2 + \hat{k}''\tau_3)^2} \times \cos(z\tau_1 - z'\tau_2 + z''\tau_3) \quad (I.27)$$

Nous distinguons deux cas :

1.a.  $\vec{k} \cdot \vec{k}' < 0$ , où le vecteur  $\vec{k}'$  est orienté dans le sens opposé à celui de  $\vec{k}$ . Dans ce cas nous avons obligatoirement  $\vec{k} \cdot \vec{k}'' > 0$  et  $\vec{k}' \cdot \vec{k}'' < 0$ , il s'ensuit l'inégalité

$$(\hat{k}\tau_1 - \hat{k}'\tau_2 + \hat{k}''\tau_3)^2 > \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2,$$

et le domaine d'intégration est pratiquement limité à l'intérieur

du cube  $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \leq 2$  dans lequel l'argument de la fonction cosinus est très petit et on peut développer celle-ci en série limitée pour intégrer sur les variables  $\tau_1, \tau_2$  et  $\tau_3$ . Comme ordre de grandeur, nous avons  $K \sim C_0 + C_1 z^2 + C_2 z^4 + \dots$ , où  $C_0, C_1, C_2, \dots$  sont des coefficients numériques. Parallèlement nous avons en vertu de (I.25) et (I.26)

$$\left( \frac{\gamma_{ke}^{NL}}{\gamma_{ke}^L} \right) \approx \alpha ,$$

c'est-à-dire que les modes se propageant dans le sens opposé à  $\vec{k}$  contribuent seulement à une correction triviale sur le taux de croissance.

1.b.  $\vec{k} \cdot \vec{k}' > 0$  (où les modes  $\vec{k}'$  se propagent dans le même sens que le mode  $\vec{k}$ ). On peut choisir  $\vec{k}' \cdot \vec{k}'' > 0$  pour fixer les idées puis intégrer sur la variable  $\tau_2$  en premier. A noter que si  $\vec{k}' \cdot \vec{k}'' < 0$  on intégrera sur la variable  $\tau_1$  en premier lieu. Maintenant pour évaluer l'intégrale sur  $\tau_2$  dans (I.27), il est préférable de lui adjoindre la partie correspondante au domaine  $\tau_2 < 0$ . On obtient avec quelques algèbres :

$$K = \sqrt{\pi} e^{-z'^2} \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_3 e^{-\frac{1}{4}(\tau_1 + \tau_3 k/k'')^2 \sin^2 \theta} \times \\ \cos \left[ (z - z' \cos \theta) \tau_1 + (z'' - z' \cos \phi) \tau_3 \right] , \quad (I.28)$$

où  $\theta$  est l'angle  $(\vec{k}, \vec{k}')$  et  $\phi$  est l'angle  $(\vec{k}', \vec{k}'')$ . Pour la suite du calcul de  $\gamma_{ke}^{NL}$ , il est important d'utiliser la relation :

$$\left( \hat{k} \cdot \hat{k}' \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z'} + \hat{k}' \cdot \hat{k}'' \frac{\partial}{\partial z''} \right) K = -2z' K , \quad (I.29)$$

qui découle directement de (I.28). On peut achever l'intégration dans (I.28) en faisant un changement de variables  $(\tau_1 + k\tau_3/k'')/2 = X$  et  $(\tau_1 - k\tau_3/k'')/2 = Y$ , alors l'intégration sur  $Y$  qui est prise entre  $-X$  à  $X$  est élémentaire et on obtient le résultat :

$$K = - 2\sqrt{\pi} e^{-z'^2} \left(\frac{k''}{k}\right) \int_0^\infty \frac{dx e^{-x^2} \sin^2 \theta}{z - \frac{z' k'}{k} - \frac{z'' k''}{k}} \left\{ \sin[2(z-z' \cos \theta)x] - \sin\left[2(z''-z' \cos \phi) \frac{k''}{k} x\right] \right\}, \quad (I.30)$$

ou encore avec la notation de la fonction de dispersion  $Z$  :

$$K = - \frac{\sqrt{\pi} e^{-z'^2} \left(\frac{k''}{k} \sin \theta\right)}{\left(z - \frac{k'}{k} z' - \frac{k''}{k} z\right)} \left\{ \operatorname{Re} Z\left(\frac{z-z' \cos \theta}{\sin \theta}\right) - \operatorname{Re} Z\left(\frac{k''(z''-z' \cos \phi)}{k \sin \theta}\right) \right\} \quad (I.31)$$

On voit que si l'angle  $\theta$  n'est pas proche de zéro, l'argument des fonctions  $Z$  est petit et on peut utiliser un développement en série pour cette fonction et (I.30) devient :

$$K = - \sqrt{\pi} e^{-z'^2} \left( C_1 z^2 + C_2 z'^2 + C_3 z''^2 + C_4 z z' + \dots \right) \quad (I.31.a)$$

où  $C_1, C_2, C_3, \dots$  sont des fonctions en  $\theta$  et  $\phi$ . Reportant ceci dans (I.25) et en tenant compte de (I.29), on peut obtenir un ordre de grandeur pour le taux d'amortissement  $\gamma_{ke}^{NL}$  provenant des modes  $\vec{k}'$  faisant avec le mode  $\vec{k}$  un angle  $\theta$  qui n'est pas petit (modes obliques). Comparant avec le taux de croissance linéaire donné par (I.26), celui-ci est donné par :

$$|\gamma_{ke}^{NL} / \gamma_{ke}^L| \approx \alpha$$

Pour des petits angles  $\theta$ , soit  $\sin \theta < \sqrt{\frac{m}{M}}$ , alors  $\cos \theta \sim 1$ ,  $\cos \phi \sim 0$  et on peut employer un développement asymptotique pour  $Z$  qui donne :

$$K = - \frac{\sqrt{\pi} e^{-z'^2}}{\left(z - z' k' / k\right) \left(\frac{k' z' - k'' z''}{k}\right)} \quad (I.31.b)$$

A noter que, dans ce cas, les modes  $\vec{k}'$  se trouvent autour de  $\vec{k}$  dans un petit angle  $\theta_0$  avec  $\sin \theta_0 \approx \sqrt{\frac{m}{M}}$ . En tenant compte de



cette contrainte sur les angles, on obtient pour le rapport  $|\gamma_{ke}^{NL}/\gamma_{ke}^L|$  :

$$|\gamma_{ke}^{NL}/\gamma_{ke}^L| \approx \frac{m}{M} \frac{\alpha}{z^4} \approx \frac{\alpha}{\left(\frac{m}{M}\right)}$$

Cette formule montre que la "correction" non-linéaire perd son sens pour des rapports d'énergie  $\alpha$  supérieurs à  $\left(\frac{m}{M}\right)$  tout en restant dans la limite de la turbulence faible  $\alpha \ll 1$ .

## 2. Limite $v$ fini (système turbulent)

On a vu dans le calcul précédent que la divergence a lieu pour le cas où les vecteurs  $\vec{k}'$  sont quasiment parallèles au vecteur  $\vec{k}$  alors que la configuration antiparallèle n'apporte qu'une correction triviale. On peut remédier à cette situation en employant les propagateurs renormalisés. Revenons à la formule (I.24) et nous effectuons l'intégration sur la variable  $\tau_2$  de  $-\infty$  à  $+\infty$  car la partie  $\tau_2 < 0$  correspond à la situation antiparallèle. On obtient ainsi, à la place de (I.28), le résultat suivant pour  $K$  :

$$K = \sqrt{\pi} e^{-z'^2} \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 e^{-\frac{1}{4}(\tau_1 + \frac{k''}{k} \tau_3)^2 \sin^2 \theta - \bar{v}^2 \tau_1^2 - \bar{v}''^2 \tau_3^2} \times$$

$$e^{-\bar{v}'^2 (\hat{k} \tau_1 + \hat{k}'' \tau_3)^2} \times \cos \left[ (z - z' \cos \theta) \tau_1 + (z'' - z' \cos \phi) \tau_3 \right]. \quad (I.32)$$

Contrairement au cas très faiblement turbulent traité précédemment, ici grâce à la présence des termes en  $\bar{v}^2 \tau^2$ , on peut encore développer la fonction cosinus en série limitée même pour  $\theta \approx 0$  si toutefois on a  $\bar{v} > z$  soit pour  $\alpha > \left(\frac{m}{M}\right)^2$  comme ordre de grandeur, et on trouve pour  $\theta \approx 0$ ,  $K \approx \frac{C_1}{\bar{v}^2} \left(1 + \frac{C_2 z^2}{\bar{v}^2}\right)$  avec  $C_1$  et  $C_2$  des facteurs numériques. On obtient, dans ce cas, le résultat :

$$|\gamma_{ke}^{NLR}/\gamma_{ke}^L| \approx \left(\frac{m}{M}\right) \frac{\alpha}{\bar{v}^2} \approx \frac{m}{M}$$

On voit alors que le taux d'amortissement non-linéaire, calculé en employant la fonction de résonance renormalisée, représente une correction triviale dans la limite turbulente  $\left(\frac{m}{M}\right)^2 < \alpha < 1$ . Ce qui montre que la théorie renormalisée est cohérente contrairement à la théorie de turbulence faible.

\* \*  
\*

## CHAPITRE II

### EVOLUTION DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION MOYENNE

#### II.a. INTRODUCTION

La connaissance de la déformation de la fonction de distribution moyenne (FDM), au cours de la relaxation de l'instabilité acoustique ionique, est fondamentale pour déterminer la résistivité et les coefficients de transport anormaux et aussi pour expliquer les phénomènes du chauffage dans un plasma turbulent.

Cette fonction, de par la diffusion des particules par le champ turbulent, dévie considérablement de la distribution maxwellienne et est régie par une équation de diffusion couplée avec l'équation cinétique des ondes. On doit alors connaître l'évolution simultanée de l'instabilité de façon autocohérente.

Jusqu'à présent, bien peu d'études analytiques autoconsistantes portées sur le problème posé ont été réalisées. La plupart des travaux connus se classent comme suit :

- Une partie de ces travaux est essentiellement consacrée à l'étude des mécanismes de saturation de l'instabilité acoustique ionique (voir les références [3, 4, 6, 7, 20, 33, 34, 35]) . Dans ces travaux, l'équation de diffusion pour la FDM a été ignorée puisque celle-ci a été considérée comme gelée au cours de la relaxation de l'instabilité. Les résultats obtenus par cette voie ne sont pas vérifiés dans les expériences numériques menées par Dum et al. [36] et qui ont montré que la modification de la FDM joue un rôle dominant dans le processus de stabilisation.

- D'autres travaux ont été faits pour examiner le rôle de la modification de la FDM (voir Vekstein et al. [40], Vedenov et Ryutov [41], Galeev et Sagdeev [42], et Dum [43]), et dans lesquels l'équation cinétique des ondes a été ignorée. Comme nous l'avons montré, la FDM est régie par une équation de diffusion dans laquelle la dépendance temporelle est liée à la densité des énergies dans les ondes. Alors afin de résoudre cette équation, il a été supposé (voir [40-43]) que l'amplitude des ondes croît d'une manière monotone et atteint un niveau stationnaire où le taux de croissance tend vers zéro (état de stabilité marginale). Par cette hypothèse la variable temporelle, figurant dans l'équation de diffusion :  $\int_0^t dt' v_{\text{eff}}(t')$  ;  $v_{\text{eff}}$  est lié à l'énergie des ondes et sera défini plus tard ; varie comme le temps macroscopique  $t$  puisque  $v_{\text{eff}}(\infty) = \text{const.}$

On remarque que, dans de telles études, l'évolution de la FDM est déterminée indépendamment de l'évolution de l'instabilité et il est naturel que les résultats obtenus ne correspondent pas à la bonne solution du problème. A ce propos, Balescu [44] a montré que la solution (autosimilaire) obtenue pour la partie isotrope de la FDM électronique n'est pas compatible avec l'hypothèse imposée dans le modèle de Vekstein et al. [40]. D'autre part, d'après les expériences numériques (voir Choi et Horton [45], et Ishihara et Hirose [46]) l'amplitude des ondes croît monotonement et atteint une valeur maximum et puis elle décroît vers zéro. Par conséquent, l'état de stabilité marginale n'a pas lieu, ce qui rend caduques les théories citées plus haut.

Les considérations précédentes nous amènent à développer une méthode qui permet d'étudier l'évolution de la FDM et de l'instabilité de façon autoconsistante.

Dans ce chapitre, nous présentons deux méthodes analytiques (équivalentes) pour décrire la déformation de la FDM. La première méthode est basée sur le théorème de Liouville tandis que la deuxième est une méthode de résolution de l'équation de diffusion. L'équivalence entre les deux méthodes sera ensuite établie.

Dans les chapitres qui suivent, nous étudierons l'évolution de la FDM en présence de l'instabilité acoustique ionique en se servant des résultats qui seront obtenus dans ce chapitre.

## II.b. METHODES ANALYTIQUES POUR DECRIRE L'EVOLUTION DE LA FDM

### II.b.1. PREMIERE METHODE

Dans ce paragraphe, nous donnerons une expression de la solution formelle de l'équation de Vlasov que nous réécrivons ici :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \frac{e}{m} \delta \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right) f(\vec{x}, \vec{v}, t) = 0 \quad (\text{II.1})$$

Ensuite, on introduit les fonctions d'orbite  $\vec{x}(\tau)$  et  $\vec{v}(\tau)$  qui satisfont aux équations de la dynamique des particules

$$\frac{d\vec{x}(\tau)}{d\tau} = \vec{v}(\tau), \quad \frac{d\vec{v}(\tau)}{d\tau} = \frac{e}{m} \delta \vec{E}(\vec{x}(\tau), \tau), \quad (\text{II.2})$$

avec les conditions "finales"  $\vec{x}(\tau=t) = \vec{x}$  et  $\vec{v}(\tau=t) = \vec{v}$ . Par cet emploi des caractéristiques, l'équation (II.1) s'écrit comme :

$$\frac{d}{d\tau} f(\vec{x}(\tau), \vec{v}(\tau), \tau) = 0, \quad (\text{II.3})$$

qui énonce simplement que la fonction  $f$  est constante suivant les trajectoires des particules (théorème de Liouville). En l'intégrant entre  $\tau = 0$  et  $\tau = t$ , on obtient :

$$f(\vec{x}, \vec{v}, t) = f(\vec{x}_0(\vec{x}, \vec{v}, t), \vec{v}_0(\vec{x}, \vec{v}, t), 0), \quad (\text{II.4})$$

$$\vec{x}_0(\vec{x}, \vec{v}, t) = \vec{x}(\tau=0) \quad \text{et} \quad \vec{v}_0(\vec{x}, \vec{v}, t) = \vec{v}(\tau=0),$$

et  $(\vec{x}_0, \vec{v}_0)$  est le point dans l'espace des phases à l'instant  $\tau = 0$  d'où le point  $(\vec{x}, \vec{v})$  évolue. D'après (II.4), on trouve que

la solution de (II.1) est déterminée par la fonction de distribution initiale et les fonctions d'orbites données par les solutions de (II.2). Comme on peut décomposer  $f(\vec{x}_0, \vec{v}_0, 0)$  en deux parties : une partie homogène et une partie inhomogène négligeable :

$$f(\vec{x}_0, \vec{v}_0, f) = F(\vec{v}_0) + \delta f(\vec{x}_0, \vec{v}_0, 0) ; \quad \delta f \ll F \quad (\text{II.5})$$

On obtient alors la partie homogène en substituant (II.5) dans (II.4) et en effectuant la moyenne sur l'ensemble,

$$F(\vec{v}, t) = \langle F(\vec{v}_0(t), 0) \rangle , \quad (\text{II.6})$$

où  $\vec{v}_0(t)$  s'obtient par intégration de (II.2) comme :

$$\vec{v}_0(t) = \vec{v} + \Delta\vec{v}(t) ; \quad \Delta\vec{v}(t) = - \frac{e}{m} \int_0^t dt' \delta E(\vec{x}_0(t'), t') \quad (\text{II.7})$$

L'égalité (II.4) (ou (II.6)) n'est autre que la conservation sur le nombre des particules le long d'une orbite caractéristique et la loi de conservation s'exprime, formellement, par

$$\begin{aligned} \int d\vec{v} F(\vec{v}, t) &= \int d\vec{v} \int d\vec{v}' \delta(\vec{v}_0(t) - \vec{v}') \langle F(\vec{v}', 0) \rangle \\ &= \int d\vec{v}' F(\vec{v}', 0) \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Désormais, pour alléger l'écriture, nous délaissions l'indice inférieur "0". Maintenant, on s'intéresse au cas où la fonction de distribution initiale  $F(\vec{v}, 0)$  est isotrope (dans quelques cas où la fonction  $F(\vec{v}, 0)$  est anisotrope, elle peut être représentée, dans un système de références approprié, par une fonction isotrope) pour laquelle (II.6) s'écrit :

$$F(\vec{v}, t) = \int_0^\infty dV \langle \delta(v(t) - V) \rangle F(V, 0) , \quad v(t) = |\vec{v}(t)| \quad (\text{II.9})$$

En y introduisant la transformée de Fourier de la distribution delta, on obtient :

$$F(\vec{v}, t) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty + ai}^{\infty + ai} \frac{dp}{2\pi} \langle e^{ipv(t)} \rangle F(p) , \quad (\text{II.10})$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} dv e^{-ipv} F(v, 0) , \quad (\text{II.11})$$

et on aboutit au résultat suivant : la fonction de distribution moyenne se détermine de façon exacte en vertu de (II.10). On se trouve, alors, dans une situation analogue à celle qu'on a rencontré au chapitre III, partie I, au sujet de l'évaluation de la fonction d'orbite moyenne et pour laquelle la technique du développement en cumulant a été utilisée et expliquée en détail. Rappelons toutefois qu'on garde seulement les cumulants jusqu'au deuxième ordre et que ce développement tronqué est valable lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

- i) Le premier cumulant, rapporté à l'échelle caractéristique de la fonction autour de laquelle on effectue le développement (ici, c'est la vitesse thermique), doit être inférieur à un (puisque ceci est le paramètre du développement).
- ii) Le temps de corrélation du champ électrique (stochastique) :  $\tau_c$  est inférieur au temps  $\tau_E$  ( $\tau_c \ll \tau_E$ ) et c'est une hypothèse fondamentale de la théorie QL.

Revenons à (II.10), on applique maintenant la technique du cumulant en y posant en vertu de (II.7) :  $v(t) = v + \lambda(t)$ , où  $\lambda(t)$  désigne une quantité stochastique. On obtient ainsi :

$$F(\vec{v}, t) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty + ai}^{\infty + ai} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(v+C_1) - \frac{p^2}{2} C_2} F(p) \quad (\text{II.12})$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont respectivement les premier et deuxième cumulants :

$$C_1 = \langle \lambda(t) \rangle, \quad C_2 = \langle \lambda^2(t) \rangle - C_1^2 \quad (\text{II.13})$$

Comme la formule donnée par (II.12) pour la FDM représente une approximation de (II.6), laquelle, comme on l'a vu, assure la conservation du nombre des particules, elle ne remplit cette propriété que jusqu'au premier ordre du paramètre du développement :  $(|C_1/v|)_{v \sim v_{th}} \ll 1$ . Nous discutons cela dans le paragraphe suivant.

### II.b.1'. CONSERVATION DU NOMBRE TOTAL DES PARTICULES

Dans ce chapitre, nous avons abouti à une solution analytique pour décrire l'évolution de la FDM (cf. (II.6)) qui est exacte au sens que lorsqu'on intègre les deux membres de (II.6) sur la vitesse  $\vec{v}$  résulte l'égalité  $n(t) = n_0$  ;  $n_0$  est le nombre total des particules. La déformation de la FDM reste cependant masquée jusqu'à cette étape car on ne peut pas déterminer la fonction  $\langle \exp(ipv(t)) \rangle$  de façon exacte.

Alors, nous avons procédé à une approximation, qui est au fond, du même ordre que l'approximation quasi-linéaire et qui consiste à négliger les termes d'ordre supérieur à  $|\delta \vec{E}|^2$  dans l'exponentielle en (II.6). Nous avons abouti à une formule approchée (II.12) qui décrit l'évolution de la FDM et on s'attend, par conséquent, à ce que le nombre total des particules soit conservé jusqu'au premier ordre du paramètre du développement  $(|C_1/v|)_{v \sim v_{th}} \ll 1$ . Pour montrer cela, nous introduisons la fonction de Green associée à la FDM :

$$F(\vec{v}, t) = \int d\vec{v}_0 G(\vec{v}, t; \vec{v}_0, 0) F(\vec{v}_0, 0) \quad (\text{II.14})$$

La conservation du nombre total des particules s'exprime par :

$$\int F(\vec{v}, t) d\vec{v} = \int F(\vec{v}_0, 0) d\vec{v}_0, \quad (\text{II.15})$$



En substituant (II.14) dans le premier membre de (II.15), on obtient en condition de normalisation

$$\int d\vec{v} G(\vec{v}, t; \vec{v}_0, 0) = 1 \quad (\text{II.16})$$

Dans notre cas, pour déterminer la fonction de Green on substitue d'abord pour  $F(p)$  de (II.11) dans (II.12) et on a

$$F(\vec{v}, t) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty + a_i}^{\infty + a_i} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(v+C_1) - \frac{p^2}{2} C_2} \int_0^\infty dv_0 e^{-ipv_0} F(v_0, 0) \quad (\text{II.17})$$

Comme on a  $C_2 \geq 0$ , il s'ensuit que l'intégration sur  $p$  converge de façon absolue, ce qui permet d'intégrer sur  $p$  en premier lieu avec  $a = 0$  et on a :

$$F(\vec{v}, t) = \int_0^\infty dv_0 \frac{e^{-\frac{(v-v_0+C_1)^2}{2C_2}}}{\sqrt{2\pi C_2}} F(v_0, 0) \quad (\text{II.18})$$

En comparant (II.18) avec (II.14), la fonction de Green est donnée par :

$$G(\vec{v}, t; \vec{v}_0, 0) = \frac{1}{4\pi v_0^2} \frac{e^{-\frac{(v-v_0+C_1(\vec{v}, t))^2}{2C_2(\vec{v}, t)}}}{\sqrt{2\pi C_2(\vec{v}, t)}} \quad (\text{II.19})$$

Nous examinons, maintenant, la condition de normalisation (II.16) de cette fonction exigée par la conservation des particules. Pour  $t = 0$ , on a  $C_1 = 0$  et  $C_2 = 0$ , par conséquent la fonction de Green se réduit à :

$$G(\vec{v}, t=0; \vec{v}_0, 0) = \frac{1}{4\pi v_0^2} \delta(v-v_0), \quad (\text{II.20})$$

d'où la condition (II.16) est satisfaite. Pour  $t > 0$  on a  $|C_1/v|_{v \sim v_{th}} \ll 1$ , on peut alors faire un développement limité de  $G(\vec{v}, t; \vec{v}_0, 0)$  en utilisant (II.20) :

$$G(\vec{v}, t; \vec{v}_0, 0) = \frac{1}{4\pi v_0^2} \delta(v - v_0) \left[ 1 - \frac{C_1^2}{C_2} + 0 \left( \frac{C_1^2}{C_2} \right)^2 \right], \quad (\text{II.21})$$

où le terme premier ordre en  $C_1$  disparaît en vertu de la relation  $x\delta(x) = 0$ .

En général, on a  $C_2 \sim |C_1|v$  d'où  $C_1^2/C_2 \sim |C_1/v|$  et  $|C_1/v|_{v \sim v_{th}} \ll 1$ . Par conséquent, lorsqu'on intègre (II.21) sur  $\vec{v}$ , on trouve que le nombre des particules est conservé jusqu'au premier ordre du paramètre du développement en cumulant.

### II.b.2. DEUXIEME METHODE (SOLUTION APPROCHEE DE L'EQUATION DE DIFFUSION POUR LA FDM)

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à présenter une méthode de résolution approchée de l'équation de diffusion quasi-linéaire. Nous établissons ensuite l'équivalence entre la solution qui sera obtenue et celle donnée par (II.12).

Nous partons de l'équation de diffusion pour la FDM :

$$\frac{\partial F(\vec{v}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \overleftrightarrow{D}(\vec{v}, t) \cdot \frac{\partial F(\vec{v}, t)}{\partial \vec{v}}, \quad (\text{II.22})$$

où  $\overleftrightarrow{D}$  est le tenseur de diffusion qui peut être identifié soit par  $\overleftrightarrow{D}^{QL}$  (dans le cadre de la théorie QL) soit par  $\overleftrightarrow{D}^R$  (dans le cadre de la théorie renormalisée).

L'équation précédente peut encore être écrite sous forme intégrale :

$$F(\vec{v}, t) = F(\vec{v}, 0) + \int_0^t \hat{L}(t') F(\vec{v}, t') dt' \quad (\text{II.23})$$

où  $\hat{L}$  est l'opérateur de diffusion :  $\hat{L} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \overleftrightarrow{D} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}}$ . En résolvant (II.23) par itération, on obtient :

$$F(\vec{v}, t) = \left\{ 1 + \int_0^t dt' \hat{L}(t') + \int_0^t dt' \hat{L}(t') \int_0^{t'} dt'' \hat{L}(t'') + \dots \right\} F(\vec{v}, 0), \quad (\text{II.24})$$

ce qu'on peut écrire symboliquement comme

$$F(\vec{v}, t) = 0 \left[ \exp \left( \int_0^t \hat{L}(t') dt' \right) \right] F(\vec{v}, 0), \quad (\text{II.25})$$

et 0 est l'opérateur chronologique.

Comme au paragraphe (II.b.1), on s'intéresse au cas où  $F(\vec{v}, 0)$  est isotrope :  $F(\vec{v}, 0) \equiv F(v, 0)$  et on introduit la transformée de Fourier de  $F(v, 0)$  dans (II.25) et on obtient :

$$F(\vec{v}, t) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty+ai}^{\infty+ai} \frac{dp}{2\pi} F(p) \left[ \exp \left( \int_0^t \hat{L}(t') dt' \right) \right] \exp(ipv), \quad (\text{II.26})$$

où  $F(p)$  est donné par (II.11) et on a omis l'opérateur 0. L'opérateur de diffusion, figurant dans (II.26), peut être décomposé en deux autres opérateurs comme

$$\int_0^t dt' \hat{L}(t') = \hat{L}_1 + \hat{L}_2, \quad (\text{II.27})$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{L}_1 &= a(\vec{v}, t) \hat{A}^2, & \hat{L}_2 &= b(\vec{v}, t) \hat{A}, \\ a(\vec{v}, t) &= \int_0^t dt' \frac{\vec{v} \cdot \overset{\leftrightarrow}{D} \cdot \vec{v}}{v^2}, \\ b(\vec{v}, t) &= \int_0^t dt' \left\{ -\frac{\vec{v} \cdot \overset{\leftrightarrow}{D} \cdot \vec{v}}{v^3} + \frac{\text{Tr } \overset{\leftrightarrow}{D}}{v} + \frac{\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \text{Tr } \overset{\leftrightarrow}{D}}{v} \right\}, \\ \hat{A} &\equiv \frac{\partial}{\partial v}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.28})$$

et  $\text{Tr } \overset{\leftrightarrow}{D}$  est la trace du tenseur  $\overset{\leftrightarrow}{D}$ .

