

ORSAY
n° d'ordre :

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR 3^{ème} CYCLE

PAR

..... Christian GAUTHEREAU

SUJET : ETUDE DE L'EQUILIBRE D'UNE DECHARGE MULTIPOLAIRE

soutenu le 25 Novembre 1983 devant la Commission d'examen

MM. DELCROIX J.L. Président

..... DUCLOY M.

..... GERVAT A.

..... MATTHIEUSSENT G.

..... SAMAIN A.

Cette thèse a été préparée dans le Laboratoire de Physique des Gaz et des Plasmas dont le directeur, Monsieur le Professeur J.L. DELCROIX, a accepté de présider le jury ; je l'en remercie.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Messieurs M. DUCLOY, A. GERVAT, A. SAMAIN qui m'ont fait l'honneur de participer au jury.

G. MATTHIEUSSENT a proposé et dirigé ce travail. Il a su, à travers des discussions quotidiennes, me communiquer une parcelle de son savoir ; je l'en remercie tout particulièrement.

Je remercie Monsieur J. GODIOT qui, par sa diligence, son savoir-faire et sa gentillesse, a permis la réalisation des quelques expériences décrites dans le présent mémoire.

Monsieur J.L. RAUCH a formulé des remarques judicieuses qui ont contribué à l'avancement de ce travail ; je l'en remercie.

J'exprime ma reconnaissance à Madame VERGAND qui a assuré le travail ingrat du tirage, ainsi qu'au personnel de la société DUPLICATOUT qui a frappé ce texte avec compétence.

Enfin, merci à Sylvie : élaguant un texte broussailleux, elle a su le rendre lisible.

SOMMAIRE

<u>INTRODUCTION</u>	1
---------------------------	---

CHAPITRE I : PHYSIQUE DES DECHARGES MULTIPOLAIRES

I.1. DESCRIPTION DU DISPOSITIF.....	3
I.2. CONFINEMENT DES ELECTRONS PRIMAIRES.....	7
I.3. CONFINEMENT DU PLASMA.....	9
I.4. PROFILS DE DENSITE.....	10

CHAPITRE II : PROFILS DE DENSITE DES PLASMAS MULTIPOLAIRES

II.1. INTRODUCTION.....	14
II.2. THEORIE COLLISIONNELLE.....	15
II.2.A. Domaine de validité.....	15
II.2.B. Equations d'équilibre.....	15
II.2.C. Profils de densité : régime collisionnel.	17
II.3. THEORIE NON COLLISIONNELLE.....	27
II.3.A. Plasmas non confinés.....	27
II.3.B. Plasmas multipolaires.....	32
II.4. DISCUSSION.....	37
LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISES.....	38

CHAPITRE III : ETUDE DES TRAJECTOIRES DES ELECTRONS PRIMAIRES DANS LE CHAMP MULTIPOLAIRE

III.1. INTRODUCTION.....	40
III.2. EQUATIONS DU MOUVEMENT.....	42
III.3. COORDONNEES REDUITES.....	44
III.4. CONFIGURATION DU CHAMP MULTIPOLAIRE.....	47
III.4.A. Topographie du champ.....	47
III.4.B. Symétries.....	49
III.5. ZONES INTERDITES ET PARTICULES PIEGEES.....	52

III.6.	APPROXIMATION ADIABATIQUE.....	55
III.6.A.	Domaine de validité.....	55
III.6.B.	Equations du mouvement adiabatiques.....	59
III.6.C.	Invariants adiabatiques.....	64
III.6.D.	Application au champ multipolaire.....	67
III.7.	PROGRAMME DE CALCUL DES TRAJECTOIRES.....	71
III.7.A.	Méthode utilisée.....	71
III.7.B.	Choix des constantes et précision du calcul.....	71
III.8.	TRAJECTOIRES DES PARTICULES PIEGEES.....	74
III.8.A.	Particules piégées adiabatiques.....	74
III.8.B.	Particules piégées non adiabatiques.....	83
III.9.	TRAJECTOIRES DES PARTICULES LIBRES.....	88
	LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISES.....	96

CHAPITRE IV : CALCUL DE LA DENSITE DES ELECTRONS
PRIMAIRES DANS L'ENCEINTE : DIFFUSION
PAR LES PAROIS

IV.1.	DESCRIPTION DU MODELE.....	98
IV.2.	EXPRESSION DE LA DENSITE DES ELECTRONS PRIMAIRES.....	100
IV.2.A.	Calcul du flux sur la paroi.....	100
IV.2.B.	Calcul de la densité des primaires.....	101
IV.2.C.	Application.....	102
IV.3.	CALCUL NUMERIQUE.....	105
IV.3.A.	Calcul du flux.....	105
IV.3.B.	Calcul de la densité des primaires.....	106
IV.4.	CALCUL DE LA DENSITE DES ELECTRONS SECONDAIRES.....	112
IV.5.	CONCLUSION.....	112

CHAPITRE V : CALCUL DE LA DENSITE DES ELECTRONS
PRIMAIRES DANS L'ENCEINTE MULTIPOLAIRE :
PRISE EN COMPTE DU CHAMP MAGNETIQUE

V.1.	INTRODUCTION.....	114
V.2.	EQUATION DE LIOUVILLE.....	115
V.3.	SIMULATION PARTICULAIRE.....	116
V.3.A.	Principe du calcul.....	116
V.3.B.	Conditions initiales.....	116

V.4.	TESTS DE VALIDITE.....	122
	V.4.A. Champ magnétique nul.....	122
	V.4.B. Convergence numérique.....	122
V.5.	RESULTATS.....	126
	V.5.A. Densité des électrons primaires.....	126
	V.5.B. Nombre d'électrons primaires au voisinage des parois.....	131
V.6.	CONCLUSION.....	131

CHAPITRE VI : EVALUATION DE LA DENSITE DES PRIMAIRES
DANS UN CUSP : THEORIE ADIABATIQUE

VI.1.	INTRODUCTION.....	133
VI.2.	CALCUL DU TEMPS PASSE DANS LA GAINÉ MAGNETIQUE.....	134
VI.3.	RESOLUTION DE L'EQUATION DE LIOUVILLE : APPROXI- MATION ADIABATIQUE.....	138
	VI.3.A. Changement de variables.....	138
	VI.3.B. Solution asymptotique.....	139
	VI.3.C. Fonction de distribution des primaires....	140
	VI.3.D. Domaine de définition.....	141
	VI.3.E. Normalisation de la fonction de distribution.....	145
VI.4.	EVALUATION DE LA VARIATION DE LA DENSITE DES ELECTRONS PRIMAIRES DANS UN CUSP.....	146
VI.5.	CONCLUSION.....	150