D'après (II.27) l'exponentielle en (II.26) aura la forme  $\exp(\hat{L}_1 + \hat{L}_2)$ . En appliquant la formule de Zassenhaus (voir par exemple Wilcox [47]) :

$$\exp(\hat{L}_1 + \hat{L}_2) = \exp \hat{L}_1 \times \exp \hat{L}_2 \times e^{\sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{C}_n} \quad (\text{II.29})$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{C}_2 &= -\frac{1}{2}[\hat{L}_1, \hat{L}_2], \\ \mathcal{C}_3 &= \frac{1}{3}\left\{[\hat{L}_2, [\hat{L}_1, \hat{L}_2]] + \frac{1}{6}[\hat{L}_1, [\hat{L}_1, \hat{L}_2]]\right\}, \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.30})$$

où  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ . Dans notre cas  $\mathcal{C}_2$  est d'ordre  $|\delta E|^4$  (ou  $D^2$ ),  $\mathcal{C}_3$  est d'ordre  $|\delta E|^6$  (ou  $D^3$ ), ... etc. Au sein de l'approximation quasi-linéaire les termes  $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots$  seront délaissés. Autrement dit, par l'approximation quasi-linéaire l'opérateur  $\hat{L}_1$  commute avec  $\hat{L}_2$  et le premier membre de (II.29) est donné par l'approximation :

$$\exp(\hat{L}_1 + \hat{L}_2) \approx \exp \hat{L}_1 \exp \hat{L}_2 \quad (\text{II.31})$$

En substituant (II.31) dans (II.26), nous avons une fonction de la forme  $\exp \hat{L}_1 \left( \exp \hat{L}_2 (\exp ipv) \right)$  et nous devons donc, dans un premier temps, déterminer  $\exp \hat{L}_2 (\exp ipv) \equiv K(v)$ , ensuite déterminer  $(\exp \hat{L}_1)K(v)$ . En développant  $\exp \hat{L}_2$  en puissance, on peut vérifier que (voir appendice A) :

$$(\exp \hat{L}_2) \exp(ipv) = \exp \left\{ ipb \left[ 1 + \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{A}b(\hat{A}b(A \dots) \hat{A}b) \hat{A}b}{(n+1)!}}^n \right] \right\} \exp(ipv) \quad (\text{II.32})$$

Dans le second membre de (II.32), le terme qui figure dans la sommation est au moins d'ordre  $|\delta E|^4$ , ce qui donne, dans l'approximation quasi-linéaire,

$$(\exp \hat{L}_2) \exp(ipv) \approx \exp(ipb) \exp(ipv) \quad (\text{II.33})$$

En appliquant maintenant l'opérateur  $\exp \hat{L}_1$  sur (II.33) et en utilisant la même approximation qu'auparavant (commutativité appro-

chée entre  $\hat{L}_1$  et  $\hat{L}_2$ ), on obtient :

$$\begin{aligned}
 & (\exp \hat{L}_1) \exp(ipb) \exp(ipv) \approx \exp(ipb) (\exp \hat{L}_1) \exp(ipv) \\
 & = \exp(ip(v+b)) \times \exp \left\{ -p^2 a \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\hat{A}^2 a \hat{A}^2 a \dots)}{(n+1)!} \right] \right\} \\
 & \approx \exp[ip(v+b) - p^2 a] .
 \end{aligned} \tag{II.34}$$

A l'aide du résultat (II.34), la solution approchée de l'équation de diffusion (II.22), tout en servant des mêmes approximations utilisées dans l'établissement de cette équation, est donnée par :

$$F(\vec{v}, t) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty + a_j}^{\infty + a_j} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(v+b) - p^2 a} F(p) \tag{II.35}$$

Maintenant pour prouver que la solution donnée par (II.35) est la même que (II.12), nous devons montrer que  $b = C_1$  et  $a = \frac{1}{2}C_2$ . Rappelons que  $C_1$  et  $C_2$  sont reliés selon (II.13) à la quantité stochastique  $\lambda(t)$ , définie comme :

$$\lambda(t) = |\vec{v}(t)| - v$$

En posant  $\vec{v}(t) = \vec{v} + \Delta\vec{v}$  et en effectuant un développement en série jusqu'au deuxième ordre en  $|\Delta\vec{v}|$  (ou  $|\delta\vec{E}|$ ), on obtient pour  $\lambda(t)$  :

$$\lambda(t) \approx \frac{\vec{v} \cdot \Delta\vec{v}}{v} + \frac{\Delta\vec{v} \cdot \Delta\vec{v}}{2v} - \frac{(\vec{v} \cdot \Delta\vec{v})^2}{2v^3} , \tag{II.36}$$

et les moyennes à calculer sont  $C_1 = \langle \lambda(t) \rangle$  et  $C_2 \approx \langle \lambda^2(t) \rangle$ .

En utilisant les identités suivantes (qui peuvent être montrées de la même façon qu'au paragraphe III.b.1) :

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \Delta\vec{v} \cdot \Delta\vec{v} \rangle &= \text{Tr } \vec{D} \\
 \langle \Delta\vec{v} \rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \langle \Delta\vec{v} \cdot \Delta\vec{v} \rangle ,
 \end{aligned} \right\} \tag{II.37}$$

on peut montrer que  $C_1 = b$  et  $a = \frac{1}{2}C_2$ . En effet, on a :

$$\begin{aligned}
 a &= \int_0^t dt' \left[ \frac{\vec{v} \cdot \overleftrightarrow{D} \cdot \vec{v}}{v^2} \right] = \frac{\langle (\vec{v} \cdot \Delta \vec{v})^2 \rangle}{2v^2} = \frac{1}{2}C_2 \\
 \text{et} \\
 b &= \int_0^t dt' \left\{ - \frac{\vec{v} \cdot \overleftrightarrow{D} \cdot \vec{v}}{v^3} + \frac{\text{Tr } \overleftrightarrow{D}}{v} + \hat{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \text{Tr } \overleftrightarrow{D} \right\} \\
 &= - \frac{\langle (\vec{v} \cdot \Delta \vec{v})^2 \rangle}{2v^3} + \frac{\langle \Delta \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \rangle}{2v} + \frac{\langle \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \rangle}{v} = C_1
 \end{aligned} \tag{II.38}$$

### II.c. RESUME

Le résultat principal obtenu dans ce chapitre se résume ainsi :

La fonction de distribution moyenne évolue à partir d'une distribution initiale donnée ;  $F(v,0)$ , suivant la formule :

$$F(\vec{v}, t) = \int_0^\infty dv_0 F(v_0, 0) \frac{e^{-\frac{(v-v_0+C_1(\vec{v}, t))^2}{2C_2(\vec{v}, t)}}}{\sqrt{2\pi C_2(\vec{v}, t)}} , \tag{II.39}$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont liés au tenseur de diffusion. Donc (II.39) reflète l'effet du processus de diffusion des particules par les ondes générées par l'instabilité. Comme  $C_1$  et  $C_2$  sont déterminés en fonction des quantités moyennes  $\langle \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \rangle$ ,  $\langle \Delta \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \rangle$  et  $\langle (\vec{v} \cdot \Delta \vec{v})^2 \rangle$  lesquelles sont liées à la densité d'énergie turbulente, on doit d'abord déterminer l'évolution de l'instabilité à partir de l'équation cinétique des ondes afin de décrire l'évolution de la FDM. On est ainsi amené à chercher la solution simultanée de l'équation cinétique des ondes couplées avec l'équation d'évolution de la FDM décrite par (II.39).

En conclusion, la méthode que nous avons développée dans ce chapitre permet d'étudier l'évolution de la FDM en cohérence avec l'évolution de l'instabilité. Pour montrer cela, en exemple, nous continuons notre étude sur l'instabilité acoustique ionique, en tenant compte, cette fois-ci, de la modification de la FDM à l'aide de (II.39).

Dans le chapitre suivant, nous étudions l'évolution de la FDM électronique tandis que l'évolution de la FDM ionique sera étudiée, dans le cadre de la théorie QL et aussi dans le cadre de la théorie renormalisée, dans le chapitre IV.

\* \*  
\*





## C H A P I T R E III

### EFFET DE L'EVOLUTION DE LA FDM ELECTRONIQUE

#### III.a. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous nous limitons à l'étude de l'évolution dynamique de la FDM électronique et de l'instabilité acoustique ionique générée par un courant de dérive.

L'étude que nous menons est de résoudre l'équation cinétique des ondes en utilisant le résultat obtenu dans le chapitre précédent pour la FDM (cf. (II.39)). D'après ce résultat, la modification de la FDM électronique est déterminée en fonction des premier et second cumulants. On est amené alors à calculer ces cumulants en tenant compte des caractéristiques de l'instabilité acoustique ionique.

Dans les calculs qui seront développés ici, on emploie la fonction de résonance classique puisque comme nous l'avons vu au chapitre I, l'emploi de la fonction de résonance renormalisée produit des corrections négligeables par rapport aux résultats habituels.

Nous procédons par la représentation de la fonction de distribution électronique initiale par une fonction isotrope, dans un système de références où  $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$  (système du repos) :

$$F_e(\vec{v}, 0) \equiv F_e(\vec{w}, 0) = \frac{n_0}{\sqrt{\pi^3 v_e^3}} e^{-w^2/v_e^2}, \quad (\text{III.1})$$

$$w = |\vec{w}| = |\vec{v} - \vec{u}|.$$

La FDM électronique pour un temps ultérieur sera donnée par (cf. (II.39)) :

$$F_e(\vec{w}, t) = \int_0^\infty dw_0 \frac{e^{-\frac{(w-w_0+C_1)^2}{2C_2}}}{\sqrt{2\pi C_2}} F_e(w_0, 0), \quad (\text{III.2})$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des fonctions implicites du temps et rappelons qu'elles sont reliées à l'incrément du module de la vitesse  $\lambda(t) \equiv |\vec{w}(t)| - |\vec{w}|$  par :

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \langle \lambda(t) \rangle \\ C_2 &\approx \langle \lambda^2(t) \rangle, \end{aligned} \right\} (\text{III.2.a})$$

En posant  $\vec{w}(t) = \vec{w} + \Delta\vec{w}$ , la fonction  $\lambda(t)$  est donnée avec une précision quadratique par rapport à l'incrément de vitesse  $\Delta\vec{w}$  par :

$$\left. \begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{\vec{w} \cdot \Delta\vec{w}}{w} + \frac{\Delta\vec{w} \cdot \Delta\vec{w}}{2w} - \frac{(\vec{w} \cdot \Delta\vec{w})^2}{2w^3}, \\ \Delta\vec{w} \equiv \Delta\vec{v} &= -\frac{e}{m} \int_0^t \delta\vec{E}(\vec{x}(t'), t') dt' \end{aligned} \right\} (\text{III.3})$$

En substituant (III.1) dans (III.2), on obtient :

$$F_e(\vec{w}, t) = \frac{n_0}{2\sqrt{\pi^3} v_e^3 (1+2\bar{C}_2)^{1/2}} e^{-\frac{(\bar{w}+\bar{C}_1)^2}{1+2\bar{C}_2}} \times \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{(\bar{w}+\bar{C}_1)}{\sqrt{2\bar{C}_2(1+2\bar{C}_2)}}\right) \right\}, \quad (\text{III.4})$$

$$\text{et } \operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y d\theta e^{-\theta^2} \text{ avec } \bar{w} = w/v_e, \bar{C}_1 = C_1/v_e, \dots$$

III.b. CALCUL DES CUMULANTS

Pour calculer les quantités fondamentales  $C_1$  et  $C_2$ , il nous suffirait de calculer le tenseur  $\langle \Delta \vec{w} \Delta \vec{w} \rangle$ , celui-ci est régi par l'équation suivante, qui résulte de la formule (III.3) qui définit  $\Delta \vec{w}$ ,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \Delta \vec{w} \Delta \vec{w} \rangle = \overset{\leftrightarrow}{D} , \quad (\text{III.5})$$

où  $\overset{\leftrightarrow}{D}$  est le tenseur de diffusion que nous décrirons dans la suite dans l'approximation quasi-linéaire. En termes de ce tenseur, les seconds moments de  $\Delta \vec{w}$  sont ainsi donnés par :

$$\langle \Delta \vec{w} \cdot \Delta \vec{w} \rangle = 2 \int_0^t dt' \text{Tr} \overset{\leftrightarrow}{D}^{\text{QL}} , \quad (\text{III.6.a})$$

$$\langle (\vec{w} \cdot \Delta \vec{w})^2 \rangle = 2 \int_0^t dt' \vec{w} \cdot \overset{\leftrightarrow}{D}^{\text{QL}} \cdot \vec{w} , \quad (\text{III.6.b})$$

et le premier moment s'obtient grâce à la relation entre les deux premiers moments de la vitesse selon la formule (II.37), on a ainsi :

$$\langle \vec{w} \cdot \Delta \vec{w} \rangle = \vec{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \langle \Delta \vec{w} \cdot \Delta \vec{w} \rangle \quad (\text{III.6.c})$$

Considérons maintenant le calcul explicite de  $\overset{\leftrightarrow}{D}^{\text{QL}}$ , donné par :

$$\overset{\leftrightarrow}{D}^{\text{QL}} = \frac{e^2}{m^2} \sum_{\vec{k}} \vec{k} \vec{k} I_{\vec{k}}(t) \delta(\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v}) , \quad (\text{III.7})$$

qui sera effectué successivement dans le cas d'un spectre d'énergie isotrope remplissant tout l'espace  $\vec{k}$  et dans le cas d'un spectre anisotrope remplissant seulement le demi-espace  $\vec{k}$  tel que l'angle entre  $\vec{k}$  et  $\vec{u}$  soit compris entre 0 et  $\pi/2$ .

## III.b.1. CAS DU SPECTRE ISOTROPE

Dans (III.7), en convertissant la sommation sur  $\vec{k}$  en intégrale, employant les coordonnées sphériques avec  $\vec{v}$  dirigé le long de l'axe polaire et avec un spectre d'énergie décrit par  $I_{\vec{k}}(t) = I_k(t)$ , l'intégration sur les angles donne le résultat :

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{D}^{QL} &= D_1 \hat{v}\hat{v} + D_2 (\overleftrightarrow{I} - \hat{v}\hat{v}) , \\ D_1 &= \frac{\pi v_e^4}{v} \int_0^\infty dk k^3 \alpha_k(t) \left( \frac{\omega_k^2}{k^2 v^2} \right) , \\ D_2 &= \frac{\pi v_e^4}{2v} \int_0^\infty dk k^3 \alpha_k(t) \left[ 1 - \frac{\omega_k^2}{k^2 v^2} \right] , \\ \hat{v} &= \vec{v}/v, \quad \alpha_k(t) = \frac{e^2 I_k(t)}{8\pi^2 T_e^2}, \quad v > c_s \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \overleftrightarrow{D}^{QL} \\ D_1 \\ D_2 \\ \hat{v} \end{aligned}} \right\} \text{(III.8)}$$

En reportant cette expression pour  $\overleftrightarrow{D}^{QL}$  dans les formules (III.6.a)-(III.6.c) pour les moments de  $\Delta\vec{w}$ , on obtient :

$$\langle \Delta\vec{w}, \Delta\vec{w} \rangle = \frac{2\eta v_e^2}{\bar{v}}, \quad \text{(III.9.a)}$$

$$\langle \vec{w}, \Delta\vec{w} \rangle = - \frac{\eta(\vec{w} \cdot \vec{v})}{\bar{v}^3}, \quad \text{(III.9.b)}$$

$$\langle (\vec{w} \cdot \Delta\vec{w})^2 \rangle = \frac{2v_e^4}{\bar{v}} \eta^*(\bar{w}, t), \quad \text{(III.9.c)}$$

où  $\bar{w}$ ,  $\bar{v}$  et  $\bar{u}$  sont respectivement les valeurs de  $w$ ,  $v$  et  $u$  normalisées par rapport à  $v_e$  et les fonctions  $\eta$  et  $\eta^*$  qui y figurent sont reliées au spectre d'énergie turbulente par :

$$\eta = \pi v_e \int_0^t dt' \int_0^\infty dk k^3 \alpha_k(t') \quad \text{(III.9.d)}$$

$$\eta^* = \pi v_e \int_0^t dt' \int_0^\infty dk k^3 \alpha_k(t') M(k, \bar{w}), \quad \text{(III.9.e)}$$

$$M(k, \bar{w}) = \frac{\omega_k^2}{k^2 v^3} (\vec{w} \cdot \hat{v}) + \frac{(\vec{u}_\Lambda \hat{v})^2}{2v_e^2} \left( 1 - \frac{\omega_k^2}{k^2 v_e^2} \right),$$

$$\bar{v} > \sqrt{\frac{m}{2M}}$$

Nous obtenons finalement pour  $C_1$  et  $C_2$  :

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_1 &= \frac{\eta}{wv^3} (\bar{w}\bar{u}\mu + \bar{u}^2) - \frac{\eta^*}{w^3 v} \\ \bar{C}_2 &= \frac{2\eta^*}{w^2 v}, \quad \mu = \hat{w} \cdot \hat{u} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.10})$$

### III.b.2. CAS D'UN SPECTRE ANISOTROPE

Nous simulons l'anisotropie du spectre en stipulant que celui-ci n'est non nul que si la direction parallèle de la propagation est dans le même sens que le vecteur  $\vec{u}$ . Le spectre d'énergie est alors décrit par  $I_{\vec{k}}(t) = 2I_k(t)\theta(\cos \theta)$  où  $\theta$  est la fonction de Heaviside et  $\theta$  est l'angle entre les vecteur  $\vec{k}$  et  $\vec{u}$ .

Les calculs algébriques dans ce cas sont plus fastidieux et sont exposés dans l'appendice (B). Nous ne les reproduisons pas ici et nous notons seulement que les quantités fondamentales, ici notées par  $C_1^*$  et  $C_2^*$ , comparées avec les quantités correspondantes  $C_1$  et  $C_2$  dans le cas du spectre isotrope sont telles que :

$$\left| \frac{C_1^* - C_1}{C_1} \right| \approx 0\left(\sqrt{\frac{m}{2M}}\right),$$

$$\left| \frac{C_2^* - C_2}{C_2} \right| \approx 0(C_s/u)$$

(III.11)

Il s'ensuit que les corrections dues à l'anisotropie du spectre sont négligeables pour  $C_1$  tandis qu'elles sont importantes pour  $C_2$  lorsque le rapport  $C_s/u$  n'est pas suffisamment petit devant l'unité ( $C_s/u < 1$ ). Dans le cas où  $C_s/u \ll 1$ , les corrections

d'anisotropie pour  $C_2$  sont aussi négligeables. Par exemple, dans un plasma d'hydrogène  $\sqrt{\frac{m}{2M}} \approx \frac{1}{60}$  et pour  $u/v_e > \frac{1}{10}$  on peut délaiss-  
ser les corrections dues à l'anisotropie du spectre pour  $C_2$ , tan-  
dis que pour  $\frac{1}{10} > u/v_e > \frac{1}{60}$  ces corrections sont importantes.

On se limite, ici, au cas où  $C_s/u \ll 1$  où, comme nous ve-  
nons de le montrer, les corrections d'anisotropie sont négligea-  
bles. Alors nous basons notre calcul sur les résultats obtenus,  
pour les cumulants, dans le cas du spectre isotrope (cf. (III.10)).  
On remarque que pour déterminer le comportement temporel de  $C_1$  et  
 $C_2$ , on doit déterminer celui de  $\eta$  et on est amené à résoudre  
l'équation cinétique d'onde.

### III.c. RESOLUTION DE L'EQUATION CINETIQUE DES ONDES

Nous reconsidérons l'équation cinétique d'onde où le taux  
de croissance (d'amortissement) est donné par son expression  
quasi-linéaire :

$$\frac{\partial}{\partial t} I_{\vec{k}}(t) = 2\gamma_{\vec{k}}^{QL}(t) I_{\vec{k}}(t) , \quad (\text{III.12})$$

$$\gamma_{\vec{k}}^{QL}(t) = \sum_{s=e,i} \gamma_{\vec{k}s}^{QL}(t)$$

$$\gamma_{\vec{k}s}^{QL}(t) = - \frac{\text{Im } \zeta_s^{QL}}{\frac{\partial}{\partial \omega_{\vec{k}}} (\text{Re } \zeta^{QL})} , \quad (\text{III.12.a})$$

$$\zeta^{QL} \equiv \zeta^{QL}(\vec{k}, \omega, t) = 1 + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{n_0 k^2} \int d\vec{v} \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} F_s(\vec{v}, t) \frac{1}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v} + i\delta} \quad (\text{III.12.b})$$

Dans ce qui suit, nous nous limitons au calcul de  $\gamma_{\vec{k}e}^{QL}$ , tandis  
que  $\gamma_{\vec{k}i}^{QL}$  sera ignoré (celui-ci sera pris en compte dans le chapi-  
tre suivant où nous en donnerons des justifications).

Pour calculer  $\gamma_{ke}^{QL}$ , on calcule d'abord les parties réelle et imaginaire de  $\zeta_e^{QL}(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, t)$  :

- Calcul de  $\text{Im } \zeta_e^{QL}(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, t)$

On intègre (III.12.b) par partie et en utilisant le changement de variables  $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$  et  $\Omega_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{u}$ , on obtient :

$$\text{Im } \zeta_e^{QL}(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, t) = - \frac{\pi \omega_{pe}^2}{n_0} \frac{\partial}{\partial \Omega_{\vec{k}}} \int d\vec{w} F_e(\vec{w}, t) \delta(\Omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{w}) \quad (\text{III.13})$$

et  $F_e(\vec{w}, t)$  est donné en termes de  $C_1$  et  $C_2$  par (cf. (III.4)) :

$$F_e(\vec{w}, t) = \frac{n_0}{\sqrt{\pi^3} v_e^3 (1+2\bar{C})^{1/2}} \exp\left\{(\bar{w} + \bar{C}_1)^2 / (1+2\bar{C}_2)\right\}, \quad (\text{III.14})$$

où  $\bar{C}_1$  et  $\bar{C}_2$  sont donnés par (III.10), et on a approximé la fonction  $\text{erf}(\dots)$  par 1. En effet son argument est d'ordre  $\frac{1}{\sqrt{2\bar{C}_2}(\bar{w} \approx 1)}$  qui est très grand devant 1.

Revenons à (III.13), où pour calculer l'intégrale sur  $w$  on utilise les coordonnées sphériques avec  $\vec{u}$  dirigé le long de l'axe  $\vec{z}$  et le vecteur  $\vec{k}$  dans le plan  $xz$ . Comme la fonction  $F_e$  est indépendante de l'angle azimutale  $\phi$ , l'intégration sur celui-ci donne :

$$\text{Im } \zeta_e^{QL}(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, \eta) = - \frac{2\pi \omega_{pe}^2 v_e}{n_0 k^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\Omega}_{\vec{k}}} \int_{\bar{\Omega}_{\vec{k}}}^{\infty} \bar{w} d\bar{w} \int_{(b-a)}^{(b+a)} d\mu F_e(\bar{w}, \mu, \eta) \times$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - (\mu-b)^2}}$$

$$a = \frac{k_{\perp}}{k} \sqrt{\left(1 - \frac{\bar{\Omega}_{\vec{k}}^2}{\bar{w}^2}\right)}, \quad b = \frac{k_{\parallel}}{k} \times \frac{\bar{\Omega}_{\vec{k}}}{\bar{w}}, \quad \bar{\Omega}_{\vec{k}} = \frac{\Omega_{\vec{k}}}{k v_e}. \quad (\text{III.15})$$

On remarque que la contribution aux intégrales dans (III.15) provient du domaine  $\bar{w} \geq \bar{\Omega}_{\vec{k}}$ , alors on distingue deux cas :

1) -  $\bar{\Omega}_{\vec{k}} \gg (\bar{u}\eta)^{1/4}$ , dans ce cas on a  $\frac{C_1}{w} \ll 1$ . En effet nous avons  $\frac{C_1}{w} \approx \frac{\bar{u}\eta}{w^4}$  ce qui est très inférieur à un dans le domaine d'intégration  $\bar{w} > \bar{\Omega}_{\vec{k}}$ . On peut ainsi développer la fonction  $F_e(\bar{w}, \mu, \eta)$  autour de la fonction de distribution initiale (cf. (III.1)) et en ne retenant que le premier terme correctif proportionnel à  $C_1$ , on obtient :

$$\text{Im } \zeta_e^{QL}(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, \eta) \approx 2\sqrt{\pi} \left( \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} \right) \left\{ \bar{\Omega}_{\vec{k}} e^{-\bar{\Omega}_{\vec{k}}^2} + (\bar{u}\eta) \frac{\partial}{\partial \bar{\Omega}_{\vec{k}}} \left[ (\hat{k} \cdot \hat{u}) \bar{\Omega}_{\vec{k}} \int_{\bar{\Omega}_{\vec{k}}}^{\infty} \frac{2\bar{w}d\bar{w}e^{-\bar{w}^2}}{(\bar{w}^2 + \bar{u}^2)^{3/2}} \right] \right\} \quad (\text{III.16})$$

2) -  $\bar{\Omega}_{\vec{k}} \leq (\bar{u}\eta)^{1/4}$ , on peut aussi développer la fonction  $F_e$  comme dans le cas précédent et couper l'intégration au point  $\bar{w} = (\bar{u}\eta)^{1/4}$  et les résultats des intégrales donnent :

$$\text{Im } \zeta_e^{QL}(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, \eta) \approx 2\sqrt{\pi} \left( \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} \right) \left[ \bar{\Omega}_{\vec{k}} e^{-\bar{\Omega}_{\vec{k}}^2} + (\bar{u}\eta)(\hat{k} \cdot \hat{u}) \int_{(\bar{u}\eta)^{1/4}}^{\infty} \frac{2\bar{w}d\bar{w}e^{-\bar{w}^2}}{(\bar{w}^2 + \bar{u}^2)^{3/2}} \right] \times \quad (\text{III.17})$$

On remarque que lorsque  $\bar{\Omega}_{\vec{k}} \gg (\bar{u}\eta)^{1/4}$ , le deuxième terme dans le second membre de (III.16), qui est d'ordre de  $\frac{\bar{u}\eta}{|\bar{\Omega}_{\vec{k}}|}$ , est très inférieur au premier terme, et la modification de la FDM n'est pas significative. Dans le cas contraire :  $\bar{\Omega}_{\vec{k}} \leq (\bar{u}\eta)^{1/4}$ , le deuxième terme, qui est d'ordre de  $(\bar{u}\eta)^{3/4}$ , peut devenir du même ordre que le premier terme et traduit la modification de la FDM électronique. En effet, la condition  $\eta \geq \Omega_k^4 / \bar{u} \sim \bar{u}^3$  définit le seuil au-dessus duquel la modification de la FDM électronique devient importante. Il serait commode d'établir une condition non pas sur  $\eta$  mais sur le rapport des énergies  $\alpha$ , où compte tenu de



l'expression de  $\eta$  (cf. (III.9.d)) on a, comme ordre de grandeur,  $\eta \sim \alpha\pi/(\gamma_e/\bar{k}v_e)$  avec  $(\gamma_e/\bar{k}v_e) \approx \sqrt{\frac{\pi m}{8M}\left(\frac{u}{v_e}\right)}$ . Dans la limite  $\eta \geq \bar{u}^3$ , on a  $\alpha \geq \bar{u}^4 \sqrt{\frac{m}{8\pi M}}$ . Ce niveau seuil de l'énergie est très petit et serait rapidement atteint. On étudiera plus loin le rôle de la modification de la FDM électronique dans le processus de saturation de l'instabilité.

- Calcul de  $\text{Re } \zeta_e^{\text{QL}}(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, \eta)$

La détermination de la déviation de  $\text{Re } \zeta_e^{\text{QL}}$  par rapport au résultat habituel, provenant du fait de la modification de la FDM, n'a pas un grand intérêt car, comme nous l'avons aussi montré dans le cas où l'effet de l'élargissement était pris en considération (cf. (I.a) partie II), cela correspond à une déviation de fréquence des modes. Il est cependant instructif de donner un ordre de grandeur de cette déviation.

D'après (III.12), on a, en utilisant les mêmes notations qu'auparavant,

$$\text{Re } \zeta_e^{\text{QL}}(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, \eta) = \frac{\omega_{pe}^2}{n_0 k^2} \text{ p.p. } \int \frac{d\vec{w} \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{w}} F_e(\vec{w}, \eta)}{(\Omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{w})}, \quad (\text{III.18})$$

où p.p.  $\int$  désigne l'intégration au sens de la partie principale. Comme la fonction  $F_e$  est indépendante de l'angle  $\phi$  l'opérateur  $\vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{w}}$  est donné par :

$$\vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{w}} = \vec{k} \cdot \hat{w} \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\vec{k} \cdot \hat{e}_\theta}{w} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

avec  $\cos \theta = \hat{u} \cdot \hat{w}$ ,  $\vec{k} \cdot \hat{w} = k_{\parallel} \mu + k_{\perp} \sqrt{1 - \mu^2} \cos \phi$  et  $\vec{k} \cdot \hat{e}_\theta = -k_{\parallel} \sqrt{1 - \mu^2} + k_{\perp} \mu \cos \phi$ ;  $\mu = \cos \theta$ .

Maintenant, le second membre de (III.18) s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \text{p.p.} \left\{ - \int \frac{d\vec{w}}{w} \frac{\partial F_e}{\partial w}(\vec{w}, \eta) + \Omega_{\vec{k}} \int \frac{\frac{d\vec{w}}{w} \frac{\partial F_e}{\partial w}(\vec{w}, \eta)}{\Omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{w}} \right. \\
& \left. + \int \frac{dw}{w} \frac{[-(1-\mu^2)k_{\parallel} + k_{\perp} \sqrt{1-\mu^2} \cos \phi]}{(\Omega_k - k_{\parallel} w \mu) - k_{\perp} w \sqrt{1-\mu^2} \cos \phi} \frac{F_e(\vec{w}, \eta)}{\partial \mu} \right\},
\end{aligned}$$

et la première intégrale donne le résultat habituel tandis que la deuxième et troisième intégrales donnent des corrections à celle-ci. Pour calculer les deux dernières intégrales, on développe la fonction  $F_e$  autour d'une maxwellienne et l'intégration sera coupée au point  $\bar{w} = (\bar{u}\eta)^{1/4}$ . On trouve que, pour  $(\bar{u}\eta)^{1/4} > \bar{\Omega}_k$  la partie réelle de  $\zeta_e^{QL}$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
\text{Re } \zeta_e^{QL}(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, \eta) & \approx \frac{1}{k^2 \lambda_D^2} \left( 1 - \frac{4\bar{\Omega}_k^2}{\sqrt{\pi}} \int_{(\bar{u}\eta)^{1/4}}^{\infty} e^{-\bar{w}^2} d\bar{w} \right. \\
& \left. + (k_{\parallel}/k) \bar{\Omega}_k(\bar{u}\eta) \int_{(\bar{u}\eta)^{1/4}}^{\infty} \frac{2d\bar{w} e^{-\bar{w}^2}}{(\bar{w}^2 + \bar{u}^2)^{3/2}} \right), \quad (\text{III.19})
\end{aligned}$$

la solution de  $\text{Re } \zeta_e^{QL}(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}, \eta) = 0$  mène à

$$\omega_k(\eta) \approx \omega_k \left( 1 + |\bar{\Omega}_k| (\bar{u}\eta)^{1/2} \right),$$

où l'on trouve que la déviation de fréquence est :

$$|\Delta\omega_k/\omega_k| \approx |\bar{\Omega}_k| (\bar{u}\eta)^{1/2} \ll 1.$$

Revenons au calcul du taux de croissance. En utilisant (III.12.a) et (III.17), on peut le mettre sous la forme :

$$\gamma_{\vec{k}}^{QL}(\eta) = \sqrt{\frac{\pi m}{8M(1+k^2 \lambda_D^2)^3}} \left[ \vec{k} \cdot \vec{u}(\eta) - \omega_{\vec{k}} \right], \quad (\text{III.20})$$

et  $\vec{u}(\eta)$  est donné par (où nous avons considéré seulement le cas  $\Omega_{\vec{k}} \leq (\bar{u}\eta)^{1/4}$ )

$$\vec{u}(\eta) = \vec{u} \left[ 1 - \eta \int_{(\bar{u}\eta)^{1/4}}^{\infty} \frac{2\bar{w}d\bar{w} e^{-\bar{w}^2}}{(\bar{w}^2 + \bar{u}^2)^{3/2}} \right] \quad (\text{III.20.a})$$

D'après les expressions (III.20) et (III.20.a), on trouve que la vitesse de dérive électronique  $\vec{u}(t) \equiv \vec{u}(\eta)$  décroît (avec  $\eta$ ) d'une manière monotone et tend vers zéro. Ce qui montre, d'une part, que la FDM électronique s'isotropise lors de la relaxation de l'instabilité et, d'autre part, que la source d'énergie, fournie par les électrons aux modes acoustiques ioniques, s'épuise au cours du temps.

Pour montrer cela de façon rigoureuse, nous cherchons la solution de l'équation cinétique des ondes. Nous procédons de façon à établir une relation entre  $\eta$  et  $\alpha$ , où compte tenu du fait que le spectre  $I_k$  pique autour d'une valeur  $k = \bar{k} = \lambda_D^{-1}/\sqrt{2}$ , on a :

$$\frac{d\eta}{dt} = \pi v_e \int_0^{\infty} dk k^3 \alpha_k(t) \approx \pi \bar{k} v_e \alpha,$$

qui devient, avec  $\tau = \pi \bar{k} v_e t$ ,

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \alpha, \quad (\text{III.21})$$

et cette relation permet d'écrire l'équation cinétique en termes de  $\eta$  au lieu de  $\alpha$ .

Revenons à l'équation (III.12), où après avoir intégré sur  $\vec{k}$  et compte tenu de la relation (III.21), elle devient :

$$\frac{d\alpha}{d\eta} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{m}{3\pi M}} \left[ \frac{\bar{u}(\eta)}{2} - \sqrt{\frac{m}{3M}} \right], \quad (\text{III.22})$$

et  $\bar{u}(\eta)$  est donné comme par (III.20.a). A noter que l'énergie totale des ondes croît au cours du temps tant que la vitesse de dérive est supérieure à la vitesse du son et atteint un niveau maximum dès que  $\bar{u}(\eta_0) = 2\sqrt{\frac{m}{3M}}$  ce qui donne pour  $\eta_0$  :

$$\eta_0 \approx \bar{u}^{1/3} \left( \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{C_s}{u} \right)^{4/3}, \quad (\text{III.23})$$

et le niveau maximum de l'énergie est donné par

$$\alpha_{\max} \approx \frac{1}{3} \sqrt{\frac{m}{3\pi M}} \bar{u} \eta_0. \quad (\text{III.24})$$

On trouve que le niveau maximum donné par (III.24) est très inférieur à celui obtenu par Kadomtsev ainsi qu'à celui obtenu dans le chapitre I, en tenant compte de l'élargissement de résonance. A noter aussi que même lorsque  $u \approx v_e$ , le rapport des énergies maximum est  $\alpha \approx \frac{1}{3} \sqrt{\frac{m}{3\pi M}}$ , ce qui montre qu'une seule petite fraction de l'énergie dirigée est convertie aux modes acoustiques ioniques. Revenons à l'équation (III.22) qui est intégrable et donne

$$\alpha = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{m}{3\pi M}} \left[ \frac{1}{2} \int_0^\eta \bar{u}(\eta') d\eta' - \sqrt{\frac{m}{3M}} \eta \right], \quad (\text{III.25})$$

et on trouve que  $\alpha$  tend vers zéro asymptotiquement lorsque  $\eta$  atteint une valeur  $\eta_\infty$  satisfaisant à :

$$\eta_\infty \sqrt{\frac{4m}{3M}} = \int_0^{\eta_\infty} \bar{u}(\eta') d\eta'. \quad (\text{III.26})$$

On aboutit à la conclusion que le rapport des énergies  $\alpha$  croît monotonement avec  $\eta$  et atteint un niveau maximum pour  $\eta = \eta_0$ , donné par (III.23), avant de décroître vers zéro lorsque  $\eta$  atteint une valeur asymptotique  $\eta_\infty$  donnée par (III.26) ( $\eta_\infty \sim (\frac{7}{4})^{4/3} \eta_0$ ). Ce comportement de la fonction  $\eta$ , qui varie de zéro à une valeur  $\eta_\infty$  lorsque le temps macroscopique  $t$  varie de zéro à l'infini, permet de remplacer la variable  $t$  dans tous les calculs par  $\eta$ . Aussi les résultats obtenus dans ce paragraphe pour  $\alpha$  et  $\eta$ , nous permettent de déterminer la déformation de la FDM électronique.

### III.d. EVOLUTION DE LA FDM ELECTRONIQUE

Pour montrer comment la FDM évolue lors de la relaxation de l'instabilité acoustique ionique nous montrons, d'abord, comment les premier et second cumulants varient au cours du temps.

Nous donnerons, ici, une série de figures qui élucide la variation de  $C_1$  et  $C_2$  en fonction de  $x = v/v_e$  pour des valeurs différentes de  $\bar{u}$ ,  $\mu_0 = \hat{u} \cdot \hat{v}$  et  $\eta$ .  $\bar{C}_1/\bar{w}$  et  $\bar{C}_2$  sont tracés respectivement sur les figures (3) et (4), en fonction de  $x$  pour trois valeurs différentes du paramètre  $\eta$ . On remarque que i)  $\bar{C}_1/\bar{w}$  et  $\bar{C}_2$  croissent avec  $\eta$  ii)  $\bar{C}_1$  est toujours négatif pour  $\mu_0 \ll 1$  (ou  $\vec{w}$  est presque perpendiculaire à  $\vec{u}$ ) iii)  $\bar{C}_2$  croît avec  $x$  et atteint une valeur maximum qui correspond à  $x = \bar{u}$  et puis il décroît.

La figure (5) représente  $\bar{C}_1/\bar{w}$  en fonction de  $x$  pour une valeur fixe de  $\eta$  et pour des valeurs différentes de  $\bar{u}$  et on trouve, d'après cette figure, que  $\bar{C}_1/\bar{w}$  dépend sensiblement de  $\bar{u}$ .

La figure (6) montre  $\bar{C}_1/\bar{w}$  en fonction de  $x$  avec les mêmes conditions qu'en figure (5) mais pour une valeur différente de  $\mu_0$ .

Les remarques les plus importantes tirées de ces figures sont :

- i)  $\bar{C}_1 > 0$  pour  $\mu_0 \sim 1$  tandis que pour  $\mu_0 \ll 1$ ,  $\bar{C}_1 < 0$
- ii)  $\bar{C}_2$  est toujours positif et dépend faiblement de  $\mu_0$ .

Nous passons à l'étude de la déformation de la FDM électronique  $F_e(\vec{w}, t)$  que l'on décompose en deux parties : une partie isotrope, indépendante de  $\mu = \hat{u} \cdot \hat{w}$ , et une autre anisotrope qui en dépend. En se rappelant que le terme dominant en  $\bar{C}_1$  est



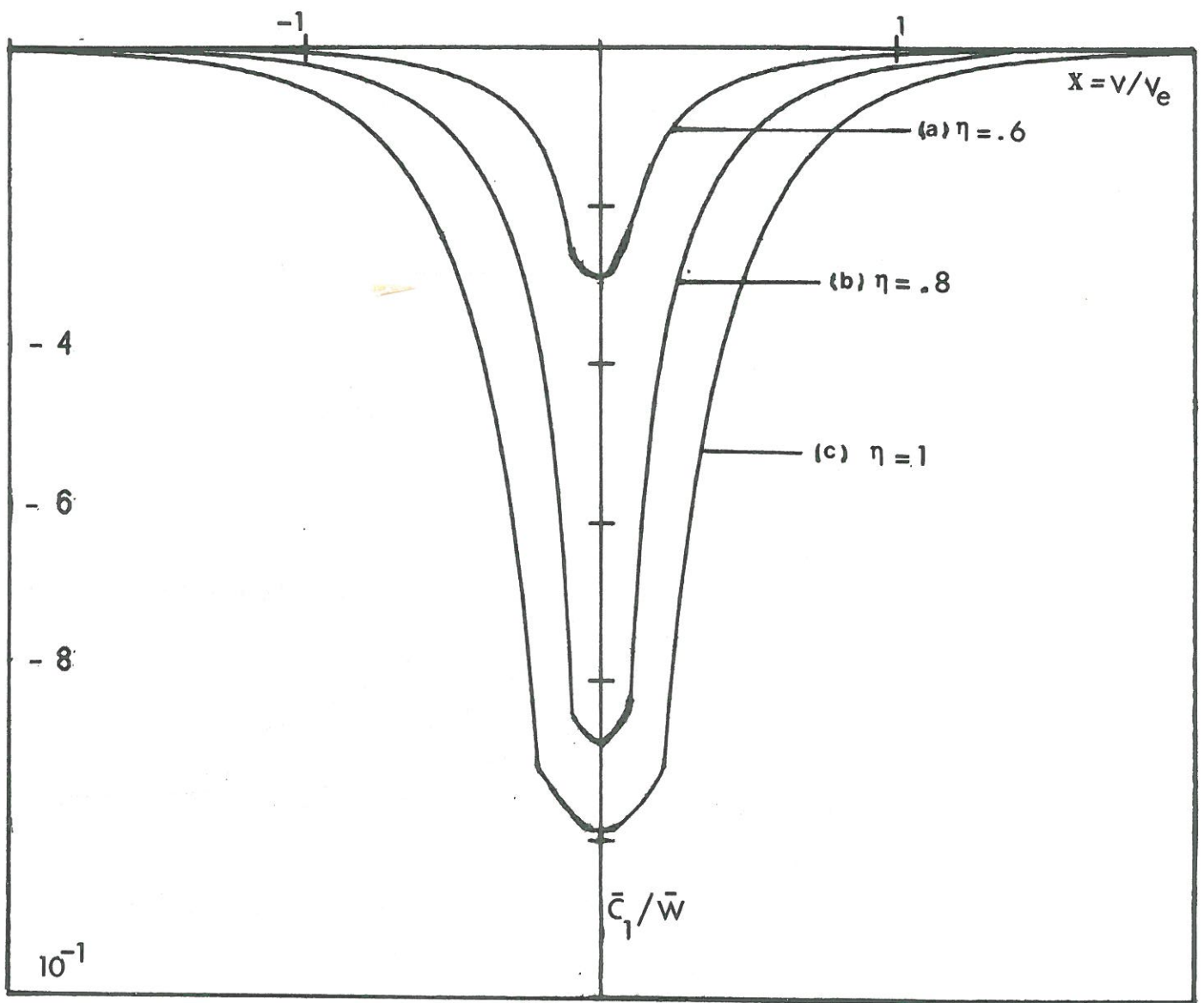


FIG-[ 3 ]  $-\bar{C}_1/\bar{W}$  en fonction de  $x$ ,  $U/V_e = 1$  et  $M/m = 1836$  et  $\mu_0 = 0$

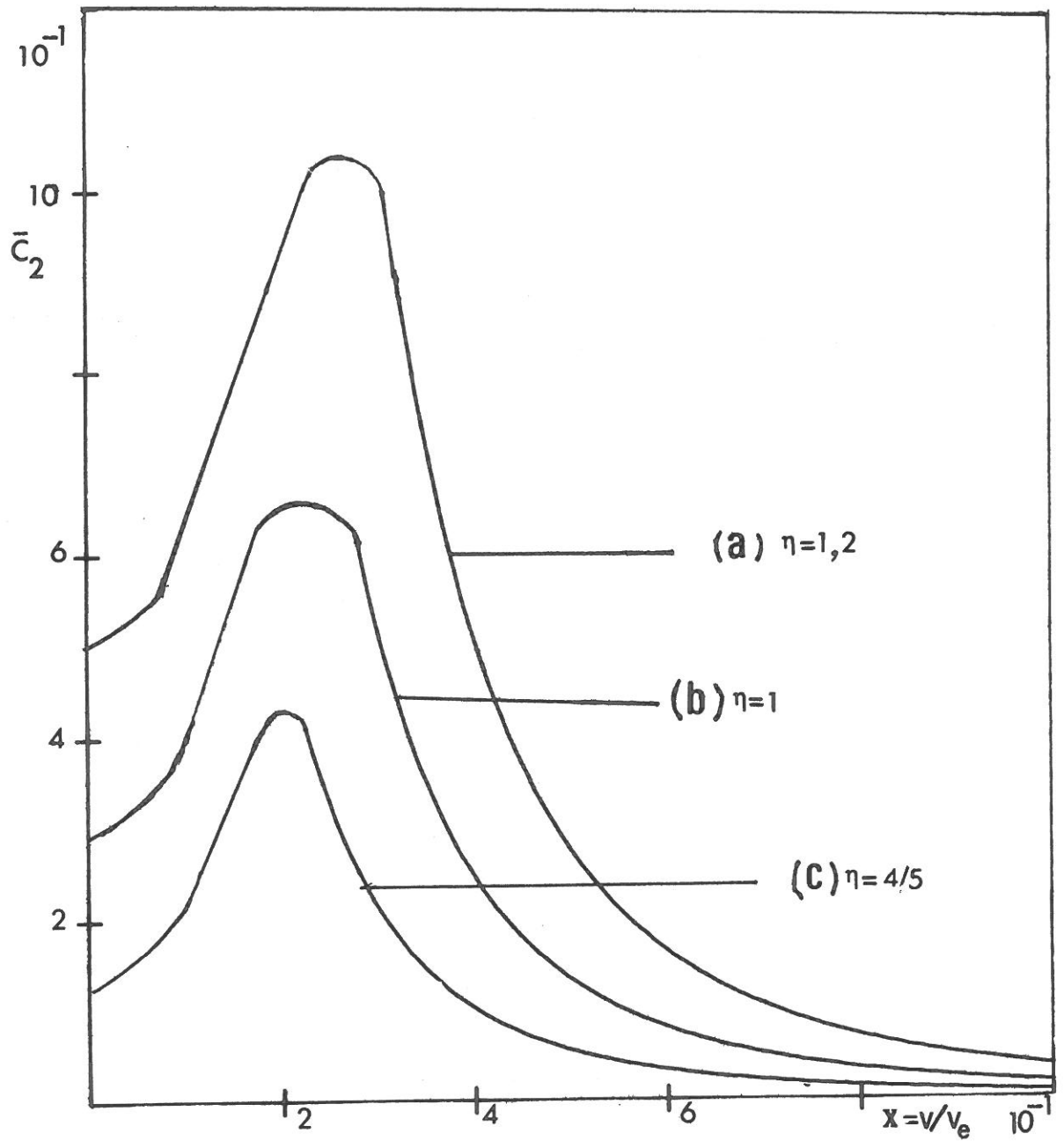


FIG.[4]- $\bar{C}_2$  en fonction de  $x$ ,  $U/V_e=1/5$ ,  $u_0=1/5$  et  
 $M/m=1836$



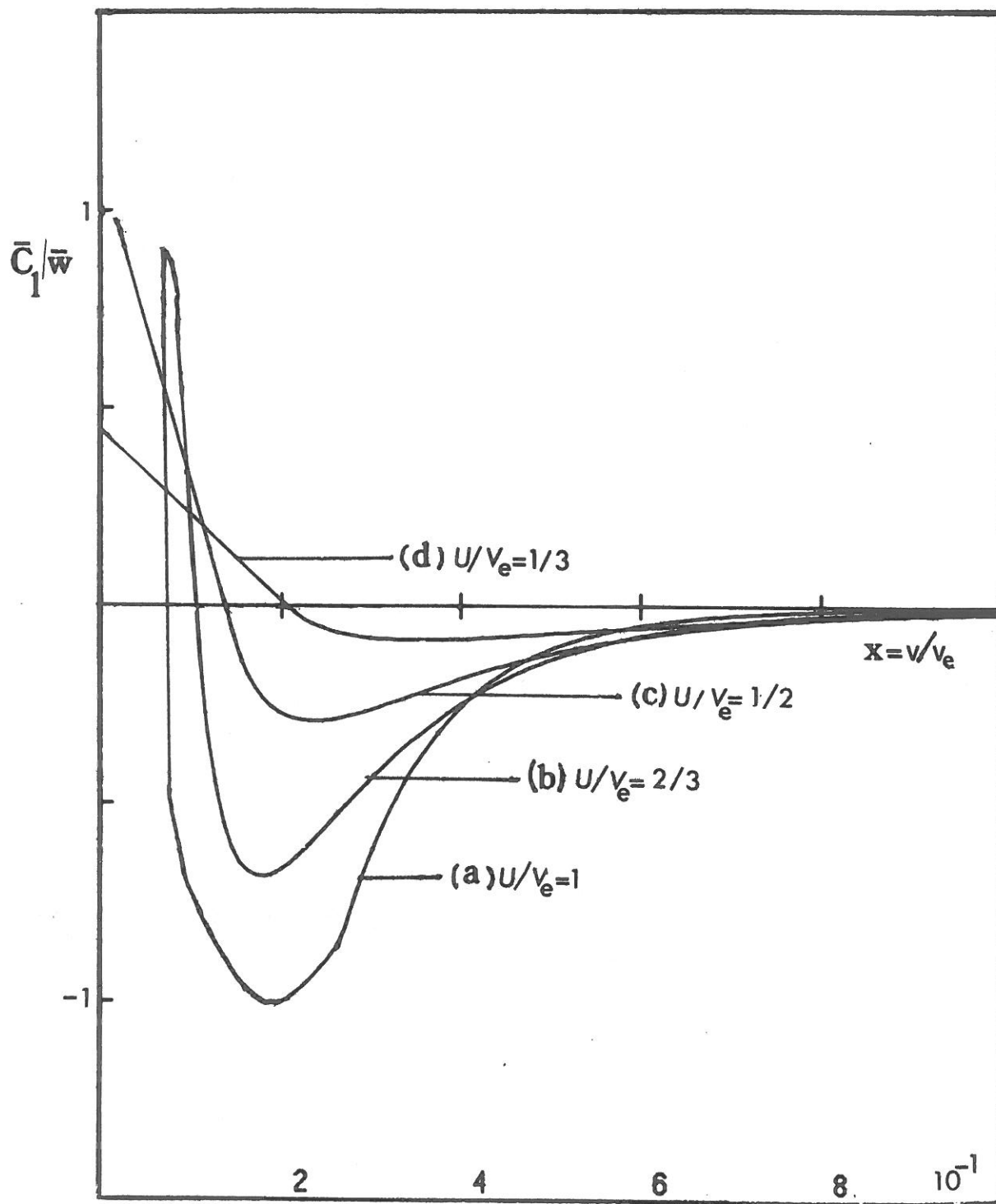


FIG-[ 5 ]- $\bar{C}_1/\bar{W}$  en fonction de  $x$  .  $\mu_0=1/20$ ,  $M/m=1836$  et  $\eta=.8$

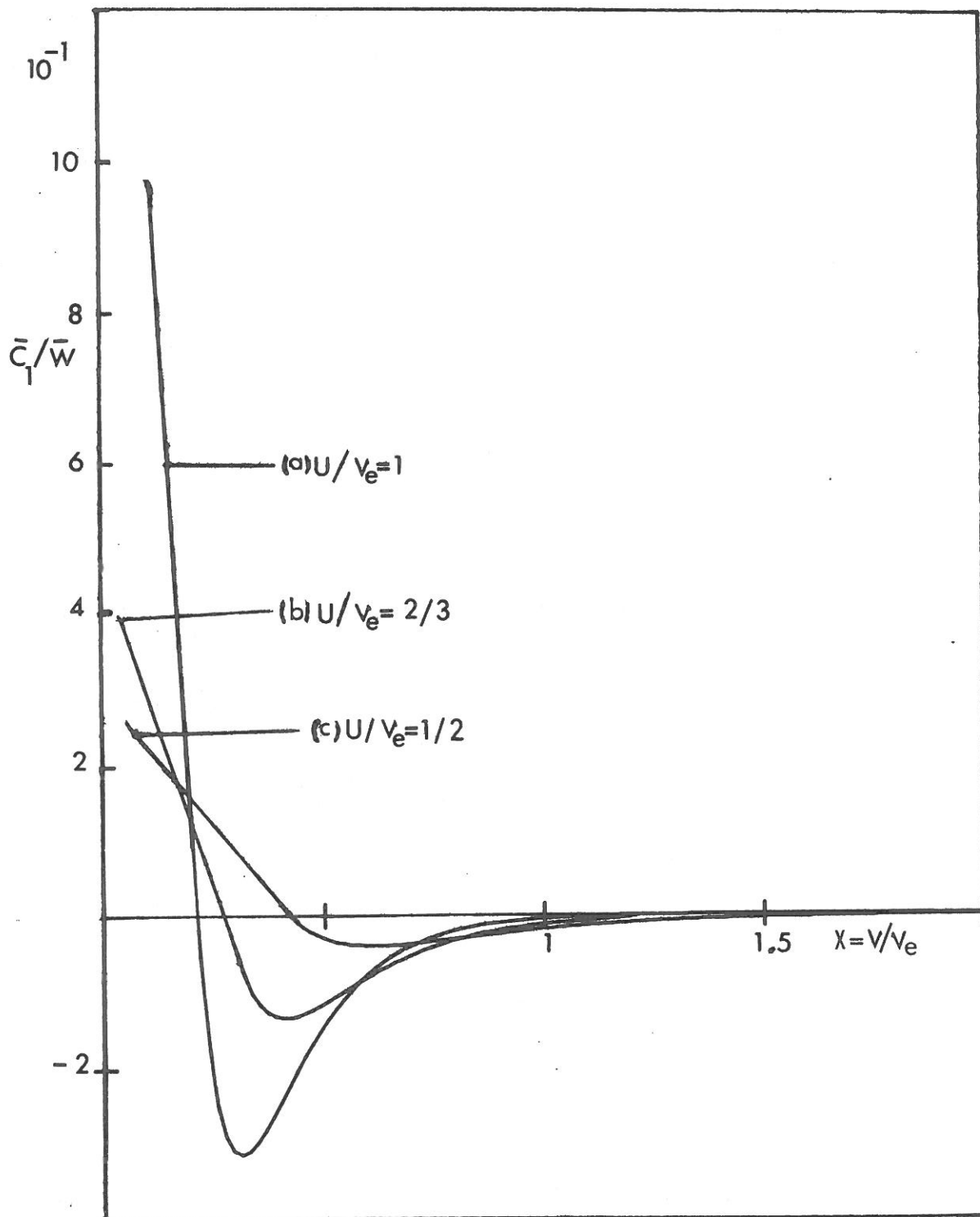


FIG.[6]- $\bar{C}_1/\bar{W}$  en fonction de  $\chi$ ,  $M/m=1836$ ,  $\mu_0=1/5$  et  $\eta=3/5$

$\frac{\bar{u}\eta}{w^3} \mu$ , on peut développer la FDM électronique, donnée par (III.14), jusqu'au premier ordre en  $\mu$  dans le domaine  $\bar{w} > (\bar{u}\eta)^{1/4}$  (cette condition découle de l'inégalité  $\frac{\bar{c}_1}{\bar{w}} < 1$ ) et elle s'écrit sous la forme de Spitzer-Härm [48] :

$$F_e(\vec{w}, \eta) = F_{iso}(w, \eta) \left[ 1 - \frac{2\bar{u}\eta}{(\bar{w}^2 + \bar{u}^2)^{3/2} \mu} \right], \quad \bar{w} > (\bar{u}\eta)^{1/4} \quad (\text{III.27})$$

Nous avons tracé la fonction  $F_{iso}(w, \eta)$  sur la figure (7) pour des valeurs différentes de  $\eta$  et la déformation de cette fonction telle que sur la figure (7) s'explique par : pour  $x \sim 0$ , on a  $\bar{c}_1 \neq 0$  d'où la fonction  $F_{iso}$  devient inférieure à sa valeur initiale tandis que pour  $x \gtrsim 1$  on a  $\bar{c}_1 < 0$  (puisque  $\mu = 0$  implique que  $\mu_0 \sim \bar{u} \ll 1$ ) et elle devient supérieure à cette valeur.

L'expression (III.27) est utile dans les calculs des moments de la FDM que nous allons effectuer.

#### i. Calcul du premier moment

Le premier moment qui donne la vitesse moyenne des électrons est défini par :

$$\begin{aligned} \langle \vec{V}(t) \rangle &\equiv \vec{u}(t) = \frac{1}{n_0} \int d\vec{v} \vec{v} F_e(\vec{v}, t) \\ &= \vec{u} + \frac{1}{n_0} \int d\vec{w} \vec{w} F_e(\vec{w}, t) \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

En substituant l'expression de  $F_e$  donnée par (III.27), (III.28) devient :

$$\vec{u}(\eta) = \vec{u} \left[ 1 - \frac{4\pi\eta}{3n_0} \int_{(\bar{u}\eta)^{1/4}}^{\infty} \frac{\bar{w}^3 d\bar{w}}{(\bar{w}^2 + \bar{u}^2)^{3/2}} F_{iso}(\bar{w}, \eta) \right]. \quad (\text{III.29})$$

Pour calculer l'intégrale, on développe la fonction  $F_{iso}$  autour de la fonction de distribution initiale (cf. (III.1)) et on obtient :

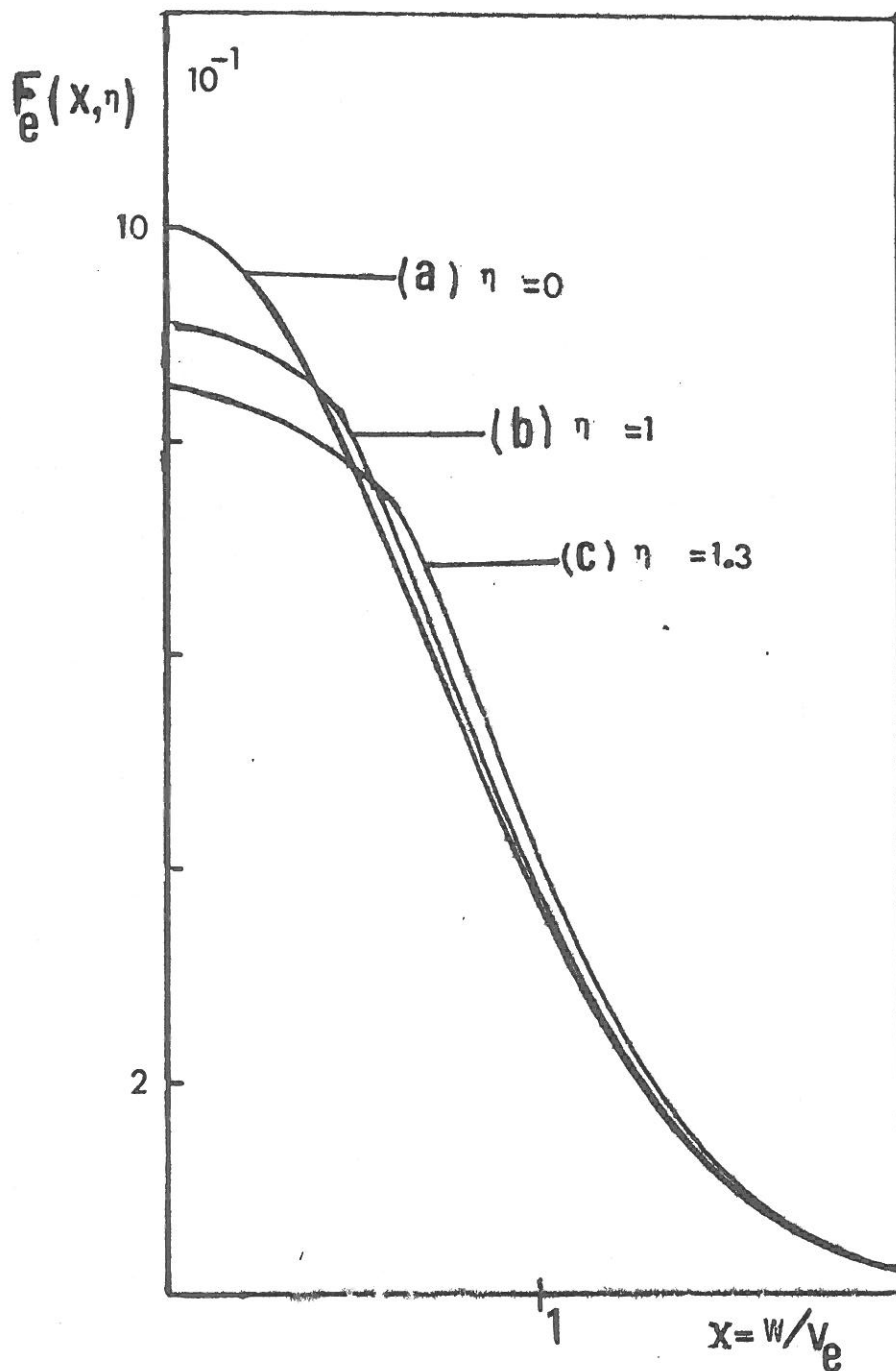


FIG. [ 7 ] -  $F_e$  en fonction de  $X, U/v_e = 1/5$   
 et  $M/m = 1836$

$$\vec{u}(\eta) = \vec{u} \left[ 1 - \frac{4\eta}{3\sqrt{\pi}} + o(\bar{u}^2\eta) \right] \quad (\text{III.30})$$

La décroissance de la vitesse de dérive électronique, d'après (III.30), montre que la FDM s'isotropise au cours du temps et elle devient isotrope lorsque  $\vec{u}(\eta) \rightarrow 0$ , ou lorsque  $\eta \approx \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$ . Ce processus d'isotropisation a lieu avec un taux donné par :

$$\frac{1}{u} \left| \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right| = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{d\eta(t)}{dt} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} v_{\text{eff}}(t) \quad , \quad (\text{III.31})$$

où  $v_{\text{eff}} = \pi v_e \int_0^{\infty} dk k^3 a_k(t)$  coïncide avec la fréquence effective définie par Koch et al. [49].