CHAPITRE VII : ETUDE DE PIEGEAGE DES ELECTRONS PRI-
MAIRES DANS LE CHAMP MULTIPOLAIRE

VII.1.	INTRODUCTION.....	152
VII.2.	MECANISME DE LIBERATION DES PARTICULES.....	153
VII.3.	EFFET DES COLLISIONS SUR LES PARTICULES PRESENTES DANS LE MILIEU.....	155
VII.4.	EFFETS DE BORDS DU CHAMP MAGNETIQUE.....	157
VII.5.	EVALUATION DE LA DENSITE DES PARTICULES PIEGEES....	158
VII.6.	FREINAGE COULOMBIEN.....	159
VII.7.	UNE SOLUTION POSSIBLE.....	165

VII.8. ETUDE THEORIQUE DE L'INSTABILITE ACOUSTIQUE IONIQUE PRESENTE DANS LA GAINÉ MAGNETIQUE.....	169
VII.8.A. Etude qualitative.....	169
VII.8.B. Etude quantitative.....	171
VII.9. CONCLUSION.....	179
LISTE DES SYMBOLES UTILISES DANS LE CHAPITRE VII....	180

CHAPITRE VIII : RESULTATS EXPERIMENTAUX

VIII.1. CONCENTRATIONS DES ELECTRONS PRIMAIRES AU VOISINAGE DES PAROIS : EVIDENCE EXPERIMENTALE.....	185
VIII.2. INSTABILITE ACOUSTIQUE IONIQUE PRESENTE DANS LA GAINÉ MAGNETIQUE.....	187
VIII.2.A. Montage expérimental.....	187
VIII.2.B. Signaux recueillis.....	189
VIII.2.C. Topographie de l'instabilité.....	192
VIII.2.D. Etude de la propagation de l'instabilité	196
VIII.2.E. Interprétation des mesures.....	201
VIII.3. ETABLISSEMENT D'UN GRADIENT DE DENSITE AJUSTABLE EN REGIME NON COLLISIONNEL.....	211
 <u>CONCLUSION</u>	214
APPENDICE A.....	216
APPENDICE B.....	219
APPENDICE C.....	221
APPENDICE D.....	223
APPENDICE E.....	231
APPENDICE F.....	237
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	242

* *
*

I N T R O D U C T I O N

Depuis quelques années les décharges multipolaires se sont répandues dans les laboratoires, où elles sont surtout utilisées pour des études de propagation d'ondes (1), de turbulence (2) et de chimie des plasmas (3). Les caractères généraux de ces dispositifs peuvent être résumés ainsi : le plasma est créé par des électrons rapides (nous les appellerons électrons primaires dans les pages qui suivent) qui ionisent les molécules d'un gaz neutre. Le plasma est contenu dans une enceinte tapissée d'aimants, qui créent un champ magnétique localisé à proximité de la paroi. Ce champ permet une augmentation de la densité électronique de un à deux ordres de grandeur. On obtient ainsi des plasmas parfaitement uniformes et stables, à basse pression (inférieure à 10^{-4} Torr) dans des volumes qui peuvent dépasser un mètre cube et avec des taux de fluctuations de densité inférieurs à 10^{-3} .

Des études antérieures, dont nous parlerons au chapitre I, ont montré que l'augmentation de densité est due, non pas au confinement du plasma qui est plutôt médiocre, mais bien au confinement des électrons primaires qui, au lieu d'être absorbés par les parois, sont réfléchis par le champ magnétique, avec pour conséquence une augmentation importante du terme d'ionisation. Par contre, le problème posé par l'uniformité des plasmas multipolaires n'a jamais été, jusqu'à présent, sérieusement étudié ; le but de ce présent mémoire est d'en proposer une explication.

Au chapitre II, nous montrerons que l'on peut expliquer les profils de densité observés si, contrairement à ce qui est généralement admis (4), on suppose que le terme d'ionisation n'est pas uniforme, mais augmente fortement au voisinage des parois, là où règne le champ magnétique.

Le terme d'ionisation étant proportionnel à la densité des électrons primaires, nous étudierons leurs trajectoires dans

le champ multipolaire au chapitre III. Ensuite, après avoir envisagé plusieurs hypothèses, nous montrerons que l'augmentation du terme d'ionisation au voisinage des parois est liée à l'existence d'une population importante d'électrons primaires piégés dans le champ magnétique (chapitres IV à VI).

On remarque une situation analogue au voisinage de la terre : les ceintures de Van Allen sont constituées de particules émises par le soleil et piégées par le champ du dipôle terrestre. Le mécanisme de capture du vent solaire par le champ terrestre n'est pas encore totalement élucidé.

Au chapitre VII, nous étudierons le problème du piégeage des particules par le champ multipolaire et nous montrerons que la présence d'une instabilité de type acoustique ionique de grande amplitude au voisinage des parois fournit un mécanisme de piégeage plausible.

Enfin, au chapitre VIII, nous présenterons quelques résultats expérimentaux montrant l'existence des particules piégées et l'instabilité.

* *
*

CHAPITRE I

PHYSIQUE DES DECHARGES MULTIPOLAIRES

I.1. DESCRIPTION DU DISPOSITIF

Au Laboratoire de Physique des Gaz et des Plasmas d'Orsay, nous disposons d'une décharge multipolaire de grande dimension : l'enceinte est un cylindre de un mètre de diamètre et un mètre de hauteur. Les barreaux aimantés sont alignés le long des génératrices et sur les couvercles, avec des polarités alternées.

Le champ magnétique est du type multipolaire, d'où le nom de la décharge. Nous en préciserons la topologie au chapitre III; pour le moment il nous suffira de savoir que le module de \vec{B} décroît exponentiellement lorsque l'on s'éloigne des parois et que les lignes de champ se resserrent sur les barreaux aimantés et forment des structures que les Anglo-saxons appellent des cusps. La fuite des particules à travers ces cusps a fait renoncer à l'utilisation des multipôles pour confiner les plasmas de fusion. Les figures I-1 et I-2 présentent le dispositif.

Le caisson à plasma a été construit pour étudier l'interaction d'une onde électromagnétique avec un plasma présentant un gradient de densité. Ces expériences visent à simuler, à une échelle différente, les phénomènes qui apparaissent lors des expériences de fusion par laser.

Pour établir un gradient de densité axial nous avons disposé une feuille de mica transversalement à l'axe du cylindre. Cette feuille de mica fournit en outre de bonnes conditions aux limites pour le passage de l'onde électromagnétique du guide vers le plasma (figure I-2).

PLAN DU CHAPITRE I

PHYSIQUE DES DECHARGES MULTIPOLAIRES

I.1.	<u>DESCRIPTION DU DISPOSITIF</u>	3
I.2.	<u>CONFINEMENT DES ELECTRONS PRIMAIRES</u>	7
I.3.	<u>CONFINEMENT DU PLASMA</u>	9
I.4.	<u>PROFILS DE DENSITE</u>	10

* *
*

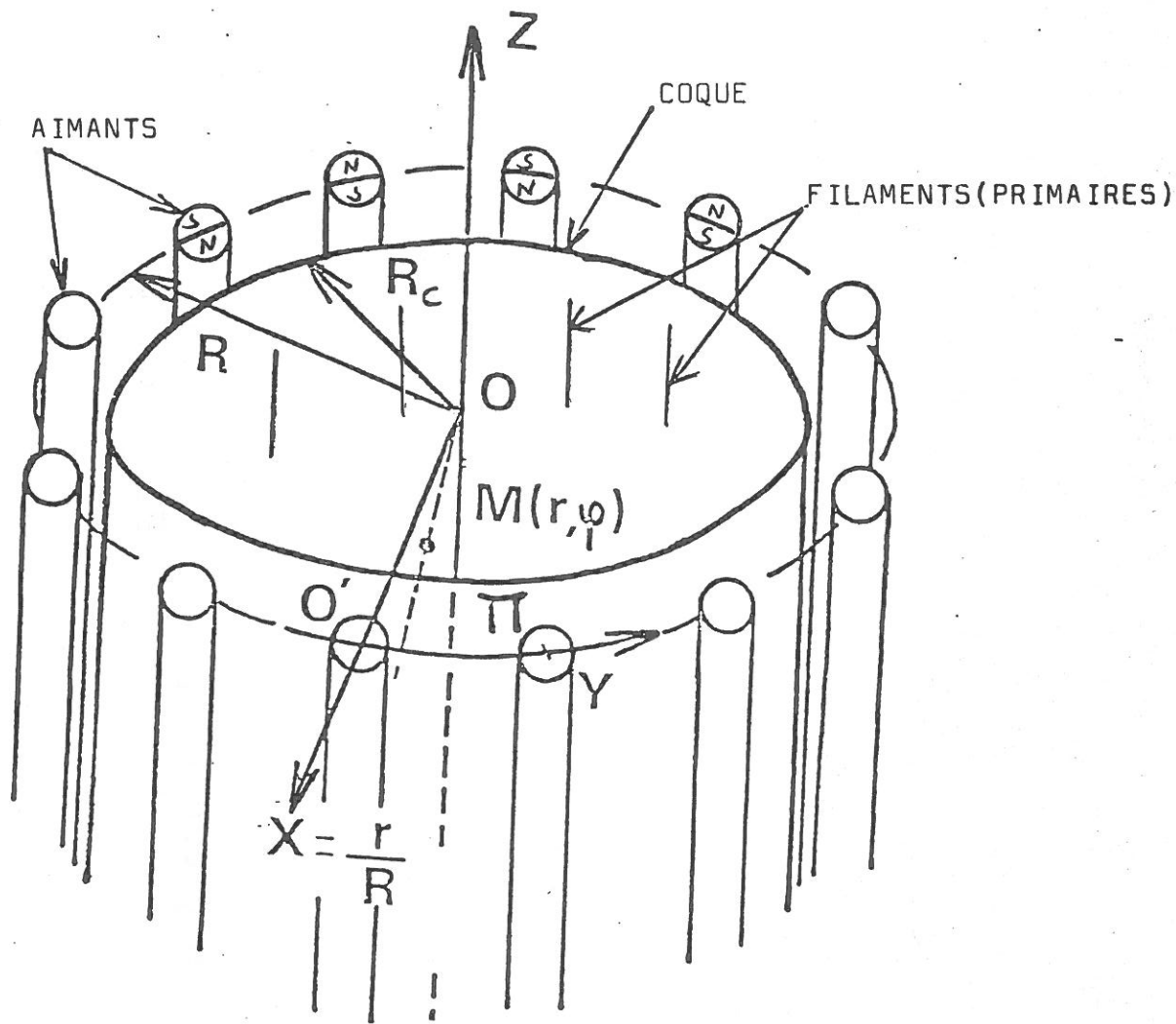


Figure I-1: Schéma du dispositif multipolaire.
Rayon de la coque: $R_c = 0,5m$.