#### ii. Calcul du second moment

L'énergie cinétique électronique par rapport à la moyenne est définie par :

$$K_e(t) = \frac{m}{2} \int d\vec{v} (\vec{v} - \vec{u}(t))^2 F_e(\vec{v}, t) \quad , \quad (\text{III.32})$$

et à l'aide de (III.30), l'expression (III.32) devient :

$$K_e(\eta) = \frac{m}{2} \int d\vec{w} \left( \vec{w} + \frac{4\eta}{3\sqrt{\pi}} \vec{u} \right)^2 F_e(\vec{w}, \eta) \quad (\text{III.32.a})$$

L'intégrale dans (III.32.a) peut être effectuée de la même façon qu'auparavant et on obtient :

$$K_e(\eta) = K_e \left[ 1 + \frac{4(m/M)}{3\sqrt{\pi}} \eta + o(\bar{u}\eta)^2 \right] \quad , \quad (\text{III.33})$$

$$K_e = \frac{3}{4} m n_0 v_e^2$$

On remarque que l'énergie cinétique croît avec  $\eta$ , avec un taux de croissance donné par :

$$\frac{1}{T_e} \frac{dT_e(t)}{dt} = \frac{1}{K_e} \frac{dK_e(t)}{dt} = \frac{4(m/M)}{3\sqrt{\pi}} v_{\text{eff}}(t) \quad (\text{III.34})$$

D'après (III.31) et (III.34), on en déduit que le processus d'isotropisation de la FDM est beaucoup plus rapide que celui du chauffage des électrons. Leur rapport de grandeur est de l'ordre de  $\frac{M}{m}$ .

### III.e. CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'évolution dynamique de la FDM électronique simultanément avec la relaxation de l'instabilité acoustique ionique et nous avons montré que :

1. La modification de la FDM aura lieu lorsque le rapport des énergies  $\alpha$  satisfait à  $\alpha \gtrsim (\bar{u}^4) \sqrt{\frac{m}{2\pi M}}$ . Ce niveau seuil de l'énergie, étant très petit, sera atteint rapidement et il devient évident que la déformation de la FDM n'est pas un processus très lent comme il a été considéré dans la littérature.
2. La modification de la FDM électronique, qui est induite par la contre-réaction des ondes, a lieu de telle façon que la vitesse de dérive électronique décroît. Ce qui ralentit la croissance de l'énergie totale des ondes, en même temps que la FDM s'isotropise.
3. L'énergie des ondes, après avoir atteint un niveau maximum, décroît et tend asymptotiquement vers zéro pour une valeur de  $\eta$ , appelée  $\eta_\infty$ , donnée par  $\eta_\infty \approx \bar{u}^{1/3}$ . Compte tenu de ce résultat, on peut justifier le développement en cumulant tronqué, sur lequel notre étude est basée. On a, en effet pour une valeur maximum de  $\eta$  :  $\left| \frac{C1}{w} \right|_{w \sim v_e} < \bar{u}^{4/3} \ll 1$ , ce qui montre la validité de notre étude.

## C H A P I T R E    I V

### EFFET DE L'ÉVOLUTION DE LA FDM IONIQUE

#### IV. a. INTRODUCTION

De nombreuses études, numériques (Dum et al. [36], Appert et Vaclavik [50], et Ishihara et Hirose [51]) et expérimentales (Bengtson et al., Wharton et al., et Piekaar [52]), portées sur l'instabilité acoustique ionique générée par un courant de dérive ont montré l'existence des ions énergiques (produits dans la queue de la FDM) et le rôle important joué par ceux-ci dans le processus de saturation de l'instabilité. Cette hypothèse avait été avancée par Vekstein et al. [53] dans une étude antérieure où cependant la dynamique de la production des ions énergiques n'a pas été décrite. Ces auteurs ont simplement supposé la formation d'une queue ionique et ont déterminé sa distribution asymptotique en imposant la condition de stabilité marginale du système.

D'autres études analytiques portées sur le même problème ont été effectuées (Caponi et Davidson [54], Hatori et Sugihara [55], Manheimer et Flynn [56], Choi et Horton [57], et Tikhiet [58]) mais dans les travaux [54-56], l'évolution de la FDM n'a pas été déterminée de façon autocohérente avec l'évolution de l'instabilité. D'autre part Choi et Horton, sans étudier l'évolution dynamique de la formation de la queue, ont proposé un modèle pour celle-ci sous la forme d'une fonction maxwellienne avec une densité  $n_{iq}$  (dépendante du temps) et une température  $T_{iq}$  de l'ordre de  $\frac{T_e}{5} - \frac{T_e}{3}$ . La densité de la queue est ensuite déterminée par la condition de stabilité marginale. La densité de ces ions reste cependant très inférieure à celle observée dans les expériences numériques récentes [50,51].

Dans le but d'améliorer les résultats obtenus précédemment, nous nous proposons, grâce à la méthode développée dans le chapitre II, de déterminer l'évolution de la FDM ionique en cohérence avec l'évolution de l'instabilité. Ce que nous étudions dans ce chapitre, où l'étude sera d'abord menée dans le cadre de la théorie QL, ensuite l'effet de l'élargissement de résonance sera pris en compte.

D'après (II.32), la FDM ionique est donnée par :

$$F_i(\vec{v}, t) = \int_0^\infty dv_0 F_i(v_0, 0) \frac{e^{-\frac{(v-v_0+C_1)^2}{2C_2}}}{\sqrt{2\pi C_2}}, \quad (\text{IV.1})$$

où rappelons que  $C_1$  et  $C_2$  sont respectivement les premier et second cumulants d'une quantité stochastique  $\lambda(t)$  :

$$C_1 = \langle \lambda(t) \rangle, \quad C_2 = \langle \lambda^2(t) \rangle, \quad (\text{IV.1.a})$$

et la fonction  $\lambda(t)$  désigne l'incrément du module de vitesse

$$\lambda(t) = |\vec{v}(t)| - |\vec{v}|.$$

#### IV. b. CALCUL DES CUMULANTS

D'après (IV.1.a), pour calculer les cumulants, on doit calculer les valeurs moyenne et quadratique moyenne de  $\lambda(t)$ . Comme au chapitre précédent relatif aux électrons, ce calcul peut se faire en posant  $\vec{v}(t) = \vec{v} + \Delta\vec{v}$ , ce qui fait intervenir les cumulants de  $\Delta\vec{v}$ , lesquels selon les formules (III.3) peuvent s'exprimer en termes du tenseur de diffusion  $\vec{\vec{D}}$ . Celui-ci s'écrit dans le cas des ions

$$\vec{\vec{D}} = \frac{e^2}{M^2} \sum_{\vec{k}} \vec{k} \vec{k} I_{\vec{k}}(t) \frac{\gamma_{\vec{k}}}{(\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v})^2 + \gamma_{\vec{k}}^2}. \quad (\text{IV.2})$$



Nous effectuons ainsi le calcul explicite du tenseur de diffusion successivement dans les cas

- du spectre isotrope, remplissant tout l'espace  $\vec{k}$
- d'un spectre anisotrope remplissant le demi-espace  $\vec{k}$ .

Le calcul de  $\overleftrightarrow{D}$ , qui est similaire à celui relatif aux électrons, ne sera pas reproduit ici. Nous notons cependant qu'à la différence avec les électrons, lesquels sont essentiellement résonnants, les ions peuvent être résonnants ou non selon leur vitesse. Dans le domaine résonnant délimité par  $v > C_s/\sqrt{2}$ , on emploiera l'approximation  $\left[ \gamma_{\vec{k}} / \left( (\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v})^2 + \gamma_{\vec{k}}^2 \right) \right] = \pi \delta(\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v})$  et dans le domaine non-résonnant où  $v < C_s/\sqrt{2}$ , cette fonction sera prise comme  $\frac{\gamma_{\vec{k}}}{(\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v})^2}$ . Compte tenu de ces remarques, les résultats peuvent se résumer ainsi :

### II.b.1. CAS DU SPECTRE ISOTROPE

- Dans le domaine résonnant des vitesses telles que  $v > C_s/\sqrt{2}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \rangle &= \frac{8\pi C_s^3}{\bar{v}} \int_0^t dt' \int_{K_*}^{\infty} dk k^3 \alpha_k(t'), \\
 \langle \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \rangle &= - \frac{4\pi C_s^3}{\bar{v}} \int_0^t dt' \left( 1 - v \frac{\partial}{\partial v} \right) \int_{K_*}^{\infty} dk k^3 \alpha_k(t') \\
 \text{et} \quad \langle (\vec{v} \cdot \Delta \vec{v})^2 \rangle &= \frac{8\pi C_s^5}{\bar{v}} \int_0^t dt' \int_{K_*}^{\infty} \frac{dk k^3}{(1+k^2 \lambda_D^2)} \alpha_k(t'), \\
 K_* &= \begin{cases} \lambda_D^{-1} \sqrt{\frac{1}{\bar{v}^2} - 1}, & \bar{v} < 1 \\ 0 & \bar{v} \geq 1, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{IV.3}$$

$$\text{avec } \bar{v} = v/C_s \text{ et } \alpha_k(t) = \frac{e^2 I_k(t)}{8\pi^2 T_e^2}$$

En substituant les résultats donnés par (IV.3) dans les expressions de  $C_1$  et  $C_2$ , données par (III.3), on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_2 &= C_2/C_s^2 = \frac{8\pi C_s}{\bar{v}^3} \int_0^t dt' \int_{k_*}^{\infty} \frac{dk k^3}{(1+k^2 \lambda_D^2)} \alpha_k(t') \\ \bar{C}_1 &= -\bar{C}_2/2\bar{v} \end{aligned} \right\} \text{(IV.4)}$$

où on a délaissé dans le calcul de  $\langle \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \rangle$  la contribution du terme  $v \frac{\partial}{\partial v}$  qui est de l'ordre de  $k_* \lambda_D \Big|_{v=C_s}$  par rapport au terme retenu.

- Dans le domaine non-résonnant,  $v < C_s/\sqrt{2}$ , on a :

$$\left. \begin{aligned} \langle \Delta \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \rangle &= \frac{4C_s^2}{\bar{v}^2} \int_0^{\infty} dk k^2 \alpha_k(t) \cdot \frac{1}{(\lambda^2 - 1)} \\ \langle \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \rangle &= \frac{4C_s^2}{\bar{v}^2} \int_0^{\infty} dk k^2 \alpha_k(t) \cdot \frac{1}{(\lambda^2 - 1)^2} \\ \langle (\vec{v} \cdot \Delta \vec{v})^2 \rangle &= 4C_s^4 \int_0^{\infty} dk k^2 \alpha_k(t) \left[ \frac{2\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - 1} + \lambda \text{Log} \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) \right], \\ \lambda &= \omega_k/kv \end{aligned} \right\} \text{(IV.5)}$$

On remarque que pour  $v = 0$  (ou  $\lambda \rightarrow \infty$ ) on a  $\langle \Delta \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \rangle = 4\alpha$  et  $\langle \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \rangle, \langle (\vec{v} \cdot \Delta \vec{v})^2 \rangle = 0$ . En substituant (IV.5) dans (III.3), on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_2 &= \frac{4}{\bar{v}^2} \int_0^{\infty} dk k^2 \alpha_k(t) \left[ \frac{2\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - 1} + \lambda \text{Log} \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) \right] \\ \bar{C}_1 &= \frac{2}{\bar{v}^3} \int_0^{\infty} dk k^2 \alpha_k(t) \left[ \frac{2}{(\lambda^2 - 1)^2} - 2 - \lambda \text{Log} \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) \right] \end{aligned} \right\} \text{(IV.6)}$$

IV.b.2. CAS D'UN SPECTRE ANISOTROPE

L'anisotropie du spectre est simulée par un spectre d'énergie isotrope dans le demi-espace  $\hat{k} \cdot \hat{u} > 0$ . Les calculs des différents cumulants de  $\Delta \vec{v}$  sont fastidieux et sont présentés dans l'appendice C où nous montrons que les expressions analytiques des quantités en question diffèrent selon la valeur de  $v_{\perp}$ , composante perpendiculaire de la vitesse se référant à la vitesse de dérive  $\vec{u}$ . Pour des raisons de clarté, nous présentons seulement, dans le cas résonnant, les résultats relatifs à la situation  $v_{\perp} < C_s/\sqrt{2}$  car la situation inverse ne représente qu'une faible portion des ions de l'ordre  $e^{-T_e/4T_i}$ . En désignant dans le cas présent les fonctions à calculer par  $C_1^*$  et  $C_2^*$ , les résultats peuvent se résumer ainsi :

- Domaine résonnant ( $v > C_s/\sqrt{2}$ ), on a :

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_2^* &= \frac{8\pi C_s}{\bar{v}^3} \int_0^t dt' \int_0^{K_0} dk k^3 \alpha_k(t') \\ &\quad \frac{1}{(1+k^2 \lambda_D^2)} \\ \bar{C}_1^* &= -\bar{C}_2^*/2\bar{v}, \quad K_0 = \lambda_D^{-1} \sqrt{\frac{1}{\bar{v}_{\perp}^2} - 1}, \quad \bar{v}_{\perp} = v_{\perp}/C_s, \\ \bar{v}_{\perp} &< 1/\sqrt{2}. \end{aligned} \right\} \text{(IV.7)}$$

- Domaine non-résonnant ( $v < C_s/\sqrt{2}$ ), on a :

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_2^* &= \frac{4}{\bar{v}^2} \int_0^{\infty} dk k^2 \alpha_k(t) \left\{ 1 - \lambda \left[ \text{Log} \left( \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \right) + \text{Log} \left( \frac{A_+ B_-}{A_- B_+} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1} \left( 1 + \frac{v_{\parallel}/v}{\sqrt{\lambda^2 - v_{\perp}^2/v^2}} \right) \right\} \\ \bar{C}_1^* &= \frac{2}{\bar{v}^3} \int_0^{\infty} \frac{dk k^2 \alpha_k(t)}{(\lambda^2-1)} \left\{ \frac{\lambda^2+1}{(\lambda^2-1)} \left( 1 + \frac{v_{\parallel}/v}{(\lambda^2 - v_{\perp}^2/v^2)^{1/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^2 v_{\parallel}/v}{(\lambda^2 - v_{\perp}^2/v^2)^{3/2}} \right\} - \bar{C}_2^*/2\bar{v}; \end{aligned} \right\} \text{(IV.8)}$$

$$A_{\mp} = \sqrt{\lambda^2 - v_{\perp}^2/v^2} \mp \frac{\lambda v_{\parallel}}{v}, \quad B_{\mp} = (1 \mp v_{\parallel}/v).$$

Nous discutons, dans ce qui suit les modifications des cumulants en tenant compte de l'anisotropie du spectre. Pour cela, nous faisons la comparaison entre  $(C_1^*, C_2^*)$  et  $(C_1, C_2)$  dans les domaines résonnant et non-résonnant :

- Dans le domaine non-résonnant, on réécrit  $\bar{C}_1$ ,  $\bar{C}_2$ ,  $\bar{C}_1^*$  et  $\bar{C}_2^*$  sous une forme plus simple, en faisant un développement en terme de  $\frac{1}{\lambda} (\approx \bar{v})$  dans les formules (IV.6) et (IV.8) et on a :

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_2 &\approx 2\alpha \left( 1 + \frac{27}{10} \bar{v}^2 \right) \\ \bar{C}_1 &\approx \frac{11\alpha}{\bar{v}} \left( 1 + \frac{144}{55} \bar{v}^2 \right) \end{aligned} \right\} \text{(IV.6')}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_2^* &\approx 2\alpha \left( 1 + \frac{15}{4} \left( \frac{3}{2} \right)^{1/2} \mu \bar{v} \right) \\ \bar{C}_1^* &\approx \frac{2\alpha}{\bar{v}} \left( 1 + \frac{11}{8} \left( \frac{3}{2} \right)^{1/2} \mu \bar{v} \right), \quad \bar{v} > 0, \mu = \frac{v_{\parallel}}{v} \end{aligned} \right\} \text{(IV.8')}$$

Pour aboutir aux résultats (IV.6') et (IV.8'), on se sert du fait que le spectre est piqué au  $k = \lambda_D^{-1}/\sqrt{2}$ . On remarque que les corrections d'anisotropie prises en compte dans  $\bar{C}_1^*$  et  $\bar{C}_2^*$  sont essentielles car elles permettent de décrire l'échange de la quantité de mouvement des particules non-résonnantes avec les ondes.

- Dans le domaine résonnant, on fait la comparaison entre (IV.4) et (IV.7) et pour cela, on examine les cas  $v_{\perp} \sim 0$  ( $v_{\parallel} \sim v$ ) et  $v_{\perp} \sim C_s/\sqrt{2}$ . Dans le premier cas, on trouve que, dans (IV.7)  $K_0 \rightarrow \infty$  tandis que, dans (IV.4),  $K_* \neq 0$  et on en déduit que  $C_1^* > C_1$  et  $C_2^* > C_2$ . Cela s'explique par le fait que l'effet de la résonance entre les ions et les modes, ayant un nombre d'onde  $k < K_*$ , n'est pas considérée par les formules (IV.4) contrairement aux résultats donnés par (IV.7). La même conclusion peut être tirée aussi dans le deuxième cas.

En conclusion, dans le cas des ions, il est fondamental de tenir compte du caractère anisotrope du spectre d'énergie dans le calcul des cumulants de la vitesse et par conséquent pour déterminer la déformation de la FDM ionique.

Dans ce qui suit nous employons donc  $\bar{C}_1^*$  et  $\bar{C}_2^*$  et que nous réécrivons sous une forme plus commode :

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_2^* &= \frac{8\tilde{\eta}(v_{\perp}, t)}{v^3} \\ \bar{C}_1^* &= -\frac{4\tilde{\eta}(v_{\perp}, t)}{v^4} \end{aligned} \right\} \text{(IV.9)}$$

$$\tilde{\eta}(v_{\perp}, t) = \pi C_s \int_0^t dt' \int_0^{K_0} dk k^3 \frac{\alpha_k(t')}{(1+k^2 \lambda_D^2)}$$

où la dépendance en  $v_{\perp}$  est contenue dans la borne supérieure  $K_0 = \lambda_D^{-1} \sqrt{\frac{1}{v_{\perp}^2} - 1}$ .

On remarque que i)  $\tilde{\eta}(v_{\perp}=0) = \frac{C_s}{v_e} \eta$ , où  $\eta$  est défini au chapitre précédent ii) pour décrire l'évolution de la FDM ionique, on doit déterminer  $\bar{C}_1^*$  et  $\bar{C}_2^*$  qui implique la détermination du comportement de la fonction  $\tilde{\eta}$  (ou l'évolution dynamique de l'instabilité).

Nous procédons à la description dynamique de l'instabilité par l'établissement de la condition pour que la modification de la FDM ionique devienne significative. En reportant à l'expression de  $F_i(v_{\parallel}, v_{\perp}, t)$  en terme de  $C_1^*$  et  $C_2^*$ , on voit que la condition requise peut s'obtenir en comparant  $2C_2^*$  ( $v \sim C_s$ ) avec la vitesse thermique ionique  $v_i$ . Lorsque  $2C_2^* \ll v_i^2$ , qui implique  $\tilde{\eta} \ll T_i/2T_e$ , on peut approcher  $F_i(v_{\parallel}, v_{\perp}, t)$  par  $F_i(v, 0)$ . Dès que  $\tilde{\eta} \gtrsim T_i/2T_e$  la modification de la FDM ionique devient importante. On peut également établir une condition sur le rapport des énergies. En effet, on a  $\tilde{\eta} \sim \frac{C_s}{v_e} \eta$  et  $\eta$ , comme ordre de grandeur (cf. chapitre III), est donné par  $\eta \sim \alpha \sqrt{\pi} / \bar{u} \sqrt{m/M}$ , la condition  $\tilde{\eta} \gtrsim T_i/2T_e$  est donc équivalente à  $\alpha \gtrsim \bar{u} \sqrt{\pi} \frac{T_i}{2T_e} = \alpha_0$ . On peut

donc postuler que : dès que l'énergie turbulente atteint un niveau donné " $\alpha_0$ ", la modification de la FDM ionique devient significative et joue un rôle important dans le processus de stabilisation de l'instabilité acoustique ionique, ce que nous étudions dans le paragraphe suivant.

#### IV.c. EVOLUTION DYNAMIQUE DE L'INSTABILITE

Comme au chapitre précédent, nous commençons par l'équation cinétique des ondes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} I_{\vec{k}}(t) &= 2\gamma_{\vec{k}}^{QL}(t) I_{\vec{k}}(t) \\ \gamma_{\vec{k}}^{QL}(t) &= \sum_s \gamma_{\vec{k}s}^{QL}(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.10})$$

Ici on se place dans l'hypothèse inverse du cas du chapitre précédent à savoir que les électrons jouent un rôle déstabilisant avec un taux de croissance constant donné par

$$\gamma_{\vec{k}e}^{QL}(t) \approx \gamma_{\vec{k}e}^L = -\sqrt{\frac{\pi m}{8M}} \frac{\Omega_{\vec{k}}}{(1+k^2 \lambda_D^2)^{3/2}}, \text{ alors que la stabilisation}$$

est assurée par les ions qui fournissent un taux d'amortissement donné par :

$$\gamma_{\vec{k}i}^{QL}(t) = \frac{\pi \omega_{\vec{k}}^3}{n_0} \frac{\partial}{\partial \omega_{\vec{k}}} \int d\vec{v} F_i(\vec{v}, t) \delta(\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v}). \quad (\text{IV.11})$$

Dans cette formule, la fonction  $F_i$  sera approximée par zéro pour  $v_{\perp} > C_s/\sqrt{2}$  et dans le domaine complémentaire, on utilise les résultats donnés par (IV.8') et (IV.9) pour les cumulants qui donnent, en vertu de (IV.1) :

$$F_i(\vec{v}, t) = \frac{e^{-K(\vec{v}, t)}}{2\sqrt{\pi^3} C_s v_i^2 \sqrt{2g}} \left[ 1 + \operatorname{erf} \sqrt{\frac{K(\vec{v}, t) \bar{v}^3}{16\bar{\eta}}} \right], \quad (\text{IV.12})$$

où  $K(\vec{v}, t) = \frac{1}{2g}(\bar{v} - 4\tilde{\eta}/\bar{v}^4)^2$ ,  $g = T_i/T_e + 8\tilde{\eta}/\bar{v}^3$ ,  $\bar{v} = v/C_s$  et  $\tilde{\eta}$  est donné par (IV.9).

On intègre maintenant (IV.11) sur  $\vec{v}$  en opérant dans un système des coordonnées cylindriques dans lequel le vecteur  $\vec{u}$  est choisi dirigé le long de l'axe  $\vec{z}$  et puisque la fonction  $F_i$  est indépendante de l'angle, on obtient :

$$\gamma_{ki}^{QL}(t) = \frac{2\pi^2 \omega_k^3}{n_0 k_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial \omega_k} \int_0^{C_s/\sqrt{2}} v_{\perp} dv_{\perp} \int_{\frac{-k_{\perp} v_{\perp}}{k_{\parallel}}}^{\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{k_{\parallel}}} dx \frac{F_i(x + \omega_k/k_{\parallel}, v_{\perp}, t)}{\sqrt{\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{k_{\parallel}}\right)^2 - x^2}} \quad (IV.13)$$

Comme  $|x| < \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{k_{\parallel}} \ll \omega_k/k_{\parallel}$ , on peut faire un développement en série de  $F_i$  et on obtient :

$$\gamma_{ki}^{QL}(t) = \frac{2C_s^2 \omega_k^3 \pi^2}{n_0 k_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial \omega_k} \int_0^{1/\sqrt{2}} \bar{v}_{\perp} d\bar{v}_{\perp} F_i\left(\frac{\omega_k}{k_{\parallel} C_s}, \bar{v}_{\perp}, t\right) \left[1 + O\left(\frac{k_{\perp}^2 v_{\perp}^2}{\omega_k^2}\right)\right] \quad (IV.14)$$

On remarque que la fonction sous l'intégrale sur  $\bar{v}_{\perp}$  se comporte comme  $\exp - \frac{(\bar{v} - 4\tilde{\eta}/\bar{v}^4)^2}{2(T_i/T_e + 8\tilde{\eta}/\bar{v}^3)}$ , où  $T_e/T_i \gg 1$  (et  $\tilde{\eta} \ll 1$ ), ce qui permet de calculer l'intégrale dans (IV.14) en utilisant la méthode d'intégration asymptotique de Laplace (voir [59]) et le résultat de l'intégrale donne :

$$\gamma_{ki}^{QL}(\eta^*) = - \frac{\pi \omega_k^3}{k_{\parallel}^2 C_s^2} (T_e/2T_i) a \frac{\exp - K(a, \eta^*)}{\sqrt{2(T_i/T_e + 8\eta^*/a^3)}} \times \left[1 + \operatorname{erf} \sqrt{\frac{a^3 K(a, \eta^*)}{16\eta^*}}\right] \left(1 + O(T_i/T_e)\right), \quad (IV.15)$$

avec  $K$  donné par (IV.12) et  $K(a, \eta^*) \equiv K(v_{\parallel}=a, v_{\perp}=0, \eta^*)$  et  $\eta^* = \tilde{\eta}(v_{\perp}=0)$ .