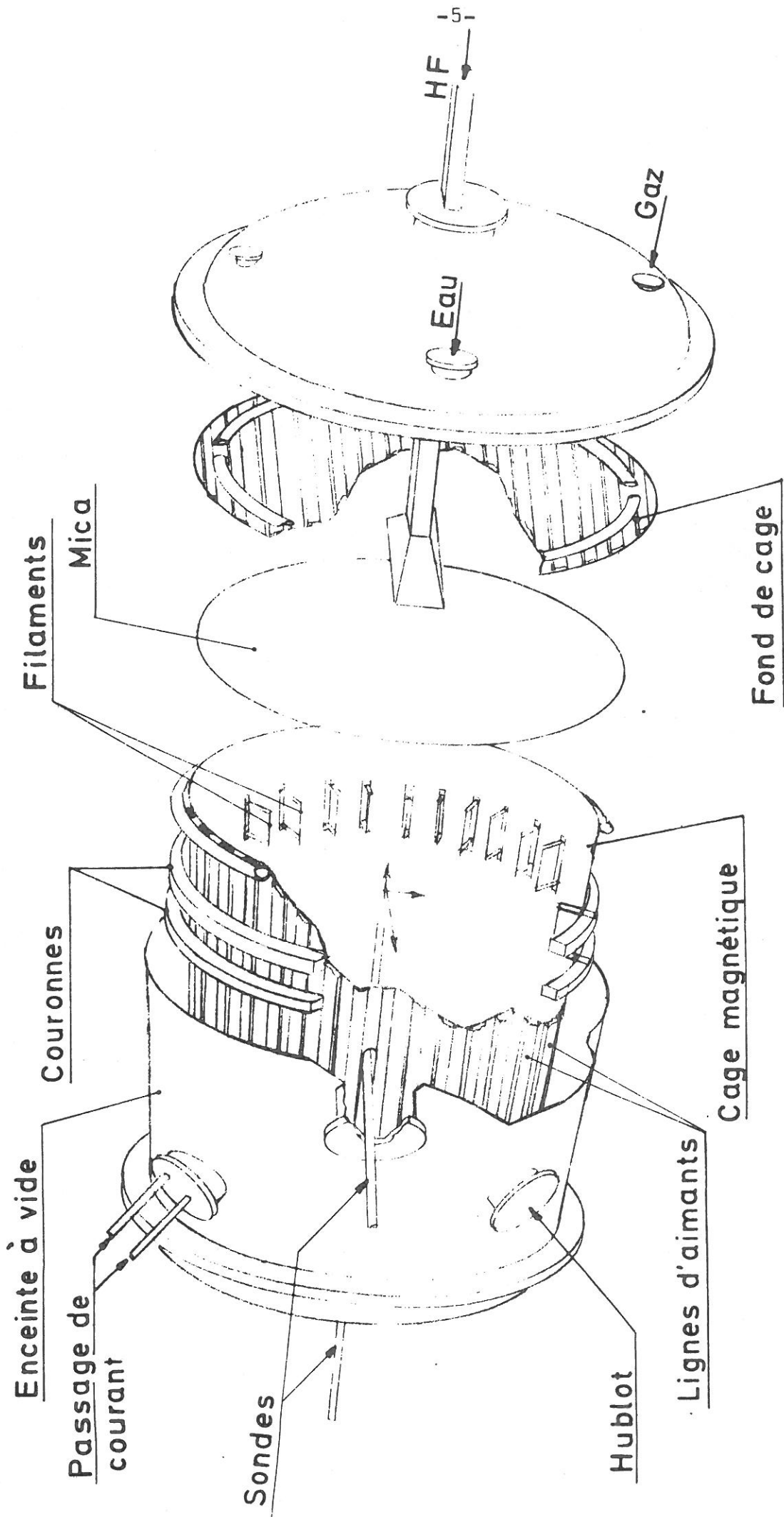


Figure I-2:

DISPOSITIF MULTIPOLAIRE

Le plasma est créé par des électrons primaires émis par des filaments de tungstène fortement chauffés par effet Joule et polarisés négativement.

La décharge peut être maintenue dans une gamme de pressions allant de 10^{-5} Torr à 10^{-3} Torr . Le courant de chauffage des filaments peut atteindre 700 A et le courant de décharge 300 A sous une tension de 60 V. Les puissances mises en jeu rendent indispensable un refroidissement par circulation d'eau.

Les densités électroniques obtenues vont de 10^{10} à quelques 10^{11} cm^{-3} , pour des températures électroniques de 3 à 8 eV et des températures ioniques de quelques dixièmes d'eV. Nous avons rassemblé dans l'appendice A les différents paramètres qui interviennent dans ce type de plasma.

I.2. CONFINEMENT DES ELECTRONS PRIMAIRES

Les électrons primaires sont accélérés par les gaines qui se forment autour des filaments polarisés négativement et acquièrent une énergie de plusieurs dizaines d'eV. L'épaisseur de ces gaines est de l'ordre de la longueur de Debye qui est de quelques centièmes de millimètre (appendice A). Comme les filaments sont situés à plusieurs centimètres des parois, leur émission est isotrope.

A 10^{-4} Torr, le libre parcours moyen dans l'Argon des électrons primaires pour les collisions ionisantes sur les atomes neutres est de 11 m pour une énergie de 50 eV. Cette distance est notablement supérieure aux dimensions habituelles des enceintes multipolaires qui excèdent rarement un mètre.

Samec (5) a montré par des simulations numériques que les électrons primaires peuvent se réfléchir plusieurs dizaines de fois sur le mur magnétique avant d'être absorbés par les parois. Leur efficacité pour ioniser le gaz est donc fortement accrue par la présence des aimants tant que le libre parcours moyen est supérieur aux dimensions de l'enceinte. A haute pression, par contre, cette condition n'est plus vérifiée et le champ magnétique n'entraîne plus une augmentation du terme d'ionisation. L'augmentation de la densité est alors seulement due au confinement du plasma.

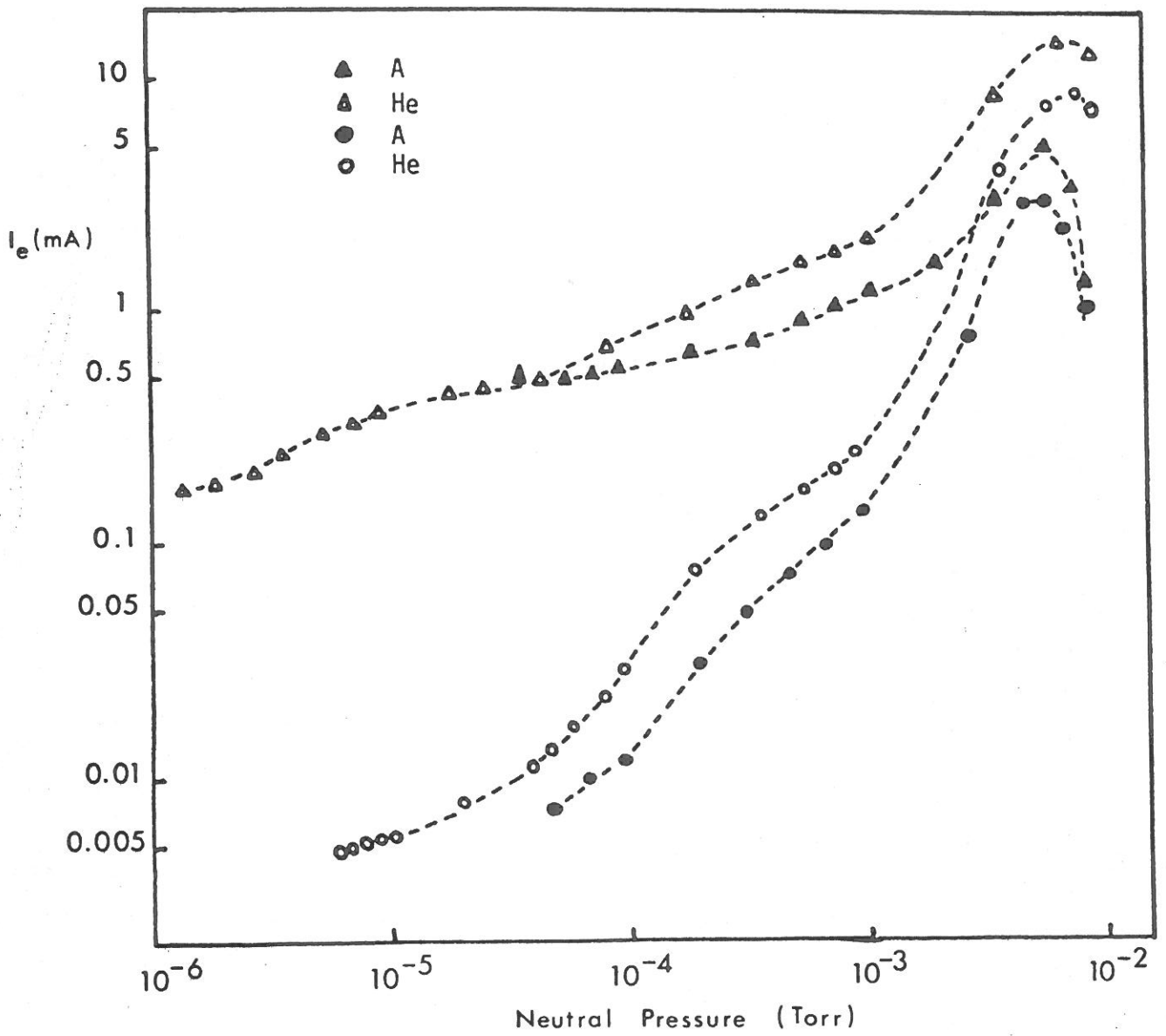


Figure I.3 - Densité, en fonction de la pression, de plasmas d'Argon et d'Hélium contenus dans des enceintes à parois magnétiques (triangles) ou non magnétiques (cercles).

1.3. CONFINEMENT DU PLASMA

Limpaecher et ses collaborateurs (6) ont comparé la densité des plasmas obtenus dans deux enceintes identiques de un litre, dont l'une était tapissée d'aimants permanents et l'autre de barreaux non magnétiques ; ces deux plasmas étaient créés par des courants de primaires égaux. A des pressions inférieures à 10^{-4} Torr , ils ont trouvé que les aimants augmentent la densité de deux ordres de grandeur, alors qu'à haute pression (au-dessus de 10^{-2} Torr) les deux enceintes se comportent de façon analogue (figure I-3).

Leung et ses collaborateurs (7) ont mesuré le temps de vie et la densité dans deux enceintes analogues, l'une tapissée d'aimants et l'autre non. A $8 \cdot 10^{-4}$ Torr la densité était 65 fois plus grande dans la première alors que la durée de vie des ions n'était multipliée que par un facteur 3. Comme les distances effectives parcourues par les électrons primaires étaient environ 20 fois plus longues, ils ont conclu que l'augmentation de densité était surtout due au confinement des électrons primaires.

Buzzi et ses collaborateurs (4), après une expérience identique, rapportent le même résultat.

La médiocrité du confinement du plasma est aussi attestée par une étude théorique : G. Matthieussent et C. Koch (8) ont étudié numériquement la diffusion du plasma à travers le champ multipolaire, dans le cadre d'une théorie ambipolaire. Faisant abstraction de l'augmentation du terme d'ionisation, ils ont trouvé que l'augmentation de la densité au centre de l'enceinte due au confinement du plasma n'était que de l'ordre de 1,5.

Ce résultat n'est rigoureusement valable pour notre enceinte qu'au-dessus de 10^{-3} Torr . Aux pressions qui nous intéressent ($10^{-5} < P_0 \text{ (Torr)} < 10^{-3}$), il garde cependant une valeur indicative et nous reviendrons sur ce calcul au chapitre suivant.

I.4. PROFILS DE DENSITE

L'enceinte que nous avons décrite au § I.1 est munie de sondes de Langmuir (24). Nous avons donc pu mesurer la variation de la densité électronique axialement et radialement, pour différentes pressions de neutres (figures I-4 à I-6).

Lorsqu'il n'y a pas de feuille de mica, les résultats peuvent être résumés comme suit :

- A basse pression (P_0), la densité électronique varie extrêmement peu dans la majeure partie de l'enceinte
- Lorsque P_0 augmente, le plasma reste très uniforme jusqu'à environ $P_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ Torr
- Au-dessus de $P_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ Torr on assiste à l'établissement progressif d'un profil de densité de type ambipolaire habituel, analogue aux profils des plasmas non confinés.

En présence de la feuille de mica, nous observons l'apparition d'un gradient de densité axial, mais par contre l'uniformité radiale est préservée (figures I-7).

Au chapitre suivant, nous tenterons d'interpréter ces résultats.