En reportant les résultats pour  $\gamma_{ke}$  et  $\gamma_{ki}^{QL}$  dans l'équation cinétique d'onde et en l'intégrant sur tout l'espace  $\vec{k}$ , on obtient

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = S(\eta^*)\alpha, \quad (IV.16)$$

avec

$$S(\eta^*) = \left\{ A_0 - \frac{A_1 e^{-K(\bar{a}, \eta^*)}}{\sqrt{2(T_i/T_e + 8\eta^*/\bar{a}^3)}} \left[ 1 + \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\bar{a}^3 K(\bar{a}, \eta^*)}{16\eta^*}} \right] \right\},$$

$$A_0 = \sqrt{\frac{m}{3\pi M}} \left( \frac{u}{2C_s} - \sqrt{\frac{2}{3}} \right), \quad A_1 = \frac{\sqrt{2}}{3\bar{\mu}^2} (T_e/T_i) \quad (IV.16.a)$$

$$\bar{a} = \frac{1}{\bar{\mu}} \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \tau = \frac{2\pi}{3} \lambda_D^{-1} C_s t$$

Pour aboutir à (IV.16), on a fait appel au fait que le spectre est piqué autour de  $k = \lambda_D^{-1}/\sqrt{2}$  et on a supposé que le taux d'amortissement dû aux ions :  $\gamma_{ki}$  dépend faiblement de l'angle. Sans résoudre l'équation (IV.16), on peut étudier qualitativement le comportement de  $\alpha$ . En combinant cette équation avec la relation

$$\alpha = \frac{d\eta^*}{d\tau}, \quad (IV.17)$$

on obtient une intégrale première qui donne  $\alpha$  en fonction de  $\eta^*$  comme

$$\alpha = A_0 \eta^* - A_1 \int_0^{\eta^*} dy \frac{e^{-K(\bar{a}, y)}}{\sqrt{(T_i/T_e + 8y/\bar{a}^3)}} \left[ 1 + \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\bar{a}^3 K(\bar{a}, y)}{16y}} \right], \quad (IV.18)$$

où le premier terme représente la création de l'énergie due aux électrons et le deuxième terme représente l'absorption de celle-ci due aux ions. En présence de ces deux effets antagonistes, la fonction  $\alpha(\eta^*)$  après une phase de croissance linéaire atteint un maximum pour une valeur de  $\eta^*$  qui s'obtient de la solution de l'équation  $\frac{d\alpha}{d\eta^*} = 0$  (ou  $S(\eta^*) = 0$ ) et est donnée par :



$$\eta_0^* \approx \frac{1}{36\sqrt{6}} \left\{ \text{Log} \left[ \sqrt{\frac{4\pi m}{3M}} (2T_e/T_i)^{3/2} / \left( \frac{u}{2C_s} - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \right] \right\}^{-1}, \quad (\text{IV.19})$$

où pour aboutir à (IV.19), nous avons approximé  $e^{-K(\bar{a}, \eta^*)}$  par  $e^{-\frac{\bar{a}^5}{16\eta^*}}$  et  $\text{erf}(\dots)$  par 1 (puisque  $\eta^* \ll 1$ ). Maintenant la valeur maximum de  $\alpha$  s'obtient en reportant cette valeur de  $\eta^*$  dans (IV.18) et on a :

$$\alpha_{\text{max}} \approx A_0 \eta_0^* \quad (\text{IV.20})$$

Avec  $A_0$  et  $\eta_0^*$  respectivement donnés par (IV.16.a) et (IV.19). Pour des valeurs de  $\eta^*$  supérieures à  $\eta_0^*$ , le second terme de (IV.18) croît plus vite que le premier terme et la fonction  $\alpha$  décroît vers zéro pour une valeur limite de  $\eta^*$  donnée par la solution de l'équation  $\alpha(\eta^*) = 0$ , ce qui donne en vertu de (IV.18) :

$$\eta_\infty^* = \frac{1}{36\sqrt{6}} \left\{ \text{Log} \left[ \frac{9}{2} \sqrt{\frac{\pi M T_i}{m T_e}} / \left( \frac{u}{2C_s} - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \right] \right\}^{-1}, \quad (\text{IV.21})$$

où pour obtenir (IV.21), on a utilisé les mêmes approximations que dans la solution de l'équation  $\frac{d\alpha}{d\eta^*} = 0$ .

Pour mieux voir l'évolution de l'instabilité, nous avons calculé numériquement les intégrales dans (IV.13) et (IV.18). Les résultats de ces calculs sont montrés sur la figure (8) où  $\alpha$  est tracé en fonction de  $\eta^*$  et d'après cette figure, on trouve que  $\alpha$  croît d'une manière monotone et atteint une valeur maximum puis il décroît vers zéro conformément aux études analytiques précédentes.

Il est important de rappeler que, dans ce paragraphe, on tient compte uniquement de l'effet de la production des ions énergiques (résonnants) sur l'instabilité. Concernant les particules non-résonnantes, elles jouent un rôle important dans le processus d'échange de la quantité de mouvement avec les modes. Cette question sera abordée plus loin dans le paragraphe (IV.f).

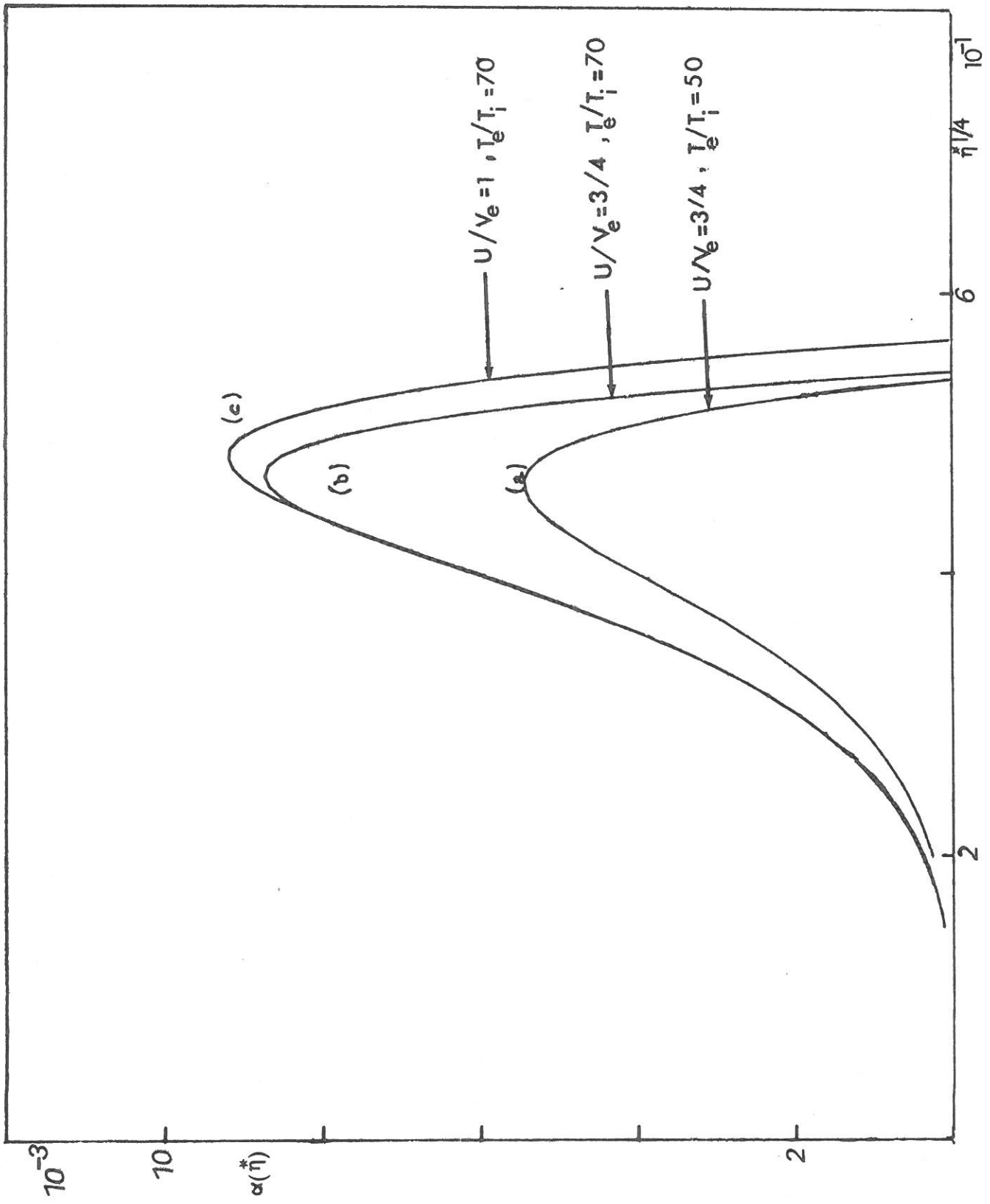


FIG. [8] -  $\alpha$  en fonction de  $\eta^*$ ,  $M/m = 100$

Dans ce paragraphe nous avons étudié l'évolution de l'instabilité, c'est-à-dire celle de  $\alpha$  en fonction non pas du temps mais de  $\eta^*$  lequel varie de zéro jusqu'à une valeur limite  $\eta_\infty^*$  lorsque le temps macroscopique "t" varie de zéro à l'infini. Cela nous permet d'étudier la variation de  $C_1^*$  et  $C_2^*$  et par conséquent d'étudier la modification de la FDM ionique.

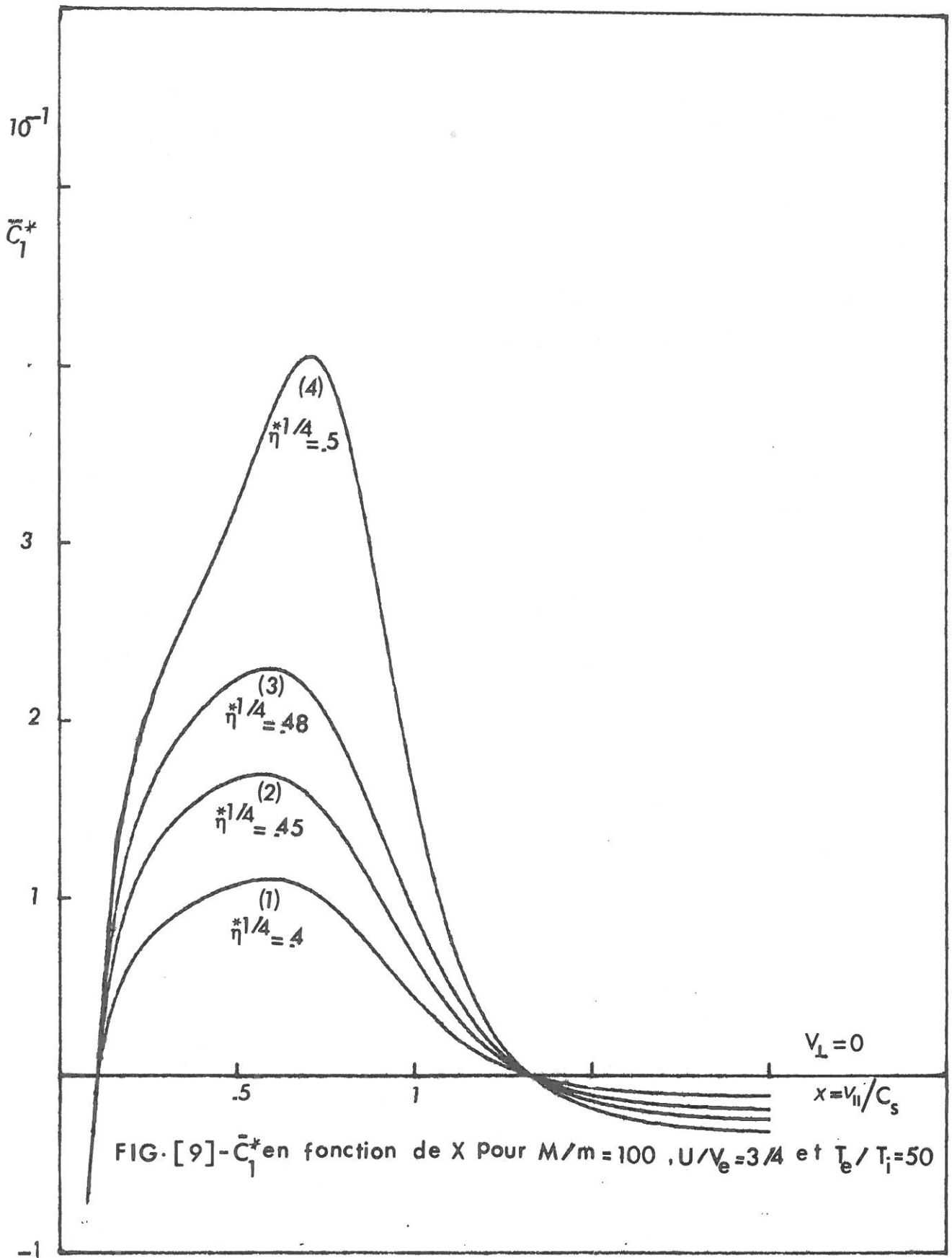
#### IV.d. EVOLUTION DE LA FDM IONIQUE

Avant de montrer comment la FDM ionique évolue au cours de l'évolution de l'instabilité acoustique ionique, nous procédons par voir la variation de  $\bar{C}_1^*$  et  $\bar{C}_2^*$  au cours du temps et aussi pour des valeurs différentes des paramètres  $T_e/T_i$  et  $u/v_e$ . La figure (9) montre  $\bar{C}_1^*$  en fonction de  $x = v_{\parallel}/C_s$  pour  $v_{\perp} = 0$  avec  $M/m = 100$ ,  $T_e/T_i = 50$ ,  $u/v_e = 3/4$  et pour plusieurs valeurs de  $\eta^*$ . Aussi la figure (10) représente  $\bar{C}_2^*$  en fonction de  $v_{\parallel}/C_s$ ,  $v_{\perp} = 0$  sous les mêmes conditions que sur la figure (9). On observe ainsi les comportements suivants :

- i)  $\bar{C}_1^*$  et  $\bar{C}_2^*$  augmentent lorsque  $\eta^*$  augmente
- ii)  $\bar{C}_1^*$  croît avec  $x$  jusqu'à  $x \approx \frac{1}{2}$  et décroît pour  $x > \frac{1}{2}$  tandis que  $\bar{C}_2^*$  atteint un maximum pour  $x \approx 1$ .

En faisant varier  $u/v_e$  et pour des valeurs fixes de  $\eta^*$ ,  $M/m$  et  $T_e/T_i$ , les cumulants  $\bar{C}_1^*$  et  $\bar{C}_2^*$  sont respectivement tracés en fonction de  $v_{\parallel}/C_s$  sur les figures (11) et (12). On remarque que  $\bar{C}_2^*$  dépend faiblement de  $u/v_e$  pour  $x > 1$  et aussi pour  $\eta^* > T_i/2T_e$  tandis que  $\bar{C}_1^*$  dépend sensiblement de  $u/v_e$ .

Les figures (13) et (14) montrent la variation de  $\bar{C}_1^*$  et  $\bar{C}_2^*$  en fonction de  $x$  pour plusieurs valeurs de  $T_e/T_i$ , en fixant les autres paramètres et on observe que  $\bar{C}_1^*$  dépend faiblement de  $T_e/T_i$  pour  $\eta^* < T_i/T_e$ .



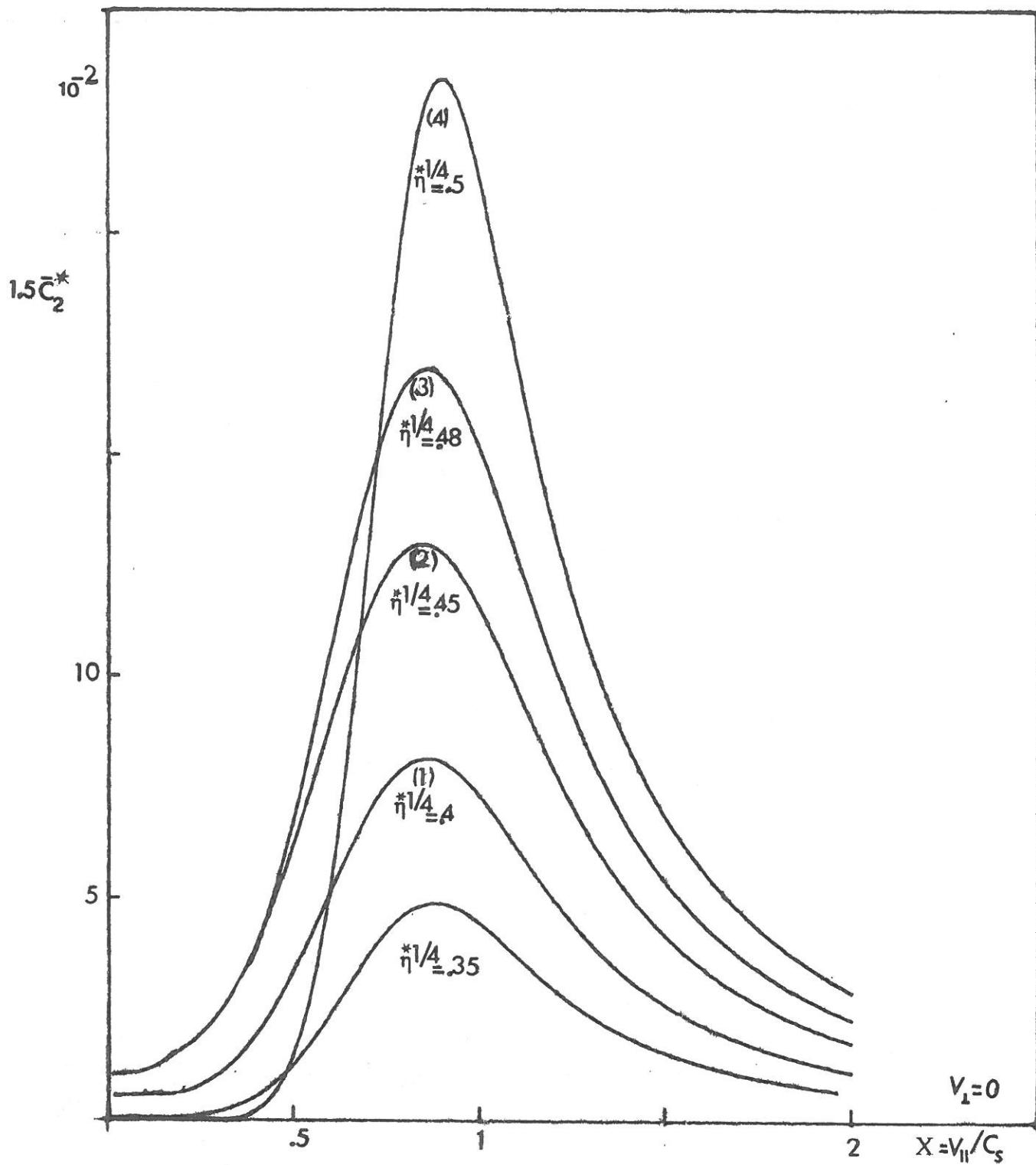


FIG. [10]-  $\bar{C}_2^*$  en fonction de  $X$ :  $M/m=100$ ,  $U/V_e=3/4$  et  $T_e/T_i=50$ .

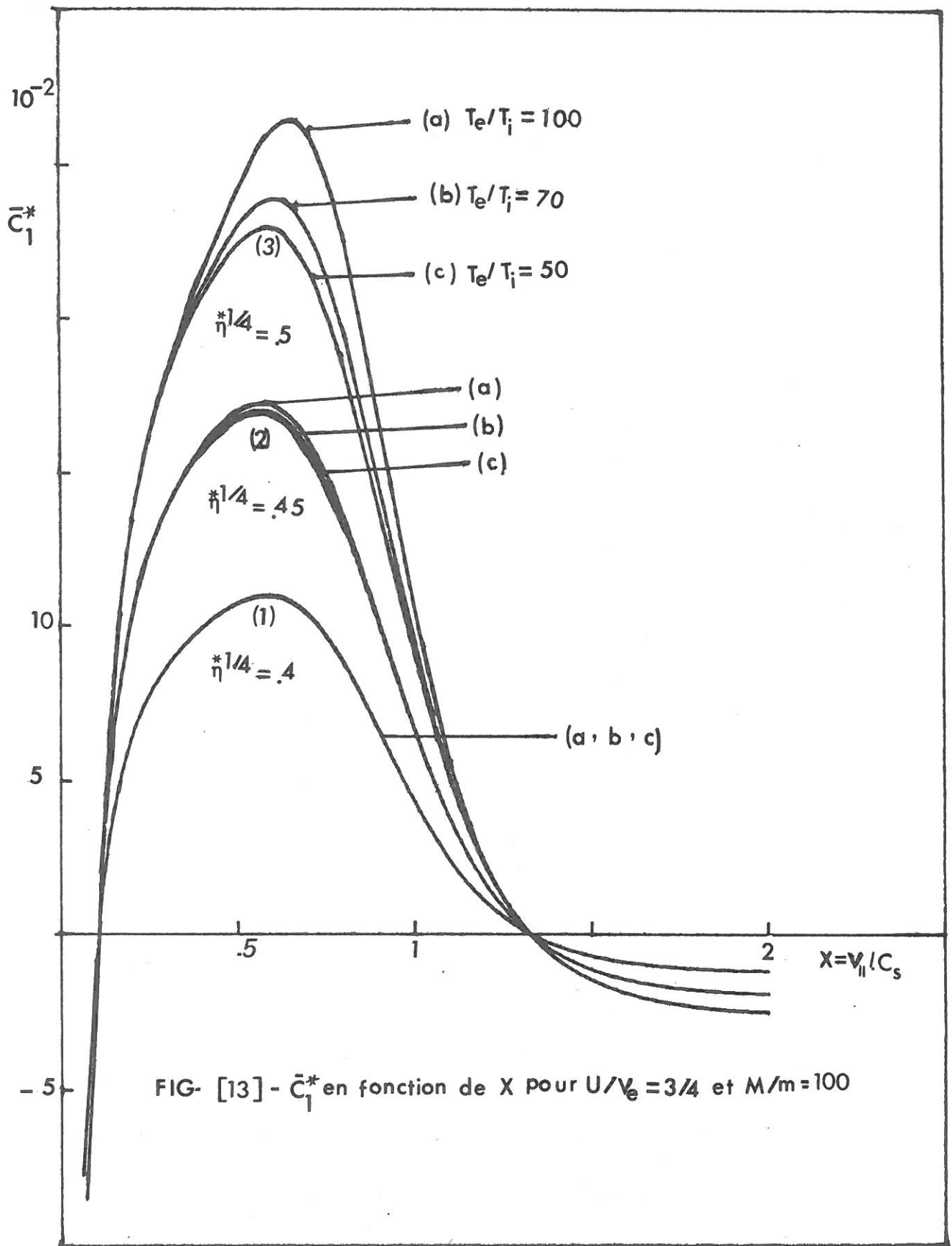


FIG- [13] -  $\bar{C}_1^*$  en fonction de  $X$  pour  $U/V_e = 3/4$  et  $M/m = 100$

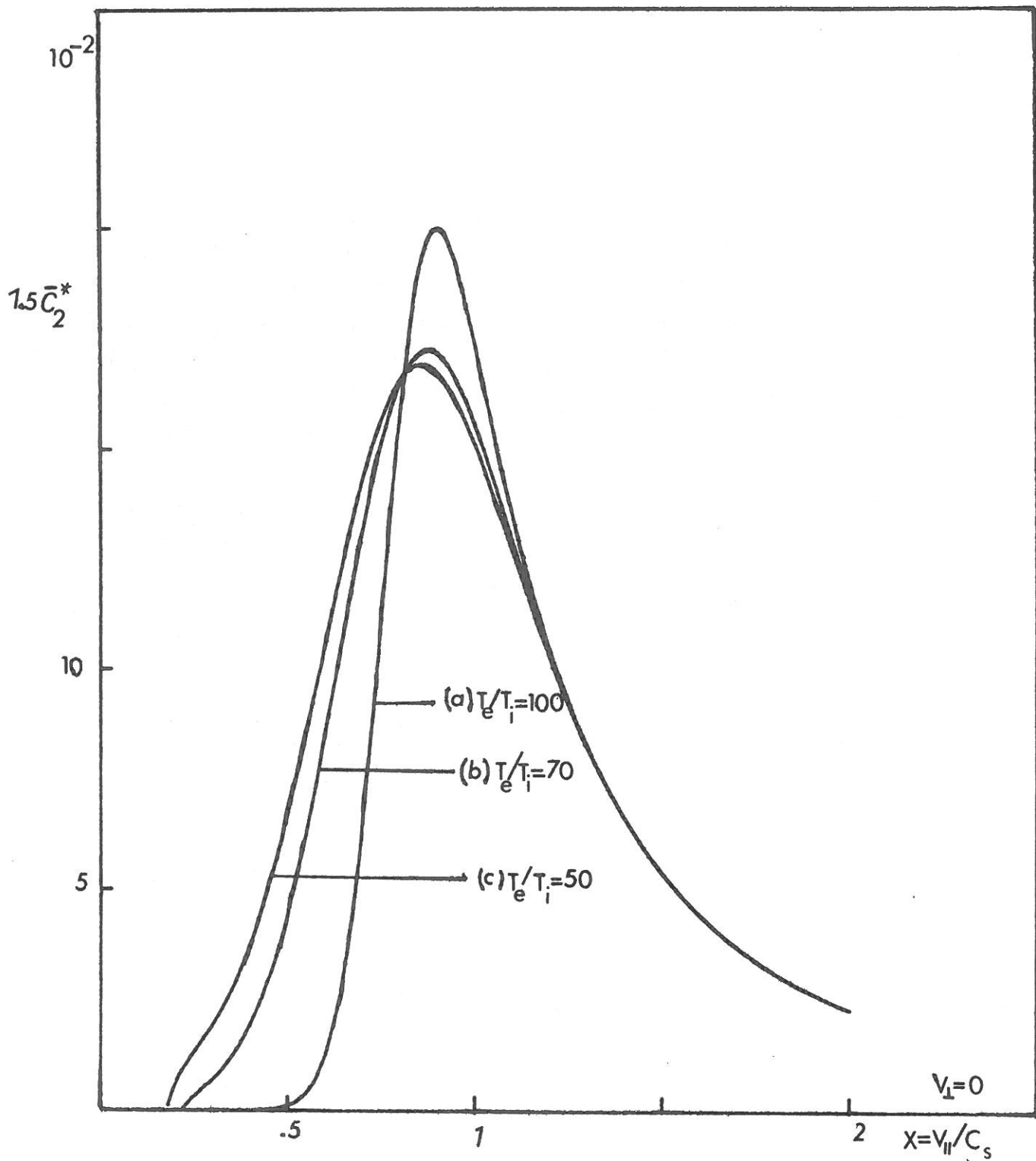


FIG.[14] -  $\bar{C}_2^*$  en fonction de  $X$ ,  $M/m=100$ ,  $U/V_e=3/4$  et  $\eta^{1/4}=.48$

Nous examinons, maintenant, comment la FDM ionique évolue au cours du temps. D'abord on écrit :

$$F_i(\vec{v}, t) = F_{ic}(\vec{v}, t) + F_{iq}(\vec{v}, t) ,$$

où  $F_{ic}$ , fonction de distribution des particules non-résonnantes (corps), et  $F_{iq}$ , celle des particules résonnantes (queue), sont respectivement données par (IV.1) avec (IV.8') et (IV.12). Sur la figure (15), la fonction  $F_i$  est tracée en fonction de  $v_{\parallel}$  avec  $v_{\perp} = 0$  et pour plusieurs valeurs du paramètre  $\eta^*$ . On remarque que  $F_{iq}$  ( $v > C_s/\sqrt{2}$ ) croît avec  $\eta^*$  tandis que  $F_{ic}$  ( $v < C_s/\sqrt{2}$ ) décroît. Cela est la conséquence du mécanisme de production des ions dans la queue de la FDM ionique.

La modification de  $F_{ic}$  et  $F_{iq}$  conduit à une modification du nombre des particules et de la température associés au corps et à la queue de la FDM.