* *
*

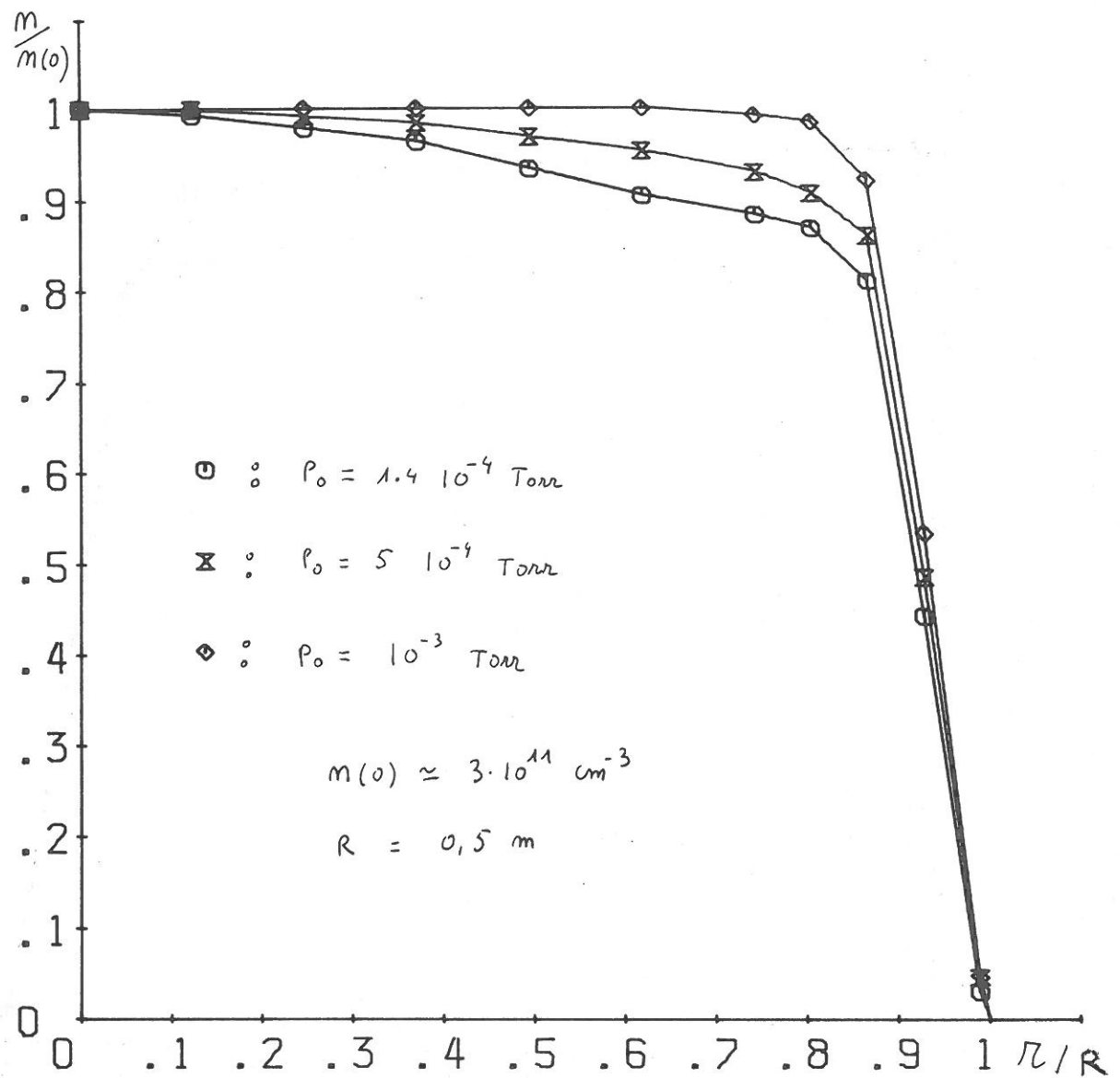


Figure I-4: Variation de la densité électronique à différentes pressions d'Argon; les mesures, effectuées avec des sondes de Langmuir, ne sont valables qu'en dehors du champ magnétique, c'est à dire entre l'origine et $r/R \approx 0.8$. Il n'y avait pas de feuille de mica dans l'enceinte.