#### IV.e. CALCUL DE LA DENSITE ET DE LA TEMPERATURE DES PARTICULES RESONNANTES (DE LA QUEUE)

Nous définissons la densité des ions dans la queue de la FDM ionique comme :

$$n_{iq}(t) = \int_{|\vec{v}| \geq C_s/\sqrt{2}} d\vec{v} F_{iq}(\vec{v}, t) \quad (IV.22)$$

Avec  $d\vec{v} = v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} d\phi$  et la fonction  $F_{iq}$  indépendante de  $\phi$ , on obtient :

$$n_{iq}(t) = 4\pi C_s^3 \left\{ \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} d\xi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \bar{v}_{\perp} d\bar{v}_{\perp} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{d\xi} \int_{\frac{1}{2-\xi^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \bar{v}_{\perp} d\bar{v}_{\perp} \right\} F_{iq}(\xi, \bar{v}_{\perp}, t), \quad (IV.23)$$

où on s'est servi du fait que la fonction  $F_{iq}(\bar{v}_{\parallel}, \bar{v}_{\perp}, t) \approx 0$  pour



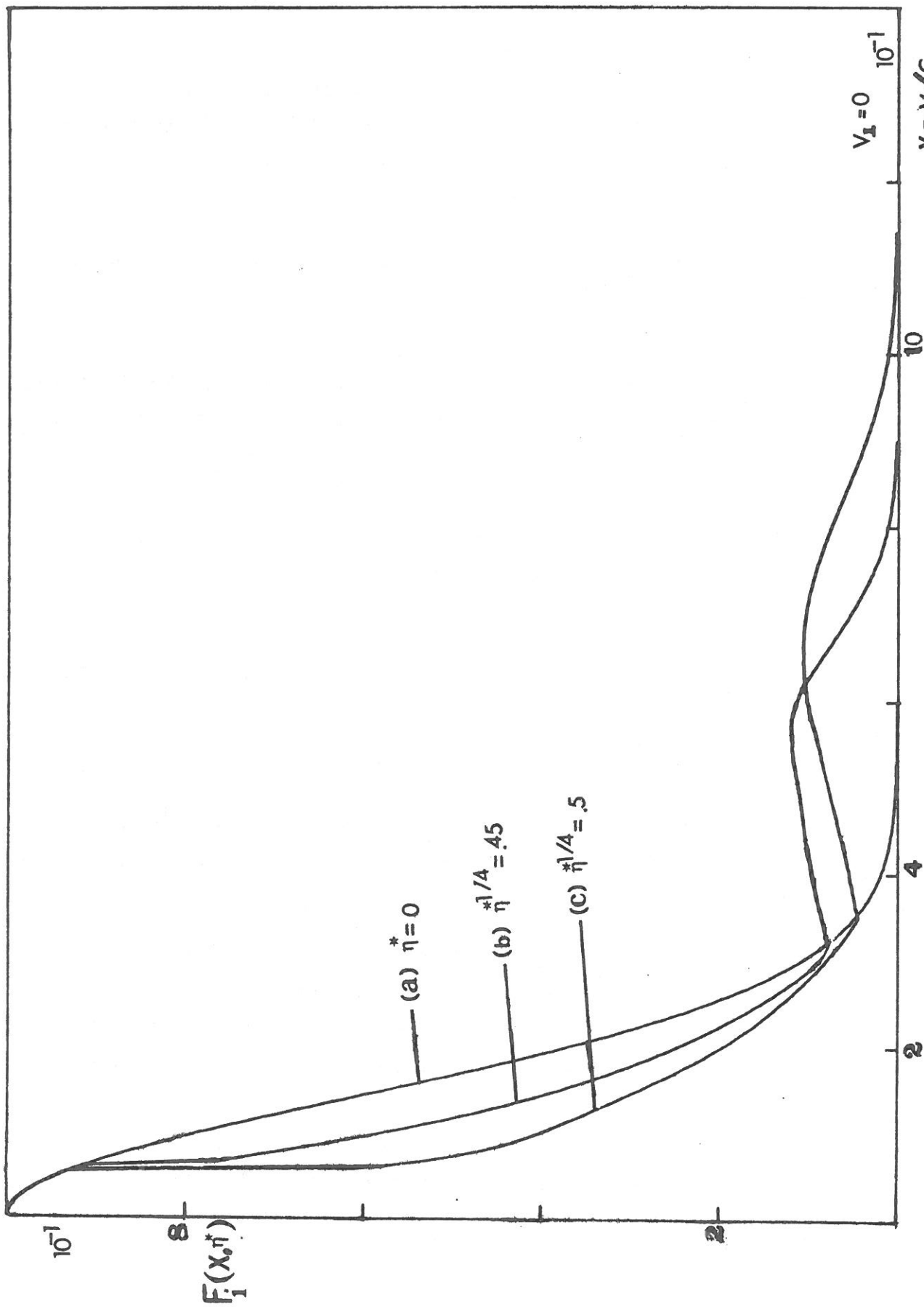


FIG. [15] -  $F_1$  en fonction de  $X$ ,  $T_e / T_i = 50$ ,  $M/m = 100$  et  $U / V_e = 3/4$

$\bar{v}_\perp > \frac{1}{\sqrt{2}}$  ainsi qu'elle est symétrique par rapport à  $v_\parallel$  dans le domaine complémentaire :  $\bar{v}_\perp < \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

En effectuant l'intégration sur  $\bar{v}_\perp$  par la méthode de Laplace, on trouve que la contribution dominante dans le second membre de (IV.23) provient de la première intégrale et que

$$n_{iq}(t) = 4\pi^{3/2} C_S^3 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} d\xi (\bar{v}_\perp^*)^2 F_{iq}(\xi, \bar{v}_\perp = \bar{v}_\perp^*, t) ; \quad (IV.24)$$

où  $\bar{v}_\perp^* = \sqrt{\xi / \left( \frac{d}{d\xi} K(\xi, \bar{v}_\perp = 0, \eta^*) \right)}$  est le point de maxima de la fonction  $F_{iq}$  dans le domaine d'intégration et la fonction  $K$  est donnée par (IV.12).

En intégrant par parties sur  $y$ , on obtient :

$$\frac{n_{iq}(\eta^*)}{n_0} \approx \frac{(2T_e/T_i) e^{-K(\xi=1/\sqrt{2}, \bar{v}_\perp=0, \eta^*)}}{\sqrt{g_0} (K'_0)^2} \times \quad (IV.25)$$

$$\times \left[ 1 - K'_0 \sqrt{g_0} \left( \frac{d}{d\xi} \frac{1}{K'^2 \sqrt{g}} \right)_{\xi=1/\sqrt{2}} \right]$$

avec  $K' = \frac{d}{d\xi} K(\xi, \bar{v}_\perp = 0, \eta^*)$ ,  $K'_0 = K'(\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \bar{v}_\perp = 0, \eta^*)$  et  $g_0 = T_i/T_e + 16\sqrt{2}\eta^*$ .

Le terme dans les parenthèses dans le second membre de (IV.25) représente une correction de l'ordre de  $\frac{1}{K'_0} \sim \frac{1}{K} \sim T_i/T_e$ .

Au delà de l'expression analytique (IV.25) pour  $n_{iq}/n_0$ , nous avons calculé les intégrales dans (IV.23) numériquement et les résultats sont montrés sur la figure (16) pour des valeurs différentes de  $T_e/T_i$  et  $u/v_e$ . On remarque, d'après ces résultats, que

-  $n_{iq}(\eta^*)/n_0 \equiv \bar{n}_{iq}$  croît d'une manière monotone avec  $\eta^*$  et atteint une valeur asymptotique qui correspond à l'état  $\alpha \rightarrow 0$  (ou encore  $\eta^* \rightarrow \eta_\infty^*$ ).

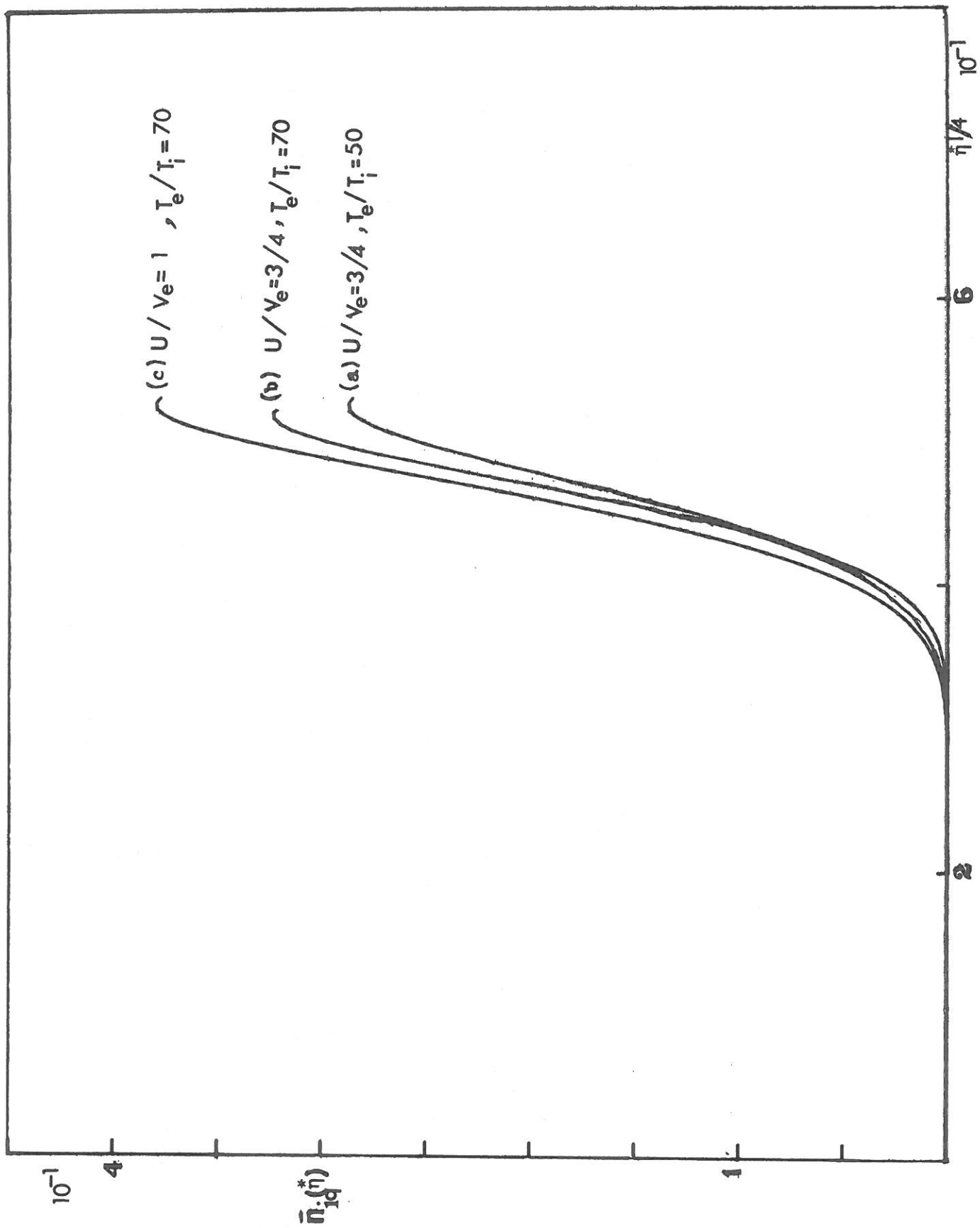


FIG. [16] -  $\bar{n}_{iq}^*$  en fonction de  $\eta$ ,  $M/m=100$

- La proportion des particules dans la queue ( $\bar{n}_{iq}$ ) augmente aussi lorsque les valeurs de  $T_e/T_i$  et/ou  $u/v_e$  augmentent. Ce résultat est cohérent car lorsque  $u/v_e$  (ou le taux de croissance) augmente, la valeur asymptotique de  $\eta^*$  augmente, d'où  $\bar{n}_{iq}$ .
- Lorsque les rapports  $T_e/T_i$  et  $u/v_e$  augmentent de façon douce, on obtient, pour  $\bar{n}_{iq}$ , des résultats correspondants quasi-identiques.
- Les résultats obtenus par le calcul numérique des intégrales en (IV.23) sont en accord avec ceux qui s'obtiennent de l'expression (IV.25) avec une précision de l'ordre de 2 %.

Nous calculons maintenant la température associée à la queue de la FDM ionique :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}n_{iq}(t)T_{iq}(t) &= \frac{1}{2}n_{iq}(t)\left(T_{iq}^{\parallel}(t) + 2T_{iq}^{\perp}(t)\right) \\ &= \frac{M}{2} \int_{|\vec{v}| \geq C_s/\sqrt{2}} d\vec{v} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) F_{iq}(\vec{v}, t) \end{aligned} \quad (\text{IV.26})$$

où les indices  $\parallel$  et  $\perp$  se réfèrent au vecteur  $\vec{u}$ .

Alors, on a, séparément pour les températures parallèle et perpendiculaire :

$$\begin{aligned} n_{iq}(t)T_{iq}^{\parallel}(t) &= 4\pi MC_s^5 \left\{ \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} d\xi \xi^2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \bar{v}_{\perp} d\bar{v}_{\perp} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} d\xi \xi^2 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} \bar{v}_{\perp} d\bar{v}_{\perp} \right\} \times \\ &\quad \times F_{iq}(\xi, \bar{v}_{\perp}, t) \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

et

$$\begin{aligned} n_{iq}(t)T_{iq}^{\perp}(t) &= 2\pi MC_s^5 \left\{ \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} d\xi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \bar{v}_{\perp}^3 d\bar{v}_{\perp} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} d\xi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} \bar{v}_{\perp}^3 d\bar{v}_{\perp} \right\} \times \\ &\quad \times F_{iq}(\xi, \bar{v}_{\perp}, t) \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

Les intégrales dans (IV.27) et (IV.28) peuvent être calculées par la même technique utilisée pour le calcul de la densité et on obtient

$$T_{iq}^{\parallel} \approx \frac{T_e}{2} \frac{\left[ 1 - 2K'_0 \sqrt{g_0} \left( \frac{d}{d\xi} \frac{\xi^2}{K'^2 \sqrt{g}} \right)_{\xi=1/\sqrt{2}} \right]}{\left[ 1 - K'_0 \sqrt{g_0} \left( \frac{d}{d\xi} \frac{1}{K'^2 \sqrt{g}} \right)_{\xi=1/\sqrt{2}} \right]} \quad (\text{IV.29})$$

et

$$T_{iq}^{\perp} \approx \frac{T_e}{2\sqrt{2}K'_0} \quad (\text{IV.30})$$

Comme  $K'_0 \sim T_e/T_i$ , on voit que  $T_{iq}^{\perp}$  reste de l'ordre de  $T_i$ . En reportant les résultats (IV.29) et (IV.30) pour  $T_{iq}^{\parallel}$  et  $T_{iq}^{\perp}$  dans (IV.26), on obtient le résultat pour  $T_{iq}$  et on trouve qu'en gros  $T_{iq} \approx T_e/3$ .

#### IV.f. CALCUL DE LA DENSITE ET LA TEMPERATURE DES PARTICULES NON-RESONNANTES

De façon analogue, comme au paragraphe précédent, on définit la densité des ions non-résonnants (ou du corps de la FDM ionique) comme :

$$n_{ic}(t) = \int_{|\vec{v}| < C_s/\sqrt{2}} d\vec{v} F_{ic}(\vec{v}, t), \quad (\text{IV.31})$$

où  $F_{ic}(\vec{v}, t)$  est donné par :

$$\left. \begin{aligned} F_{ic}(\vec{v}, t) &= \frac{n_0}{\sqrt{\pi^3 C_s v_i^2 \sqrt{2g}}} \exp(-f^2/2g), \\ f &= \bar{v} + \frac{2\alpha}{\bar{v}} + \frac{11}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \mu\alpha, \\ g &= (T_i/T_e + 2\alpha + \frac{15}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \mu\bar{v}) \end{aligned} \right\} (\text{IV.32})$$

On remarque que, pour  $\alpha \ll T_i/2T_e$  on trouve que  $f \approx \bar{v}$ ,  $g \sim T_i/T_e$  et par conséquent  $f_{iC}(\vec{v}, t) = f_i(\vec{v}, 0)$ . Dès que  $\alpha$  atteint un niveau du même ordre de grandeur que  $T_i/T_e$  ( $\alpha \lesssim T_i/2T_e$ ), la modification du corps de la FDM ionique devient importante. Pour calculer l'intégrale dans (IV.31), on écrit  $d\vec{v} = v^2 dv d\mu d\phi$ ;  $\mu = \hat{u} \cdot \hat{v}$  et l'intégration sur  $\phi$  résulte

$$n_{iC}(\alpha) = 2\pi \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{C_s/\sqrt{2}} v^2 dv F_{iC}(v, \mu, \alpha) \quad (\text{IV.31.a})$$

On peut développer la fonction  $F_{iC}$ , donnée par (IV.32), jusqu'au premier ordre en  $\mu$  puisque son coefficient, qui est d'ordre  $\frac{\alpha \bar{v}}{2(T_i/T_e + 2\alpha)}$ , est toujours inférieur à un dans le domaine d'intégration. On peut, alors, écrire  $F_{iC}$  sous la forme (Spitzer-Härm) :

$$F_{iC}(\vec{v}, \alpha) = F_{iC}^{iso}(v, \alpha) \left[ 1 + \mu Q(v, \alpha) \right],$$

avec

$$F_{iC}^{iso}(v, \alpha) = \frac{n_0}{\sqrt{\pi^3 v_i^2 C_s \sqrt{\ell}}} e^{-\frac{(\bar{v} + \frac{2\alpha}{\bar{v}})^2}{\ell}} \quad (\text{IV.32.a})$$

et

$$Q(v, \alpha) = \frac{15\alpha \bar{v} (\bar{v} + \frac{2\alpha}{\bar{v}})^2}{\ell^2} - \frac{\alpha}{\ell} \left( 13\bar{v} + \frac{11\alpha}{\bar{v}} \right),$$

$$\ell = 2(T_i/T_e + 2\alpha).$$

Maintenant, l'intégration sur  $\mu$  dans (IV.32.a) est immédiate et on effectue l'intégration sur  $v$  par la méthode de Laplace puisque la fonction dans l'exponentielle (cf. (IV.32)) se comporte comme  $T_e/T_i \gg 1$  (ou  $\frac{1}{\alpha} \gg 1$ ). Le point critique, appelé  $\bar{v}_0$  et qui satisfait à

$$h'(\bar{v}) = \left[ -\frac{(\bar{v} + \frac{2\alpha}{\bar{v}})^2}{\ell} + 2 \text{Log } \bar{v} \right]' = 0,$$

est donné par  $\bar{v}_0 = \sqrt{\frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\ell^2 + 16\alpha^2}}$ . On obtient ainsi une expres-

sion pour  $n_{ic}$  en termes de  $\alpha$  comme

$$\frac{n_{ic}(\alpha)}{n_0} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2\alpha T_e}{T_i} \right) \frac{e^{-A-4\alpha/\ell}}{\sqrt{\frac{\ell^2}{16\alpha^2} A(A-1)}} (1+A),$$

$$A = \sqrt{1 + \frac{16\alpha^2}{\ell^2}}. \quad (\text{IV.33})$$

D'après (IV.33), on remarque que  $n_{ic}(\alpha)$  décroît avec  $\alpha$ . En outre, nous avons calculé les intégrales dans (IV.31.a) numériquement pour les mêmes cas que sur la figure (16) et les résultats pour  $n_{ic}/n_0$  (en fonction de  $\eta^* = \alpha/A_0$ ) sont représentés sur la figure (17) qui montrent que :

- i)  $n_{ic}/n_0 \equiv \bar{n}_{ic}$  décroît avec  $\eta^*$  jusqu'à une valeur stationnaire
- ii) les valeurs de  $\bar{n}_{ic}$  diminuent lorsqu'on augmente  $T_e/T_i$  et/ou  $u/v_e$ .

On calcule maintenant le gain de la quantité de mouvement des ions non-résonnants qui est donné par :

$$n_{ic}(\alpha) \vec{p}_{ic}(\alpha) = M \int_{|\vec{v}| < C_s/\sqrt{2}} \vec{v} d\vec{v} F_{ic}(\vec{v}, \alpha)$$

$$= \frac{4\pi M \hat{u} C_s^4}{3} \int_0^{1/\sqrt{2}} \bar{v}^3 d\bar{v} F_{ic}^{iso}(\bar{v}, \alpha) Q(\bar{v}, \alpha), \quad (\text{IV.34})$$

On calcule l'intégrale sur  $v$  par la méthode de Laplace et en utilisant les résultats précédents, (IV.34) est ramené à :

$$\vec{p}_{ic}(\alpha) \approx \frac{\alpha}{\ell} \sqrt{3\ell + \sqrt{9\ell^2 + 64\alpha^2}} \times M C_s \hat{u} \quad (\text{IV.35})$$

On remarque que lorsque  $\alpha = 0$ ,  $P_{ic} = 0$ , aussi le gain de la quantité de mouvement croît avec  $\alpha$ .

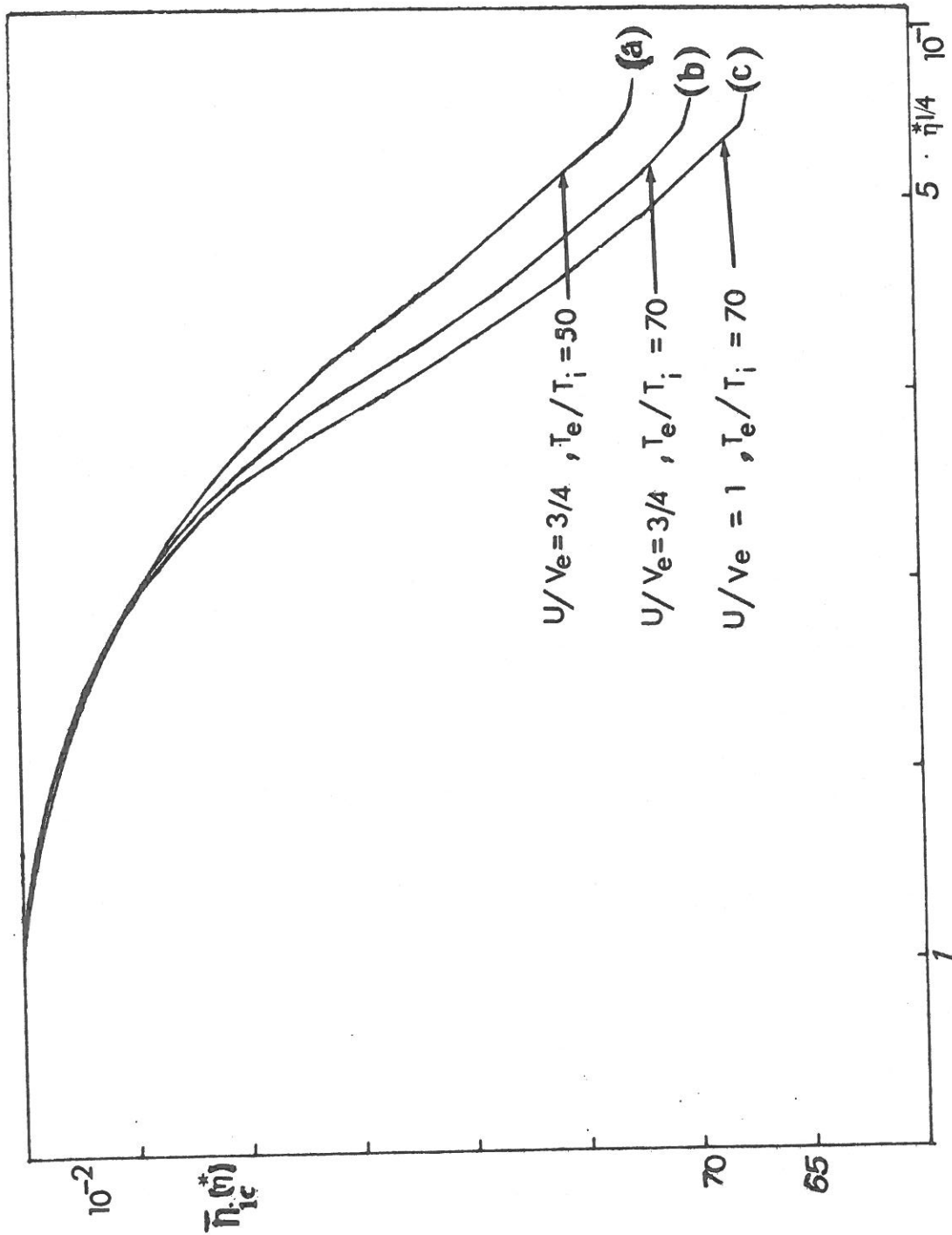


FIG-[17] -  $\bar{v}_{1c}^*$  en fonction de  $\bar{\eta}^*$ ,  $M/m=100$



On étudie, maintenant, la modification de l'énergie thermique ionique associée au corps de la FDM. Comme au paragraphe précédent, on définit :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}n_{ic}(t)T_{ic}(t) &= \frac{1}{2}n_{ic}(t)\left(T_{ic}^{\parallel}(t) + 2T_{ic}^{\perp}(t)\right) \\ &= \frac{M}{2} \int_{|\vec{v}| < C_s/\sqrt{2}} d\vec{v} v^2 F_{ic}(\vec{v}, t) \end{aligned} \quad (IV.36)$$

d'où

$$n_{ic}(t)T_{ic}^{\parallel}(t) = M \int_{|\vec{v}| < C_s/\sqrt{2}} d\vec{v} v^2 \mu^2 F_{ic}(v, \mu, t)$$

En suivant la même méthode employée précédemment, on obtient :

$$T_{ic}^{\parallel}(\alpha) \approx T_e \bar{v}_0^2 \approx \frac{1}{2}(T_i + 2\alpha T_e) \quad (IV.37)$$

De la même façon, on obtient pour  $T_{ic}^{\perp}(\alpha)$  :

$$T_{ic}^{\perp}(\alpha) \approx \frac{1}{2}(T_i + 2\alpha T_e), \quad (IV.38)$$

d'où  $T_{ic}^{\parallel} = T_{ic}^{\perp}$  et

$$T_{ic}(\alpha) \approx (T_i + 2\alpha T_e) \quad (IV.39)$$

#### IV.f. COMPARAISON ENTRE LES RESULTATS ANALYTIQUES ET CEUX OBTENUS DANS LES EXPERIENCES NUMERIQUES

Nous faisons maintenant la comparaison avec les simulations numériques portant sur ce problème en l'occurrence celles effectuées par Dum et al. [36], Appert et Vaclavik [50] et Ichihara et Hirose [51] :

1) Pour un plasma avec des conditions initiales :  
 $T_e/T_i = 50$ ,  $u/v_e = 3/4$  et  $M/m = 100$ , nous avons trouvé  $\frac{n_{iq}}{n_0}(n_\infty^*) \approx 28\%$  (cf. fig. (16)), ce qui est en accord avec le résultat obtenu par Appert (qui est 30 %) tandis qu'il est supérieur à celui obtenu par Dum et al. (20 %). Nous pensons que le résultat de Appert et Vaclavik ne correspond pas à la valeur stationnaire de  $n_{iq}$  et il est élevé à cause du facteur "2" imposé dans les équations (4) et (5) réf. [50].

2) Nous avons trouvé aussi que le rapport  $n_{iq}/n_0$  dépend considérablement du paramètre  $u/v_e$ . Ce résultat est en accord avec l'étude analytique de Choi et Horton [57]. Dans les expériences numériques Appert et Vaclavik n'ont pas trouvé une dépendance de  $n_{iq}/n_0$  en fonction de  $u/v_e$ , ce qui est plutôt surprenant.

3) Nous avons montré que la FDM, qui est au départ isotrope, devient anisotrope, ainsi que les queues parallèle et perpendiculaire sont caractérisées par des températures  $T_{iq}^{\parallel}$  et  $T_{iq}^{\perp}$  avec  $T_{iq}^{\parallel} \gg T_{iq}^{\perp}$ . Ces résultats sont en accord avec ceux donnés en [51].

#### IV.g. COMPARAISON AVEC LES RESULTATS DU CHAPITRE PRECEDENT

Nous discutons à présent les conditions de validité de notre étude dans ce chapitre (et dans le chapitre précédent) où l'on a considéré uniquement la modification de la FDM ionique (électronique). Les conditions de validité constituent l'ensemble des conditions selon que la modification de la FDM électronique (ou ionique) est dominante au cours de la relaxation de l'instabilité. D'après les résultats obtenus, on trouve que la formation de la queue ionique a lieu avant ou après la modification significative de la FDM électronique suivant que l'on se trouve respectivement dans le cas  $T_i/T_e \ll \bar{u}^3 \sqrt{m/M}$  ou  $T_i/T_e \gg \bar{u}^3 \sqrt{m/M}$ . Cette condition s'obtient par la comparaison

des rapports des énergies obtenus dans l'hypothèse où la saturation est due à un seul processus qui est soit la modification de la FDM électronique, soit la formation des ions énergiques. Lorsque les conditions précédentes ne sont pas fortement satisfaites, une modification simultanée de la FDM électronique et ionique aura lieu au cours de la relaxation de l'instabilité. On note, ici, que la condition  $T_i/T_e \ll \bar{u}^3 \sqrt{m/M}$  (ou  $T_i/T_e \gg \bar{u}^3 \sqrt{m/M}$ ) est une condition nécessaire pour justifier la validité de l'hypothèse de délaisser la modification de la FDM électronique (ou ionique). La condition suffisante se détermine par le rôle dominant dans le processus de stabilisation de l'instabilité acoustique ionique. On obtient cette condition par la comparaison des valeurs maximales de  $\alpha$  obtenues dans ce chapitre et le chapitre précédent. On trouve que la stabilisation due à la formation de la queue ionique (ou due à l'isotropisation de la FDM électronique) est dominante suivant que l'inégalité  $\eta_0^* \ll \eta_0 \sqrt{\frac{m}{M}}$  (cf. (III.19) et (III.23)) (ou l'inégalité opposée) est satisfaite. Pour obtenir des valeurs concrètes de  $T_e/T_i$ ,  $\bar{u}$  et  $m/M$  qui satisfont aux inégalités précédentes, la fonction  $\eta_0^* - \eta_0 \sqrt{\frac{m}{M}}$  est représentée sur la figure (18) en fonction de  $u/v_e$  pour des valeurs diverses de  $T_e/T_i$  et  $M/m$ . D'après cette figure, on trouve que le processus d'isotropisation de la FDM électronique est dominant pour stabiliser l'instabilité acoustique ionique lorsque  $M/m$  est très grand et  $u/v_e > 0,3$  tandis que pour un rapport des masses pas très grand et  $u/v_e > 0,5$  la formation de la queue ionique est dominante.

#### IV.h. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'évolution dynamique de la FDM ionique simultanément avec la relaxation de l'instabilité acoustique ionique et nous avons montré les points suivants :

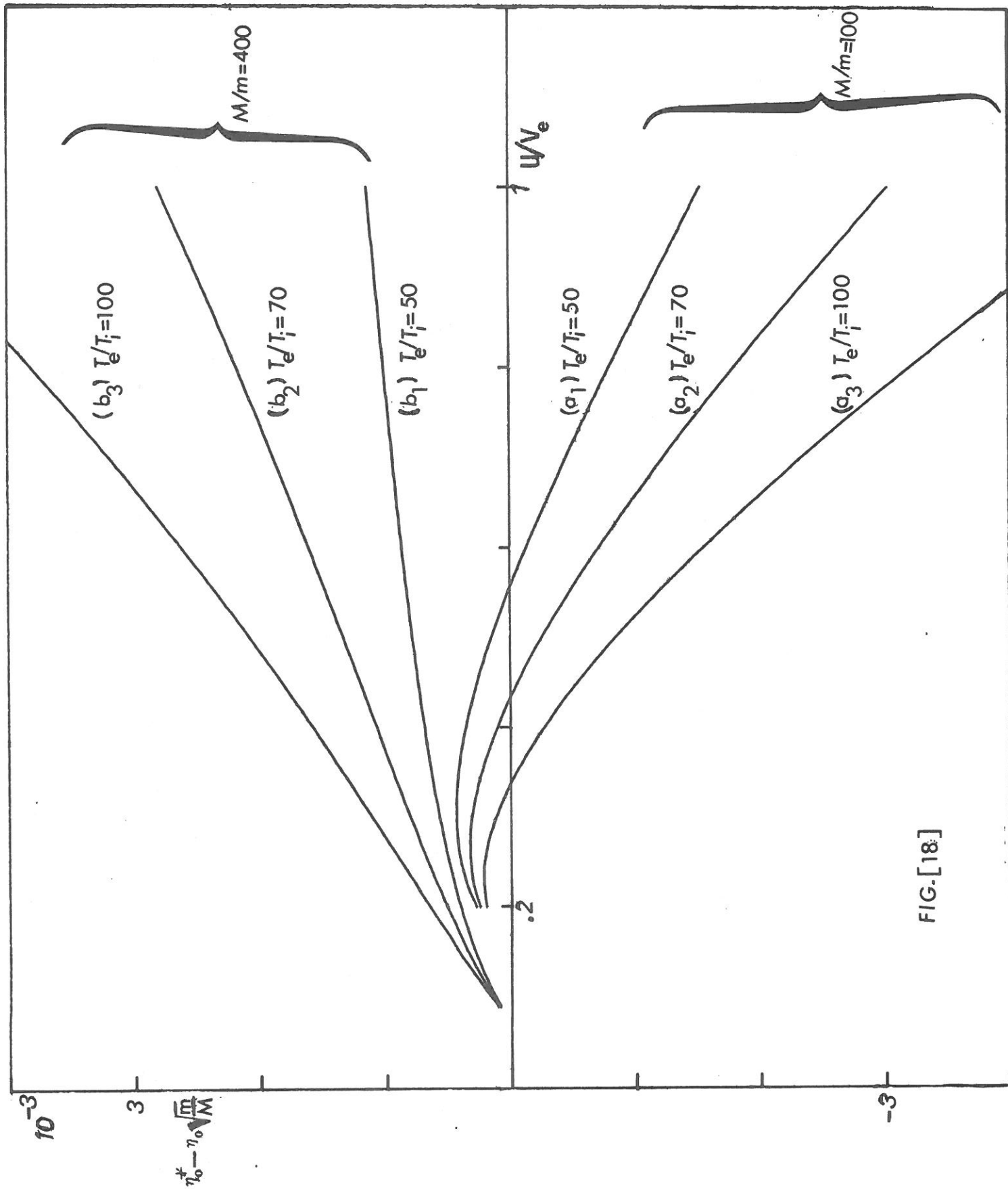


FIG-[18]

i) la formation de la queue ionique aura lieu dès que le rapport des énergies  $\alpha$  satisfait à  $\alpha \gtrsim \bar{u}(T_i/2T_e)$  tandis que la modification du corps de la FDM ionique aura lieu pour  $\alpha \lesssim (T_i/2T_e)$ .

ii) le rôle des ions dans le processus de stabilisation se manifeste de la façon suivante : les ions non-résonnants sont transférés au domaine résonnant grâce à un gain de quantité de mouvement lors de l'interaction avec les modes et ensuite, ils jouent un rôle stabilisant. On remarque que la stabilisation par les ions conduit au fait que : l'énergie turbulente " $\alpha$ " croît jusqu'à une valeur donnée (appelée  $\alpha_{\max}$ ) et puis décroît vers zéro. On a montré aussi que :

$$\eta^* \left( = \frac{C_s}{v_e} \int_0^t dt' v_{\text{eff}}(t') \right) \text{ varie de zéro jusqu'à } \eta_{\infty}^* \text{ où } \eta_{\infty}^* \ll 1.$$

Ce qui nous amène à examiner la condition de validité du développement en cumulant tronqué, employé au chapitre II, et

qui, dans le cas présent, s'exprime par  $\left| \frac{C_1}{v} \right|_{v \sim C_s} \sim \frac{\eta^*}{2} \lesssim \frac{\eta_{\infty}^*}{2} \ll 1$ .

Ce qui montre que notre étude est cohérente.

iii) En outre, d'après les résultats montrés sur les figures (16) et (17), on trouve que  $\frac{n_{iq}}{n_0}(\tilde{\eta}^*) + \frac{n_{ic}}{n_0}(\tilde{\eta}^*) = 1$  jusqu'à une précision de 2 % qui est du même ordre de grandeur que le paramètre du développement en cumulant  $\sim \frac{\eta_{\infty}^*}{2} = \frac{(.5)^4}{2}$  (cf. fig. (8)).

iv) Nous montrons dans l'appendice D que l'effet de l'élargissement de résonance sur la modification de la FDM ionique est important qualitativement plutôt que quantitativement.

\* \*  
\*



## CONCLUSIONS

Le but de cette thèse était : l'étude du mécanisme non-linéaire dominant de saturation de l'instabilité acoustique ionique. Puisque toutes les études existantes découplent le système des équations qui détermine l'évolution de l'instabilité et de la FDM de façon autoconsistante, en imposant une hypothèse soit sur l'évolution de l'instabilité, soit sur l'évolution de la FDM, en conséquence les résultats obtenus ne sont pas cohérents. Nous étions amenés à développer une méthode analytique (chapitre II, partie II), par laquelle on peut déterminer l'évolution de la FDM en cohérence avec l'évolution de l'instabilité.

L'étude de saturation de l'instabilité acoustique ionique en utilisant la formule obtenue pour la FDM (chapitre II) montre que :

- i) La FDM électronique, qui est initialement une Maxwellienne déplacée, s'isotropise au cours du temps du fait que la vitesse de dérive décroît au cours de l'évolution de l'instabilité. Autrement dit, la source d'énergie fournie par les électrons aux ondes s'épuise, ce qui réduit le taux de croissance.
- ii) L'évolution de la partie isotrope est un processus très lent et lié au chauffage des électrons.
- iii) La modification de la FDM électronique constitue un mécanisme dominant de saturation de l'instabilité dans un plasma ayant un très grand rapport des masses et  $u/v_e > 0,3$  (cf. fig. (18)).
- iv) La FDM ionique, qui est initialement une Maxwellienne pure, devient anisotrope.

- v) Les ondes cèdent une partie de leur quantité de mouvement aux ions non-résonnants et les derniers se transfèrent au domaine résonnant où ils contribuent au processus de stabilisation. Ce processus appelé "la formation des ions énergiques dans la queue de la FDM", peut constituer un mécanisme de saturation efficace lorsque le rapport des masses n'est pas très grand et  $u/v_e > 0,5$  (cf. fig. (18)).
- vi) L'effet de l'élargissement de résonance sur la modification de la FDM ionique est plus important qualitativement que quantitativement.
- vii) L'étude que nous avons menée montre que l'énergie totale des ondes croît d'une manière monotone et atteint une valeur maximum et ensuite elle décroît, ce qui est en accord avec les simulations numériques récentes [46].
- viii) La méthode que nous avons développée, étant indépendante de l'origine de la turbulence, elle pourrait être employée aussi dans l'étude des phénomènes liés à la connaissance de l'évolution de la fonction de distribution, comme par exemple :
- i) dans l'étude des phénomènes du transport anormal dans un plasma produit par laser et aussi dans le vent solaire
  - ii) l'étude de relaxation d'une classe des instabilités générées par une anisotropie de température ( $T_{\parallel} \gg T_{\perp}$  où les indices se réfèrent à un champ magnétique constant).

\*   \*  
\*



APPENDICE (A)ETABLISSEMENT DE L'IDENTITE (II.32)

Pour établir l'identité (II.32), nous utilisons la technique d'induction. Nous commençons par le premier membre de (II.32) :

$$(\exp \hat{b}\hat{A})\exp(ipv) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \overbrace{(\hat{b}\hat{A}(\hat{b}\hat{A}(\dots)\hat{b}\hat{A})\hat{b}\hat{A})}^n \exp(ipv), \quad (A.1)$$

avec  $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial v}$  et  $b \equiv b(\vec{v}, t)$ . Nous écrivons à présent le m-terme

$\overbrace{(\hat{b}\hat{A}(\hat{b}\hat{A}(\dots)\hat{b}\hat{A})\hat{b}\hat{A})}^m \exp(ipv)$  sous forme de polynôme de la façon suivante :

$$m = 0 \quad (\hat{b}\hat{A})^0 \exp(ipv) = \exp(ipv)$$

$$m = 1 \quad (\hat{b}\hat{A}) \exp(ipv) = (ipv) \exp(ipv)$$

$$m = 2 \quad (\hat{b}\hat{A})^2 \exp(ipv) = \left[ (ipb)^2 + ip(\hat{b}\hat{A}b) \right] \exp(ipv)$$

$$m = 3 \quad (\hat{b}\hat{A})^3 \exp(ipv) = \left[ (ipb)^3 + 3(ip)^2 b(\hat{b}\hat{A}b) + ip(\hat{b}\hat{A}\hat{b}\hat{A}b) \right] \exp(ipv)$$

$$m = 4 \quad (\hat{b}\hat{A})^4 \exp(ipv) = \left[ (ipv)^4 + 6(ip)^3 b^2(\hat{b}\hat{A}b) + 4(ip)^2 b(\hat{b}\hat{A}b\hat{A}b) \right. \\ \left. + ip(\hat{b}\hat{A}b\hat{A}b\hat{A}b) + 3(ip)^2 (\hat{b}\hat{A}b)^2 \right] \exp(ipv)$$

⋮

$$m = n \quad (\hat{b}\hat{A})^n \exp(ipv) = \left[ (ipb)^n + C_2^n (ip)^{n-1} b^{n-2} (\hat{b}\hat{A}b) \right. \\ \left. + C_3^n (ip)^{n-2} b^{n-3} (\hat{b}\hat{A}b\hat{A}b) + \dots + \right. \\ \left. + ip \underbrace{(\hat{b}\hat{A}b\hat{A}b \dots \hat{A}b)}_n + \dots \right] \exp(ipv) \quad (A.2)$$

Lorsqu'on substitue de (A.2) dans (A.1), on trouve que le coefficient du facteur  $(ip)$  est :

$$\left( b + \frac{(b\hat{A}b)}{2!} + \frac{(b\hat{A}b\hat{A}b)}{3!} + \dots + \frac{\overbrace{(b\hat{A}b\hat{A}\dots b\hat{A}b)}^n}{n!} \right),$$

où, pour alléger l'écriture, on a délaissé les parenthèses intérieures : par exemple :

$$(b\hat{A}b\hat{A}b\hat{A}b) \equiv b\hat{A}(b\hat{A}(b\hat{A}b))$$

ce qui est le coefficient du facteur  $(ip)$  dans le second membre de (II.32). De la même façon on peut montrer que le coefficient de  $(ip)^2$  dans le premier membre est le même que celui associé à  $(ip)^2$  dans le deuxième membre et par induction, on aboutit à l'identité (II.32).

\* \*  
\*

## APPENDICE (B)

CALCUL DES CUMULANTS DANS LE CAS D'UN SPECTRE ANISOTROPE

Pour calculer les premier et second cumulants, on est amené à calculer les moyennes  $\langle \Delta \vec{w} \cdot \Delta \vec{w} \rangle$ ,  $\langle (\vec{w} \cdot \Delta \vec{w})^2 \rangle$  ainsi que  $\langle \vec{w} \cdot \Delta \vec{w} \rangle$ . Comme nous l'avons vu, il suffirait de calculer le tenseur de diffusion et ces quantités seront déterminées à l'aide des relations (III.6.a), (III.6.b) et (III.6.c).

Maintenant, avec un spectre anisotrope décrit par  $I_{\vec{k}} = 2I_k(t)\Theta(\mu)$ ,  $\mu = \hat{k} \cdot \hat{u}$ , on a :

$$D_{ij} = \frac{2e^2\pi}{m^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 d\mu \int k_i k_j I_k(t) \delta(a-b \cos \phi) \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \quad (\text{B.1})$$

$$a = \omega_k - k \cdot w_{\parallel} \mu, \quad b = k w_{\perp} \sqrt{1-\mu^2}, \quad i, j = x, y, z$$

D'après (B.1), la composante  $D_{xx}$  est donnée par :

$$D_{xx} = \frac{2e^2}{m^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 d\mu \frac{k^4 dk}{(2\pi)^3} I_k(t) (1-\mu^2) \cos^2 \phi \delta(a-b \cos \phi) \quad (\text{B.1.a})$$

Avec un changement de variables  $x = \cos \phi$ , l'intégrale sur  $\phi$  donne :

$$2 \int_{-1}^{+1} \frac{dx x^2}{\sqrt{1-x^2}} \delta(a-bx) = \begin{cases} \frac{2a^2/b^2}{\sqrt{b^2-a^2}} ; & b^2 > a^2 \text{ ou } \alpha - \beta < \mu < \alpha + \beta \\ 0 ; & a^2 > b^2, \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

et  $\alpha = \frac{v_{\parallel}}{v} \lambda$ ,  $\beta = \frac{v_{\perp}}{v} \sqrt{1-\lambda^2}$ ,  $\lambda = \frac{\omega_k}{kv}$ . Comme  $(\alpha+\beta)$  est toujours inférieur à un tandis que  $\alpha-\beta \leq 0$ , l'intégrale sur  $\mu$  devient :

$$I_k(v_{\parallel}, v_{\perp}) = 2 \int_A^{\alpha+\beta} \frac{d\mu (a^2/b^2) (1-\mu^2)}{\sqrt{b^2-a^2}}, \quad A = \begin{cases} \alpha-\beta & \text{si } \alpha-\beta > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha-\beta \leq 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

1) Cas où  $\alpha-\beta > 0$ , ce qui implique  $v_{\perp} < \omega_k/k$  et l'intégrale dans (B.3) donne :

$$I_k^{(1)}(v_{\parallel}, v_{\perp}) = \frac{2\pi}{kv} \left\{ \lambda^2 \frac{v_{\perp}^2}{v^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{2v^2} (1-\lambda^2) \right\}, \quad (\text{B.4})$$

2) Cas où  $\alpha-\beta \leq 0$ , ce qui implique  $v_{\perp} \geq \omega_k/k$  et l'intégrale dans (B.3) donne :

$$I_k^{(2)}(v_{\parallel}, v_{\perp}) = \frac{2\pi}{kv} \left\{ \left[ \frac{v_{\perp}^2 \lambda^2}{v^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{2v^2} (1-\lambda^2) \right] \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Arc sin } \frac{\alpha}{\beta} \right] - \frac{v_{\parallel}}{\pi v} \lambda \sqrt{\frac{v_{\perp}^2}{v^2} - \lambda^2} \left( 2 + \frac{v_{\parallel}^2}{2v^2} \right) \right\} \quad (\text{B.5})$$

Enfin, on a pour  $D_{xx}$ , compte tenu du fait que lorsque  $v_{\perp} \leq \omega_k/k$  impliquant  $k \leq \lambda_D^{-1} \sqrt{\frac{C_s^2}{v_{\perp}^2} - 1}$ ,

$$D_{xx} = \frac{v^3}{2} \left[ \int_0^{K_0} k^3 dk \alpha_k(t) \hat{I}_k^{(1)}(v_{\parallel}, v_{\perp}) + \int_{K_1}^{\infty} k^3 dk \alpha_k(t) \hat{I}_k^{(2)}(v_{\parallel}, v_{\perp}) \right], \quad (\text{B.6})$$

$$\text{où } K_1 = \begin{cases} K_0 & \text{si } v_{\perp} < C_s \\ 0 & \text{si } v_{\perp} \geq C_s \end{cases}, \quad K_0 = \lambda_D^{-1} \sqrt{\frac{C_s^2}{v_{\perp}^2} - 1},$$

et  $\hat{I}_k^{(j)} = I_k^{(j)} kv_e$ ;  $I_k^{(j)}$ ,  $j=1,2$  sont respectivement donnés par (B.4) et (B.5). On peut aussi écrire  $D_{xx}$  sous une forme plus commode :

$$D_{xx} = \frac{v_e^3}{2} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{K_0} k^3 dk \alpha_k(t) \hat{I}_k^{(1)}(v_{\parallel}, v_{\perp}), \quad v_{\perp} < C_s / \sqrt{2} \\ \int_0^{K_0} k^3 dk \alpha_k(t) \hat{I}_k^{(1)}(v_{\parallel}, v_{\perp}) + \int_K^{\infty} k^3 dk \alpha_k(t) \hat{I}_k^{(2)}(v_{\parallel}, v_{\perp}), \\ \quad \frac{C_s}{\sqrt{2}} < v_{\perp} < C_s \\ \int_0^{\infty} k^3 dk \alpha_k(t) \hat{I}_k^{(2)}(v_{\parallel}, v_{\perp}), \quad v_{\perp} \geq C_s \end{array} \right. \quad (B.7)$$

De la même façon, on peut calculer  $D_{xy} = D_{yx}$ ,  $D_{xz} = D_{zx}$ ,  $D_{yz} = D_{zy}$ ,  $D_{yy}$  et  $D_{zz}$  et on obtient, à l'aide des relations (B.6.a), (III.6.b) et (III.6.c), les résultats suivants :

$$\langle \vec{\Delta \hat{W}} \cdot \vec{\Delta \hat{W}} \rangle = \frac{4\pi v_e^3}{v} \int_0^t dt' \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{K_0} dk k^3 \alpha_k(t'), \quad v_{\perp} < C_s / \sqrt{2} \\ \int_0^{K_0} dk k^3 \alpha_k(t') + \int_{K_0}^{\infty} dk k^3 \alpha_k(t') A_k(v_{\parallel}, v_{\perp}), \\ \quad \frac{C_s}{\sqrt{2}} < v_{\perp} < C_s \\ \int_0^{\infty} dk k^3 \alpha_k(t') A_k(v_{\parallel}, v_{\perp}), \quad v_{\perp} \geq C_s \end{array} \right. \quad (B.8)$$

$$\langle \vec{W} \cdot \vec{\Delta \hat{W}} \rangle = \frac{2\pi v_e^3}{v} \int_0^t dt' \left\{ \begin{array}{l} - \int_0^k k^3 \alpha_k(t') dk \frac{(\vec{W} \cdot \hat{v})}{v} + L_1, \quad v_{\perp} < C_s / \sqrt{2} \\ - \frac{\vec{W} \cdot \hat{v}}{v} \int_0^{K_0} k^3 dk \alpha_k(t') + \int_{K_0}^{\infty} k^3 dk \alpha_k(t') B_k(v_{\parallel}, v_{\perp}) \\ \quad + L_2, \quad \frac{C_s}{\sqrt{2}} < v_{\perp} < C_s \\ \int_0^{\infty} dk k^3 \alpha_k(t') B_k(v_{\parallel}, v_{\perp}), \quad v_{\perp} \geq C_s \end{array} \right. \quad (B.9)$$

et

$$\langle (\vec{w} \cdot \Delta \vec{w})^2 \rangle = \frac{4\pi v^5 e}{\bar{v}} \int_0^t dt' \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{K_0} k^3 dk \alpha_k(t') C_k(v_{\parallel}, v_{\perp}), \quad v_{\perp} < C_s / \sqrt{2} \\ \int_0^{K_0} k^3 dk \alpha_k(t) C_k(v_{\parallel}, v_{\perp}) \\ + \int_{K_0}^{\infty} dk k^3 \alpha_k(t') E_k(v_{\parallel}, v_{\perp}), \quad \frac{C_s}{\sqrt{2}} < v_{\perp} < C_s \\ \int_0^{\infty} dk k^3 \alpha_k(t') E_k(v_{\parallel}, v_{\perp}), \quad v_{\perp} \geq C_s \end{array} \right. \quad (\text{B.10})$$

$$A_k(v_{\parallel}, v_{\perp}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Arc sin} \frac{\lambda v_{\parallel} / v}{\sqrt{1-\lambda^2}},$$

$$B_k(v_{\parallel}, v_{\perp}) = \left( -\frac{\vec{w} \cdot \hat{v}}{v} + \vec{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right) A_k(v_{\parallel}, v_{\perp}),$$

$$C_k(v_{\parallel}, v_{\perp}) = \frac{\bar{u}^2 \bar{v}_{\perp}^2}{2\bar{v}^2} (1-\lambda^2) + \frac{\lambda^2}{\bar{v}^2} (\bar{w}^2 + \bar{u} \bar{w}_{\parallel})^2,$$

$$E_k(v_{\parallel}, v_{\perp}) = A_k \lambda^2 (\hat{w} \cdot \hat{v})^2 - (2\bar{w}^2 + 3\bar{u} \bar{w}_{\parallel} + \bar{u}^2) \times \\ \frac{\lambda \bar{u}}{\pi \bar{v}} \sqrt{\frac{\bar{v}_{\perp}^2}{\bar{v}^2} - \lambda^2} + A_k \frac{\bar{v}_{\perp}^2}{\bar{v}^3} (1-\lambda^2) \frac{\bar{u}^2}{2},$$

$$\bar{v}_{\parallel} = \bar{w}_{\parallel} + \bar{u}, \quad \bar{v}_{\perp} \equiv \bar{w}_{\perp}, \quad \bar{v} = v/v_e > \sqrt{\frac{m}{2M}} \quad (\text{B.11})$$

De par la complexité des expressions (III.9)-(III.11), le comportement des cumulants, appelé ici  $\bar{C}_1^*$  et  $\bar{C}_2^*$ , reste masqué. Ces cumulants peuvent être représentés par une seule expression (uniquement pour  $v_{\perp} \geq C_s$ ) du fait que la proportion des particules ayant une composante de vitesse  $v_{\perp} \equiv w_{\perp} < C_s$  est négligeable, puis-

qu'elle est d'ordre  $\frac{1}{n_0} \int_{w_{\perp} < C_s} d\vec{w} F_e(w) \approx \left(\frac{m}{2M}\right)$ . On trouve que cette

proportion est inférieure à 1 % pour  $m/M = 1/100$  tandis que pour un plasma d'hydrogène, cette proportion est suffisamment petite. Ce qui nous permet de représenter  $\bar{C}_1^*$  et  $\bar{C}_2^*$  par des expressions pour  $w_{\perp} \geq C_s$  et on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_2^* &= \frac{4\pi v_e}{\bar{v} \bar{w}^2} \int_0^t dt' \int_0^{\infty} dk k^3 \alpha_k(t') E_k(v_{\parallel}, v_{\perp}) \\ \bar{C}_1^* &= \frac{2\pi v_e}{\bar{v} \bar{w}} \int_0^t dt' \int_0^{\infty} dk k^3 \alpha_k(t') \left( A_k(v_{\parallel}, v_{\perp}) + B_k(v_{\parallel}, v_{\perp}) \right) \\ &\quad - \bar{C}_2^*/2\bar{w} , \end{aligned} \right\} \text{(B.12)}$$

où  $A_k$ ,  $B_k$  et  $E_k$  sont donnés par (B.11). On remarque que lorsqu'on compare les résultats (B.12) avec les résultats obtenus dans le cas du spectre isotrope (cf. (III.10)), on trouve que dans  $\bar{C}_1^*$  les contributions dues à l'anisotropie du spectre se manifestent dans  $A_k(v_{\parallel}, v_{\perp})$ , par le terme  $\text{Arc sin} \frac{\lambda v_{\parallel}/v}{\sqrt{1-\lambda^2}}$ , et puisque

$\lambda = \frac{\omega_k}{kv} \sim \sqrt{\frac{m}{2M}} \ll 1$  ; alors  $\text{Arc sin}(\dots) \sim \lambda v_{\parallel}/v \sqrt{\frac{m}{2M}}$ . Ce qui montre que les corrections dans  $\bar{C}_1^*$  sont d'ordre  $\sqrt{\frac{m}{2M}}$ .

\* \*  
\*

## APPENDICE (C)

CALCUL DES CUMULANTS DANS LE CAS D'UN SPECTRE ANISOTROPE

Comme nous l'avons vu, pour calculer les cumulants, il suffirait de calculer le tenseur de diffusion puisque les quantités constituant ces cumulants sont liées via (II.6a), (II.6b) et (II.6c). Dans le cas des ions, on distingue deux domaines :

i) Domaine résonnant

Dans ce domaine le tenseur de diffusion s'exprime par, avec un spectre anisotrope  $I_{\vec{k}}(t) = 2I_k(t)\theta(\mu)$  ;  $\mu = \hat{k} \cdot \hat{u}$ ,

$$D_{ij} = \frac{2\pi e^2}{M^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 d\mu \int_0^\infty \frac{d^2 dk}{(2\pi)^3} I_k(t) k_i k_j \delta(\omega_k - \vec{k} \cdot \vec{v}) ; \quad (C.1)$$

$$i, j = x, y, z$$

On donne, ici, le détail du calcul de  $D_{xx}$  et le calcul des autres composantes se fait de la même façon. Maintenant :

$$D_{xx} = \frac{2\pi e^2}{M^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 d\mu \int_0^\infty \frac{k^4 dk}{(2\pi)^3} (1-\mu)^2 \cos^2 \phi \delta(a-b \cos \phi) ;$$

$$a = \omega_k - kv_{\parallel} \mu, \quad b = kv_{\perp} \sqrt{1-\mu^2} \quad (C.2)$$

Avec un changement de variables  $\xi = \cos \phi$ , l'intégrale sur  $\phi$  donne :

$$2 \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi \xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}} \delta(a-b\xi) = 2 \begin{cases} \frac{a^2}{b^2 \sqrt{b^2 - a^2}}, & b^2 > a^2 \\ 0, & b^2 < a^2 \end{cases}$$



et  $b^2 > a^2$  implique  $\alpha - \beta < \mu < \alpha + \beta$  ;  $\alpha = \frac{v_{\parallel}}{v} \lambda$ ,  $\beta = \frac{v_{\perp}}{v} \sqrt{1 - \lambda^2}$ ,  
 $\lambda = \omega_k / kv$ . L'intégration sur  $\mu$  donne le même résultat qu'en  
 appendice B, et on obtient :

$$D_{xx} = 2C_s^3 \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{K_0} k^3 dk \alpha_k(t) \hat{I}_k^{(1)}(v_{\parallel}, v_{\perp}), \quad v_{\perp} < C_s / \sqrt{2} \\ \int_0^{K_0} k^3 dk \alpha_k(t) \hat{I}_k^{(1)}(v_{\parallel}, v_{\perp}) + \int_K^{\infty} k^3 dk \alpha_k(t) \hat{I}_k^{(2)}(v_{\parallel}, v_{\perp}), \\ \quad \frac{C_s}{\sqrt{2}} < v_{\perp} < C_s \\ \int_0^{\infty} dk k^3 \alpha_k(t) \hat{I}_k^{(2)}(v_{\parallel}, v_{\perp}), \quad v_{\perp} \geq C_s \end{array} \right. \quad (C.3)$$

avec  $\hat{I}_k^{(j)} = (I_k^{(j)} k C_s)$ , où  $I_k^{(j)}$ ,  $j = 1, 2$  sont respectivement donnés  
 par (B.4a) et (B.5a).

Finalement on obtient, pour les quantités constituant les cumu-  
 lants, des résultats comme ceux donnés par (B.8)-(B.11) en échan-  
 geant  $v_e$  par  $C_s$ ,  $\bar{u} = 0$  et en multipliant (B.8)-(B.11) par le  
 facteur 4.