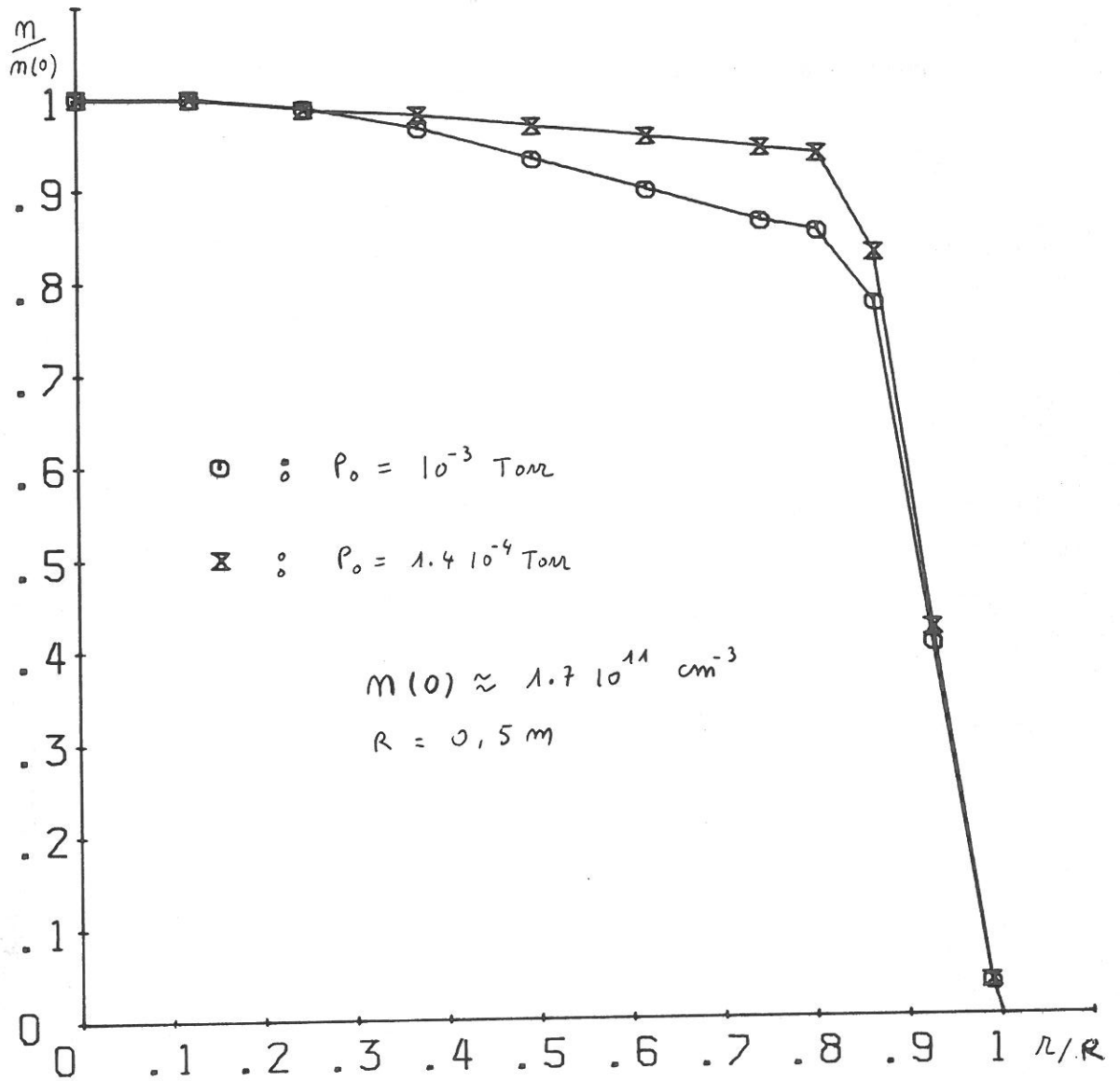


Figure I-5: Variation radiale de la densité électronique à différentes pressions d'Argon. Les mesures effectuées avec des sondes de Langmuir, ne sont valables qu'en dehors du champ magnétique, c'est à dire entre l'origine et $r/R \approx 0.8$. Il n'y avait pas de feuille de mica dans l'enceinte.

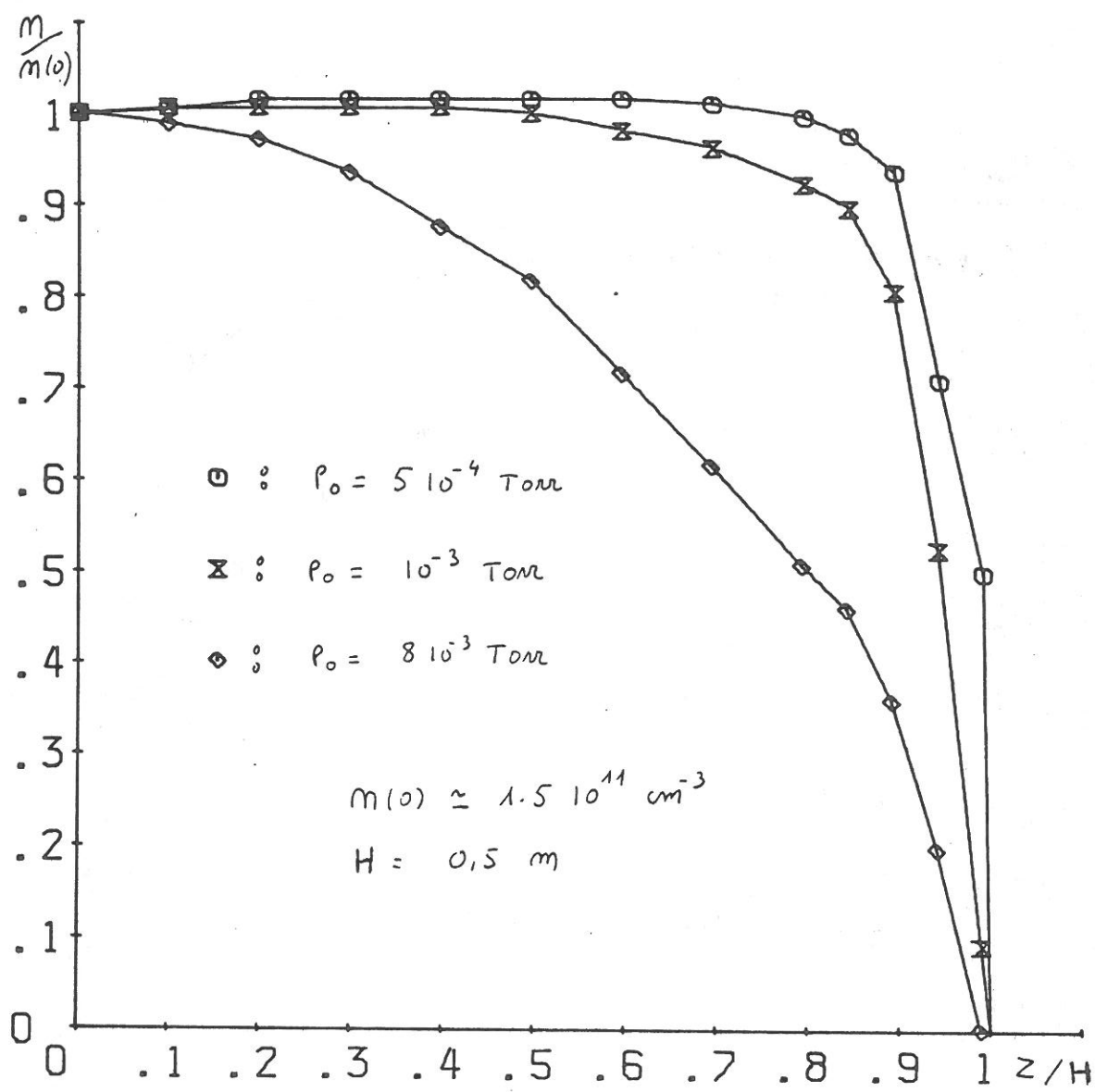


Figure I-6: Variation axiale de la densité électronique à différentes pressions d'Argon. Les mesures effectuées avec des sondes de Langmuir ne sont valables qu'en dehors du champ magnétique, c'est à dire entre l'origine et $Z/H \approx 0.8$. Il n'y avait pas de feuille de mica dans l'enceinte.