### ii) Domaine non-résonnant ( $v < C_s / \sqrt{2}$ )

Dans ce domaine le tenseur de diffusion s'exprime par :

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{e^2}{M^2} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} k_i k_j \frac{\gamma_{\vec{k}} I_{\vec{k}}}{(\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v})^2 + \gamma_{\vec{k}}^2} \\ &= \frac{1e^2}{2M^2} \frac{\partial}{\partial t} \text{p.p.} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{k_i k_j I_{\vec{k}}(t)}{(\omega_{\vec{k}} - \vec{k} \cdot \vec{v})^2} \end{aligned} \quad (C.4)$$

Avec  $I_{\vec{k}}(t) = 2I_k(t)\theta(\mu)$ ,  $\mu = \hat{k} \cdot \hat{u}$ , l'expression (C.4) pour  
 $i, j = y$  devient : (avec les mêmes notations que dans le cas pré-  
 cédent)

$$\int_0^t D_{yy} dt' = \frac{e^2}{M^2} \text{p.p.} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 d\mu \int_0^{\infty} \frac{dk k^4}{(2\pi)^3} \frac{(1-\mu^2) \sin^2 \phi I_k(t)}{(a-b \cos \phi)^2} \quad (C.5)$$

Dans (C.5), l'intégrale sur  $\phi$  donne :

$$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sin^2 \phi}{(a-b \cos \phi)^2} = \frac{2\pi}{b^2} \left[ \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} - 1 \right] ; \quad (C.5a)$$

$a^2 > b^2$

La condition  $a^2 > b^2$  est satisfaite pour  $0 \leq \mu \leq 1$  puisque dans le domaine non-résonnant  $v < \omega_k/k$  et l'intégrale sur  $\mu$  donne :

$$\begin{aligned} I_k(v_{\parallel}, v_{\perp}) &= \int_0^1 \frac{d\mu(1-\mu^2)}{b^2} \left[ \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} - 1 \right] \\ &= \left\{ \frac{\lambda}{2k^2 v^2} \left[ \text{Log} \frac{(\lambda+1)}{(\lambda-1)} + \text{Log} \left( \frac{A_+ B_-}{A_- B_+} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{(v_{\parallel}/v)}{k^2 v_{\perp}^2} \left( \frac{1}{(\lambda-v_{\parallel}/v)} - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - v_{\perp}^2/v^2}} \right) - \frac{1}{k^2 v_{\perp}^2} \right\}, \\ A_{\mp} &= \sqrt{\lambda^2 - v_{\perp}^2/v^2} \mp \frac{\lambda v_{\parallel}}{v}, \quad B_{\mp} = (1 \mp v_{\parallel}/v). \end{aligned} \quad (C.5b)$$

et (C.5) devient :

$$\int_0^t D_{yy} dt' = 2C_s^2 \int_0^{\infty} dk k^2 \alpha_k(t) \left( I_k(v_{\parallel}, v_{\perp}) C_s^2 k^2 \right) \quad (C.6)$$

De la même façon, on peut calculer les autres composantes, et obtenir, pour les quantités moyennes  $\langle \Delta \vec{v} \Delta \vec{v} \rangle$ ,  $\langle \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \rangle$  et  $\langle (\vec{v} \cdot \Delta \vec{v})^2 \rangle$ , les résultats :

$$\begin{aligned} \langle \Delta \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \rangle &= \frac{4C_s^2}{v^2} \int_0^{\infty} dk k^2 \alpha_k(t) \psi(\lambda, v_{\parallel}, v_{\perp}) \\ \langle \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \rangle &= \frac{4C_s^2}{v^2} \int_0^{\infty} \frac{dk k^2 \alpha_k(t)}{(\lambda^2 - 1)} \left[ \psi(\lambda, v_{\parallel}, v_{\perp}) + \frac{\lambda^2 v_{\parallel}/2v}{(\lambda^2 - v_{\perp}^2/v^2)^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

$$\langle (\vec{v} \cdot \Delta \vec{v})^2 \rangle = 4C_S^4 \int_0^\infty dk k^2 \alpha_k(t) \left[ 1 - \lambda \left( \log \frac{\lambda+1}{\lambda-1} + \log \left( \frac{A_+ B_-}{A_- B_+} \right) \right) + \lambda^2 \psi(\lambda, v_{\parallel}, v_{\perp}) \right],$$

où  $\psi(\lambda, v_{\parallel}, v_{\perp}) = \frac{1}{(\lambda^2 - 1)} \left( 1 + \frac{v_{\parallel}/v}{(\lambda^2 - v_{\perp}^2/v^2)^{1/2}} \right)$ , et (C.7)

$A_{\mp}$  et  $B_{\mp}$  sont donnés dans (C.5a).

En reportant les résultats (C.7) dans les expressions des cumulants, on obtient les résultats (IV.8).

\* \*  
\*



APPENDICE (D)

EFFET DE L'ELARGISSEMENT DE RESONANCE  
SUR L'EVOLUTION DE LA FDM IONIQUE

Nous avons montré au chapitre II (partie II) que la FDM est donnée en fonction des premier et second cumulants. Alors, pour étudier l'effet de l'élargissement de résonance sur l'évolution de la FDM (ionique), il suffit de déterminer les modifications des cumulants dues à l'élargissement de résonance par rapport aux résultats précédents.

Dans ce qui suit, nous effectuons le calcul des cumulants en utilisant la fonction de résonance renormalisée. A l'aide du résultat obtenu pour cette fonction (cf. chapitre III première partie et chapitre I deuxième partie), on peut montrer que les moyenne et quadratique moyenne de la déviation de la vitesse sont données par :

$$\left. \begin{aligned} \langle \Delta \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \rangle &= \frac{4C_s^3 \pi}{\bar{v}} \int_0^t dt' \int_0^\infty dk k^3 \alpha_k(t') P_1(k, \bar{v}, \epsilon(t')) , \\ \langle \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \rangle &= -\frac{1}{2} \langle \Delta \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \rangle + 2C_s^3 \sqrt{\pi} \int_0^t dt' \int_0^\infty dk k^3 \alpha_k(t') Q_1(k, \bar{v}, \epsilon(t')) \\ \text{et} \\ \langle (\vec{v} \cdot \Delta \vec{v})^2 \rangle &= \frac{4\pi C_s^3}{\bar{v}} \int_0^t dt' \int_0^\infty dk k^3 \alpha_k(t') a^2 P_1(k, \bar{v}, \epsilon(t')) , \end{aligned} \right\} (D.1)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= [\operatorname{erf}(L_-) + \operatorname{erf}(L_+)]/2 \\ Q_1 &= [\exp(-L_-^2) - \exp(-L_+^2)]/2\epsilon, \\ L_{\mp} &= (\bar{v} \mp a)/2\epsilon, \quad a = (1+k^2 \lambda_D^2)^{-1/2}, \quad \epsilon = v_i/kC_s, \quad \bar{v} = v/C_s \end{aligned} \right\} (D.1a)$$

A noter que les calculs sont effectués dans le cas du spectre isotrope. Dans le cas d'un spectre anisotrope, simulé par un spectre non nul seulement dans le demi-espace  $\vec{k}$  où  $\vec{k} \cdot \hat{u} > 0$ , le calcul est lourd et dans le but que nous cherchons, nous nous contentons de considérer uniquement le premier cas. On remarque qu'en faisant  $\varepsilon \rightarrow 0$ , les résultats (D.1) et (D.1a) se réduisent aux résultats obtenus par la théorie non renormalisée (cf. (IV.3)). En outre les résultats présents peuvent être écrits sous forme plus commode du fait que le spectre est piqué autour de  $k = \lambda_D^{-1}/\sqrt{2}$ , où en utilisant les mêmes notations qu'au chapitre IV :  $(\alpha, \tilde{\eta}, \tau)$  avec  $\alpha = \frac{d\tilde{\eta}}{d\tau}$ ,  $\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lambda_D^{-1} c_s t$ , les résultats (D.1) s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \langle \Delta \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \rangle &= \frac{c_s^2}{\bar{v}} P(\bar{v}, \tilde{\eta}) \\ \langle \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \rangle &= -\frac{c_s^2}{2\bar{v}} P(\bar{v}, \tilde{\eta}) + 2c_s^2 Q(\bar{v}, \tilde{\eta}) \\ \langle (\vec{v} \cdot \Delta \vec{v})^2 \rangle &= \frac{2}{3} \frac{c_s^4}{\bar{v}} P(\bar{v}, \tilde{\eta}) \end{aligned} \right\} \text{(D.2)}$$

avec

$$P(\bar{v}, \tilde{\eta}) = 4\sqrt{\pi} \int_0^{\tilde{\eta}} dy P_1(\bar{v}, \varepsilon(y)) \quad \left. \vphantom{P(\bar{v}, \tilde{\eta})} \right\} \text{(D.2a)}$$

et

$$Q(\bar{v}, \tilde{\eta}) = \int_0^{\tilde{\eta}} dy Q_1(\bar{v}, \varepsilon(y)) ,$$

et on obtient pour les premier et second cumulants les résultats

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_2 &= c_1/c_s^2 = P(\bar{v}, \tilde{\eta})/\bar{v}^3 \\ c_1 &= \frac{Q(\bar{v}, \tilde{\eta})}{2\bar{v}} - P(\bar{v}, \tilde{\eta})/2\bar{v}^4 \end{aligned} \right\} \text{(D.3)}$$

On remarque que :

- les résultats pour les cumulants donnés par (V.6) s'approchent des résultats obtenus dans le cas de la théorie non-renormali-

sée (cf. (IV.5)) lorsque  $\bar{v} > \bar{a} + 2\varepsilon$  car dans ce cas  $L_- > 1$  et on a  $L_+ > 1$ . Dans le domaine  $\bar{a} < \bar{v} < \bar{a} + 2\varepsilon$  les résultats (V.6) diffèrent de (IV.5).

- Qualitativement, puisque le domaine de résonance est élargi, ce qui est équivalent à considérer que le domaine de formation des ions énergiques est élargi. On s'attend alors à ce que la proportion des ions produite dans la queue de la FDM ionique soit augmentée, mais cette augmentation n'est pas sensible et que l'on peut l'estimer, sans effectuer trop de calcul lourd, par  $\varepsilon \times f_i(\bar{a}, t) \leq \varepsilon_{\max} f_i(\bar{a}, t \rightarrow \infty) \approx 0,1 \times 0,1 = 1 \%$ .

\*   \*  
\*   \*





REFERENCES

- [1] BURCHENKO, P.Ya, VOLKOV, E.D., MANZYUK, N.A., SUPRUNENKO, V.A. et SUKHOMLIN, A.A., Sov. Phys.-Technical Phys., 17-1232 (1973)
- [2] FRIED, B.D. et CONTE, S.D., The Plasma Dispersion Function (Academic, New York (1961))
- [3] KADOMTSEV, B.B. et PETVIASHVILI, V.I., JETP, 16-1578 (1963)
- [4] KADOMTSEV, B.B., Plasma Turbulence (Academic, New York, (1965))
- [5] GEKELMAN, W. et STENZEL, R.L., Phys. Fluids, 21-2014 (1978)
- [6] SLOAN, M.L. et DRUMMOND, W.E., Phys. Fluids, 13-2554 (1970)
- [7] SIZONENKO, V.L. et STEPANOV, K.N., Nucl. Fusion, 10-155 (1970)
- [8] DRUMMOND, W.E. et PINES, D., Nucl. Fusion Suppl. Pt., 3-1049 (1962)
- [9] VEDENOV, A.A., VELIKOV, E.D. et SAGDEEV, R.Z., Nucl. Fusion Suppl. Pt. 2-65 (1962)
- [10] BERNSTEIN, I.B. et ENGELMANN, F., Phys. Fluids, 9-937 (1966)
- [11] FRIEMAN, E. et RUTHERFORD, P., Ann. Phys., 28-134 (1964)
- [12] LAVAL, G. et PESME, D., Phys. Fluids, 26-52, 66 (1983)
- [13] FRISCH, U., In Probabilistic Methods in Applied Mathematics, (Academic, New York (1968)) Vol. I
- [14] AL'TSHUL, L.M. et KARPMAN, V.I., JETP, 22-361 (1966)
- [15] GALEEV, A.A., KARPMAN, V.I. et SAGDEEV, R.Z., Nucl. Fusion, 1-20 (1965)

- [16] WU, C.S., Phys. Fluids, 11-1733 (1968)
- [17] DRUMMOND, W.E. et PINES, D., Ann. Phys. (N.Y.), 28-478 (1964)
- [18] DUPREE, T.H., Phys. Fluids, 9-1773 (1966)
- [19] WEINSTOCK, J., Phys. Fluids, 12-1045 (1969)
- [20] RUDAKOV, L.I. et TSYTOVICH, V.N., Plasma Phys., 13-213 (1971)
- [21] PEYRAUD, N. et COSTE, J., J. Plasma Phys., 12-177 (1974)  
ROLLAND, P., J. Plasma Phys., 15-57 (1976)  
P ESME, D., Thèse d'état, Orsay (1979)
- [22] BIRMINGHAM, T.J. et BORNATICI, M., Phys. Fluids, 15-1778, 1785 (1972)
- [23] VAN KAMPEN, N.G., Phys. Reports, 24-171 (1976) et références citées
- [24] FOX, R.F., J. Math. Phys., 16-289 (1975) et références citées
- [25] GUPTA, M.R., J. Plasma Phys., 12-279 (1974)
- [26] KONO, M. et ICHIKAWA, Y.H., Prog. Theor. Phys., 49-754 (1973)
- [27] THOMSON, J.J. et BENFORD, G., J. Math. Phys., 14-531 (1973)  
THOMSON, J.F. et BENFORD, G., Phys. Fluids, 16-1505 (1973)
- [28] CHOI, D.I. et HORTON, J., Phys. Fluids, 17-2048 (1974)
- [29] MISGUICH, J.H. et BALESCU, R., J. Plasma Phys., 13-385 (1975) et références citées
- [30] PELLETIER, G. et POMOT, C., J. Plasma Phys., 14-153, 491 (1975)
- [31] CATTO, P.J., Phys. Fluids, 21-147 (1978)
- [32] HISGUICH, J.H. et BALESCU, R., EUR-CEA-FC Report 854 (1976)

- [33] SLEEPER, A., WEINSTOCK, Jr. et BEZZERIDES, Phys. Rev. Lett., 29-343 (1972)  
SLEEPER, A., WEINSTOCK, Jr. et BEZZERIDES, Phys. Fluids, 16-1508 (1973)
- [34] WESSON, J.A. et SYKES, A., Phys. Rev. Lett., 31-86 (1973)
- [35] TU-KHIET, Physics Lett., 44A-83 (1973)
- [36] DUM, C.T., CHODURA, R. et BISKAMP, D., Phys. Rev. Lett., 32, 1231 (1974)
- [37] BISKAMP, D. et CHODURA, R.C., Phys. Rev. Lett., 27-1553 (1971)
- [38] KAWAI, Y. et GUYOT, M., Phys. Rev. Lett., 39-1141 (1977)  
KAWAI, Y., HOLLENSTEIN, Ch. et GUYOT, M., Phys. Fluids, 21-970 (1978)
- [39] STENZEL, R.L., Phys. Fluids, 21-91 (1978)  
SLUSHER, R.E., SURKO, C.M., MOLER, D.R. et PORKOLAB, M., Phys. Rev. Lett., 36-674 (1976)
- [40] VEKSTEIN, G.E., RYUTOV, D.D. et SAGDEEV, R.Z., JETP, 12-291 (1970)
- [41] VEDENOV, A.A. et RYUTOV, D.D., Review of Plasma Phys. (1975) vol. 6 (éd. M.A. Leontovich). Consultant Bureau.
- [42] GALEEV, A.A., SAGDEEV, R.Z., Reviews of Plasma Phys. (1979), vol. 7 (éd. M.A. Leontovich). Consultant Bureau
- [43] DUM, C.T., Phys. Fluids, 21-945 (1978)
- [44] BALESCU, R., J. Plasma Phys., 24-551 (1980)
- [45] HORTON, J.W. et HOI, D.I., Phys. Reports, 49-273 (1979) p. 387, voir aussi :  
HORTON, J.W., CHOI, D.I. et KOCH, R.A., Phys. Rev. A, 14-424 (1976)

- [46] ISHIHARA, O. et HIROSE, A., Phys. Fluids, 26-100 (1983)
- [47] WILCOX, R.M., J. Math. Phys., 8-962 (1967)
- [48] SPITZER, L. et HARM, R., Phys. Rev., 89-1977 (1953)
- [49] KOCH, R.A. et HORTON, Jr., Phys. Fluids, 18-861 (1975)
- [50] APPERT, K. et VACLAVIK, Plasma Phys., 23-673 (1981)
- [51] ISHIHARA, O. et HIROSE, A., Phys. Rev. Lett., 46-771 (1981)  
Voir aussi [46]
- [52]-BENGTSON, R.D., GENTLE, K.W., JANCARIK, J., MEDELY, S.S.,  
NIELSEN, P. et PHILLIPS, P., Phys. Fluids, 18-710 (1975)  
-WHARTON, C., KORN, P., PRONO, D., ROBERTSON, S., AUER, P.,  
et DUM, C.T., In Plasma Physics and Controlled Nuclear  
Fusion Research (International Atomic Energy Agency,  
Vienna, 1971) vol. II, p. 25  
-PIEKAAR, H.W., Plasma Phys., 15-565 (1973)
- [53] VEKSHEIN, G.E. RYUTOV, D.D. et SAGDEEV, R.Z., In Plasma  
Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Internatio-  
nal Atomic Energy Agency, Vienna (1971)), vol. II, 293  
(English Translation in Nucl. Fusion Suppl. 153 (1972))
- [54] CAPONI, M.Z. et DAVIDSON, R.C., Phys. Fluids, 17-1394 (1974)
- [55] HATORI, T. et SUGIHARA, R., Nagoya University Report No  
IPPJ, 176 (1973)
- [56] MANHEIMER, W.M. et FLYNN, R.W., Phys. Fluids, 17-409 (1974)
- [57] CHOI, D.I. et HORTON, W.Jr., Phys. Fluids, 18-858 (1975)
- [58] TUKHIET, J. de Physique Lettres, 50-L 464 (1979)
- [59] COPSON, E.T., Asymptotic Expansions (Cambridge University  
Press, Cambridge (1965)), Chap. V.

**ANNEXE**



Classification  
 Physics Abstracts  
 52.35

## Self-similar solutions of the quasilinear relaxation of a kinetic electron beam

Tu Khiet and H. Abdel-Gawad

Laboratoire de Physique des gaz et des plasmas (\*), Université Paris Sud, 91405 Orsay, France

(Reçu le 18 décembre 1979, accepté le 26 février 1980)

**Résumé.** — On étudie le problème dynamique de la relaxation d'un faisceau cinétique d'électrons. La solution en plateau à l'état asymptotique se trouve comme un cas particulier d'une famille de solutions auto-similaires exactes de l'équation d'évolution quasi linéaire.

**Abstract.** — We study the dynamics of the relaxation of a kinetic electron beam. The asymptotic plateau distribution is shown to be a particular case of a family of exact self-similar solutions of the quasilinear equation.

The quasilinear theory of unstable waves is probably the best known in nonlinear plasma physics as it has received extensive investigation since the pioneering works of Vedenov, Velikhov and Sagdeev and of Drummond and Pines [1, 2]. In these papers, devoted to the problem of relaxation of an electron distribution having a beam-on-the-tail, these authors arrived at the same conclusion namely that the beam is flattened out in such a way that in the final state, a plateau is formed irrespective to the detailed form of the initial beam. This conjecture seems to have been consolidated afterward by the work of Bernstein and Engelmann [3] who gave a decisive argument in favour to the above assertion. However, computational experiments do not always confirm this theoretical prediction.

The aim of this short note is to remove, even partially, the above apparent paradox. To this end, we pay special attention to study the dynamics of the relaxation of a kinetic beam first considered by Ivanov and Rudakov [4]. We show that the diffusion coefficient which is proportional to the wave spectrum and described by a nonlinear partial differential equation, has a self-similar evolution in the form  $D = v^{m+2} \Phi(z)$  where  $z = v^m t$ , the various quantities are appropriately normalized,  $m$  is an arbitrary parameter and  $\Phi$  obeys a nonlinear ordinary differential equation which can be analysed with some details. In particular, a choice with  $m = 1$  leads to an entirely soluble solution presenting the only possibility of obtaining a plateau distribution in the asymptotic time limit.

We now consider an electron plasma composed

of a thermal population having a density  $n_0$  and a beam characterized by a density  $n_1$  with  $n_1 \ll n_0$ . The thermal part is assumed to be Maxwellian with a thermal velocity  $v_T$ , the beam part is centred at a velocity  $U$  and extends between the values  $v_1 = U - \Delta U$  and  $v_2 = U + \Delta U$  with  $U \gg v_T$  and  $\Delta U/U \gg (n_1/n_0)^{1/3}$  in order to satisfy the kinetic beam condition. As is well known, waves are excited in the early stage in the domain of phase velocity  $v$  such that  $v_1 < v < U$  with a growth rate of the order of  $\gamma_m = n_1 U^2/n_0 \Delta U^2$ .

From now on, we are only concerned with the beam part whose evolution is described by the set of equations

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial F}{\partial v} \tag{1}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \pi \alpha v^2 D \frac{\partial F}{\partial v}; \quad \alpha = n_1 \omega/n_0 \tag{2}$$

$$D = \frac{\pi e^2}{m^2} \int dk |E(k, t)|^2 \delta(\omega - kv) \tag{3}$$

where the notations are standard. The above equations admit an invariant

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{D - D_0}{\pi \alpha v^2} \right) = F - F_0 \tag{4}$$

here subscripts refer to the initial state ( $t = 0$ ). In addition the function  $D$  can be described by a closed equation resulting from a combination of (2) and (4) as

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \pi \alpha D v^2 \frac{\partial F_0}{\partial v} + v^2 D \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left( \frac{D - D_0}{v^2} \right). \tag{5}$$

(\*) Laboratoire associé au C.N.R.S.

It is worth noticing that  $D_0$  can be neglected in the equation except when  $D$  is vanishingly small. Bearing this in mind we now solve (5) separately in the region where  $F_0$  is nonvanishing and in the region where it is negligibly small, respectively.

1)  $v_1 < v < U$ . In this domain, equation (5) shows that waves are built up, by means of the linear term, and simultaneously diffused out of this domain by means of the nonlinear term. A characteristic time,  $t_c$ , of the evolution of the waves in this domain can be estimated as that required to diffuse the beam by an amount  $\Delta U$  in velocity space, this yields  $t_c = \Delta U^2/D$ . Assuming that  $D$  maintains its exponential form, i.e.,  $D = D_0 \exp(2\gamma_m t)$ , we obtain

$$t_c = \gamma_m^{-1} \text{Log} (2\gamma_m \Delta U^2/D_0). \quad (6)$$

Owing to the fact that the particles are evacuated out of this domain denoted as the production range, we speculate that a stationary state will be reached at the end of the relaxation. Whenever such a state exists, it is described by integrating (5) with  $\partial D/\partial t = 0$  to give

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{D}{\pi \alpha v^2} \right) = F - F_0 \quad (7)$$

where the constant of integration  $F$  can be identified, by comparing (7) with (4), as the asymptotic value of  $F$  in the production range. We then prove that in the hypothesis of an existence of a steady state, the distribution function tends towards a constant value which will be determined later on by requiring that the distribution be continuous in the vicinity of the frontier with the next domain we now consider.

2)  $v_T < v < v_1$ . In this domain, the function  $F_0$  vanishes, equation (5), in terms of dimensionless variables and function reduces to

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = x^2 \Psi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\Psi}{x^2} \right) \quad (8)$$

where

$$x = \frac{v}{U}; \quad \tau = \alpha t; \quad \Psi = D/U^2 \alpha. \quad (9)$$

We can easily see that (8) admits a class of self-similar solutions depending on a parameter  $m$  in the form

$$\begin{aligned} \Psi &= x^{m+2} \Phi(z) \\ z &= x^m \tau \end{aligned} \quad (10)$$

and the function  $\Phi$  satisfies the equation

$$\frac{d}{dz} \text{Log} \Phi = m^2 z^{\frac{1}{m}} \frac{d}{dz} z^{\frac{m-1}{m}} \frac{d}{dz} (z\Phi) \quad (11)$$

which can be integrated once to give

$$\text{Log} \left( \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) = m^2 z^{\frac{m+1}{m}} \frac{d}{dz} \left( z^{\frac{m-1}{m}} \Phi \right) \quad (12)$$

where the constant of integration  $\Phi_0$  is the value of  $\Phi$  at  $z = 0$  or at  $t = 0$ .

We now choose  $m = 1$  which gives for (12) a completely soluble equation. The relevant function can be seen as a nondecreasing function of the variable  $z$ , it starts from the value  $\Phi_0$  at  $z = 0$  and tends to a constant value,  $\Phi_M$ , which is a constant of integration, when  $z \rightarrow \infty$ . The solution to (5) can be written explicitly as

$$\text{Li} \left( \frac{\Phi_M}{\Phi_0} \right) - \text{Li} \left( \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) = \frac{1}{z\Phi_0} \quad (13)$$

where  $\text{Li}$  denotes the logarithm integral function. The function  $\Phi$  behaves in the limits of small  $z$  and large  $z$ , respectively as

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 + (\Phi_M - \Phi_0) \exp(-1/z\Phi_0); & z < 1 \\ \Phi &= \Phi_M - \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2\Phi_M} \right) \text{Log} \left( \frac{\Phi_M}{\Phi_0} \right); & z > 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Turning now to the distribution function which can be seen from (4) as a function of a single variable,  $z$ , as  $F = \frac{1}{U} \frac{d}{dz} (z\Phi)$ . Using (14), we can see that  $F$  behaves in the region where it is not vanishingly small as

$$F = F_M \left( 1 - \frac{z_m^2}{z^2} \right); \quad z > 1 \quad (15)$$

where  $z_m = \Phi_M^{-1} (0.5 \text{Log} (\Phi_M/\Phi_0))^{1/2}$  and  $F_M = \frac{\Phi_M}{\pi U}$ .

From the above analysis, we find that the relaxation does not run simultaneously in each point of the velocity space. For a given time,  $F$  is largest in the vicinity of  $v_1$  where  $z$  is largest, while it decreases abruptly to zero at a smaller velocity which constitutes the wave front whose position,  $x_m$ , can be deduced by extrapolating the large  $z$  behaviour of  $F$  up to the region where it is small, giving

$$x_m = \frac{z_m}{\tau}. \quad (16)$$

As a result, the function  $F$ , like a heat wave, propagates from  $v_m$  towards smaller velocities. Behind the wave front, the distribution function tends to flatten according to (15) and reaches an asymptotic value  $F_M$  in the limit  $t \rightarrow \infty$ . We require that  $F_M = F_\infty$  in order to obtain a continuous solution in the vicinity of  $v_1$ .

The sketch of variation of the function  $F$  is schematically plotted in figure 1 for some representative times.

The quasilinear relaxation is terminated when the wave front approaches the domain of thermal particles. Putting  $x_m = v_T/U$  into (16) we obtain the saturation time as

$$t_{\text{sat}} = \gamma_m^{-1} \left( \frac{U^3}{v_T \Delta U^2} \right)$$



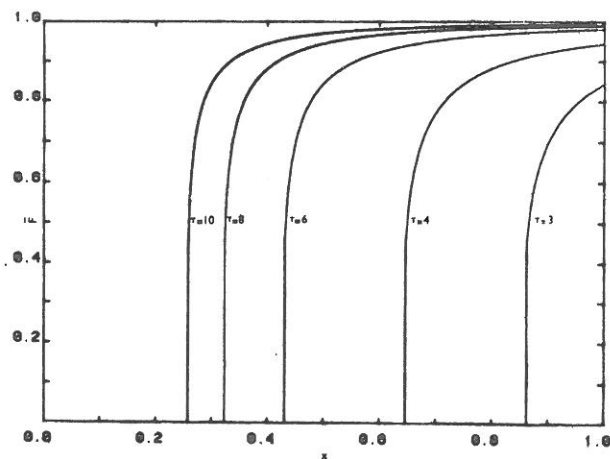


Fig. 1. — Variation of the normalized distribution function,  $\bar{F} = UF$ , as a function of  $x = \frac{v}{U}$  in the domain of resonant velocities for several values of  $\tau = \left(\frac{n_1}{n_0}\right)\omega t$ .

and the final level of the distribution function deduced from the law of conservation of particles is  $F_M = 1/U$ .

Let us now compare our work with that of Ivanov and Rudakov. In our opinion our results are more rigorous for a number of points :

i) In solving the diffusion equation, Ivanov and Rudakov used the approximation  $v = U$  in the basic equation, consequently, their solution cannot be extended in the whole region of velocities. Their solution however, is remarkably similar to ours.

ii) Without approximating the basic equation, we have pointed the existence of many other solutions ( $m \neq 1$ ). Reserving the investigation of these possible solutions to a further publication, we give here only a brief comment whether or not they correspond to a physical situation. Since they behave at large  $z$  as  $C/(z^{\frac{m-1}{m}})$  where  $C$  is a constant of integration, it is obvious that a choice with  $0 < m < 1$  will lead to a unphysical situation. Solutions corresponding to  $m < 0$  or  $m > 1$  are acceptable; they behave as a damped solution and do not give a plateau.

iii) We have been able to show the way to which the distribution function is flattened behind the wave front in contrast to ref. [4] where this assertion is only conjectural.

As a conclusion, a plateau solution is not a unique way towards which the distribution function evolves. Non-plateau solutions have been observed in computational experiments [5] and their existence is theoretically explained by our work.

Finally we wish to express our thanks to the referees of this article for their pertinent criticisms.

References

[1] VEDENOV, A. A., VELIKHOV, E. P. and SAGDEEV, R. Z., *Nucl. Fusion Suppl.* (1962) 465.  
 [2] DRUMMOND, W. E. and PINES, D., *Nucl. Fusion Suppl.* (1962) 1049.  
 [3] BERNSTEIN, I. B. and ENGELMANN, F., *Phys. Fluids* 9 (1966) 937.  
 [4] IVANOV, A. A. and RUDAKOV, L. I., *Sov. JETP* 24 (1967) 1027.  
 [5] DAWSON, J. M. and SHANNY, R., *Phys. Fluids* 11 (1968) 1506.





## RESUME

Dans cette thèse nous appliquons les techniques récemment développées dans la théorie de la turbulence à l'étude de l'évolution de l'instabilité acoustique ionique, générée par un courant de dérive électronique. Nous présentons une méthode permettant de décrire analytiquement et d'une manière autocohérente la dynamique de la déformation de la fonction de distribution des particules en même temps que l'évolution de l'énergie turbulente. Nous avons ainsi discerné les différents mécanismes de saturation de l'instabilité ainsi que leur domaine de validité.

### Mots clés

- Théories renormalisées
- Instabilité acoustique ionique
- Fonction de distribution moyenne
- Mécanismes de saturation