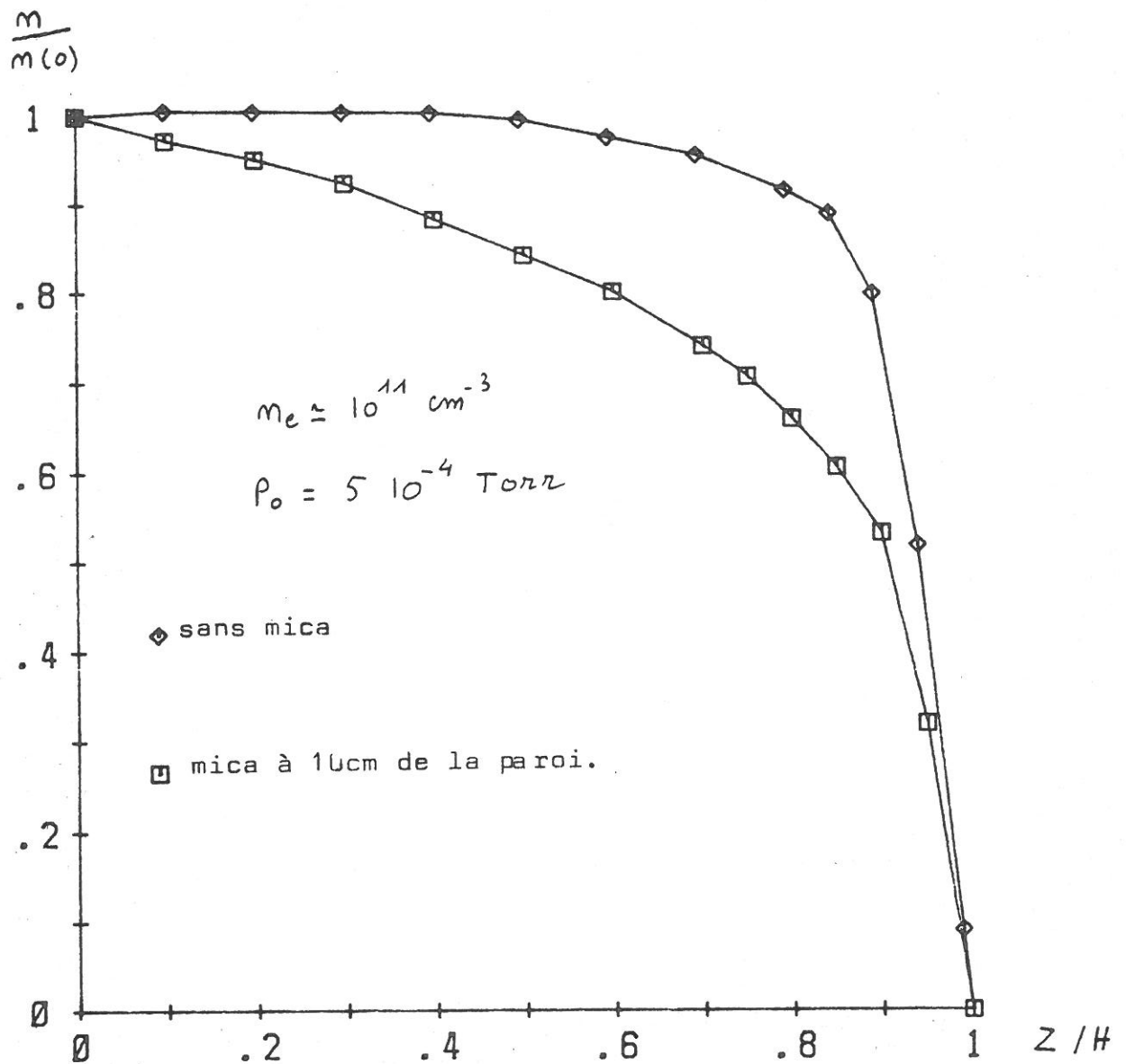


Figure I-7: Variation axiale de la densité électronique en présence d'une feuille de mica. Les mesures ont été faites avec une sonde de Langmuir et ne sont valables qu'entre l'origine et $Z/H \approx 0,8$, zone où le champ magnétique est négligeable.

PLAN DU CHAPITRE II

PROFILS DE DENSITE DES PLASMAS MULTIPOLAIRES

II.1. <u>INTRODUCTION</u>	14
II.2. <u>THEORIE COLLISIONNELLE</u>	15
II.2.A. Domaine de validité.....	15
II.2.B. Equations d'équilibre.....	15
II.2.C. Profils de densité : régime collisionnel.....	17
a. Diffusion inhibée dans la gaine magnétique: modèle monodimensionnel.....	17
b. Terme source augmenté dans la gaine magné- tique : modèle monodimensionnel.....	20
c. Calcul de diffusion ambipolaire en champ magnétique.....	23
d. Problème bidimensionnel.....	26
II.3. <u>THEORIE NON COLLISIONNELLE</u>	27
II.3.A. Plasmas non confinés.....	27
a. Equation d'équilibre.....	27
b. Conditions aux limites.....	28
c. Profils de densité en l'absence de champ magnétique : régime non collisionnel.....	30
II.3.B. Plasmas multipolaires.....	32
a. Densité au centre.....	32
b. Profil de densité.....	33
II.4. <u>DISCUSSION</u>	37
<u>LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISES</u>	38

* *
*

C H A P I T R E I I

PROFILS DE DENSITE DES PLASMAS MULTIPOLAIRES

II.1. INTRODUCTION

Bien que l'uniformité des plasmas multipolaires ait été constatée depuis longtemps (6), elle n'a jamais fait l'objet d'une étude approfondie et dans la suite de ce chapitre nous allons nous efforcer d'en trouver la cause.

Le profil de densité résulte d'un bilan entre la création du plasma par les électrons primaires, et sa disparition par diffusion vers les parois (aux densités qui nous intéressent, la recombinaison est négligeable).

Le taux de création du plasma dépend essentiellement de la répartition spatiale des électrons primaires dans l'enceinte. Cette répartition n'a encore jamais été mesurée et, dans toutes les études théoriques précédentes, elle a été supposée uniforme. Nous allons voir que, pour expliquer les profils observés, il nous faudra nous affranchir de cette hypothèse.

La diffusion vers les parois ne se fait pas de la même manière selon que les collisions avec les atomes neutres dominant ou non. Nous allons donc étudier deux situations : l'une collisionnelle, valable à des pressions modérées et l'autre, non collisionnelle, valable à basse pression.

II.2. THEORIE COLLISIONNELLE

II.2.A. DOMAINE DE VALIDITE

Aux pressions qui nous intéressent ($P_0 < 10^{-3}$ Torr), les libres parcours moyens électrons-neutres sont toujours supérieurs aux dimensions de notre enceinte (appendice A). Seules les collisions ions-neutres peuvent limiter la diffusion du plasma vers les parois. A $P_0 = 10^{-4}$ Torr, le libre parcours moyen correspondant est de 0,4 m dans l'Argon. Les dimensions de l'enceinte étant de l'ordre du mètre, nous estimons la théorie collisionnelle valable aux pressions supérieures à $P_0 = 5.10^{-4}$ Torr.

II.2.B. EQUATIONS D'EQUILIBRE

Dans ces conditions on peut écrire (9) que le flux d'électrons est proportionnel au gradient de densité et que la divergence de ce flux est égale au terme source (sommation implicite sur les indices répétés) :

$$(\vec{\psi}_j) = -D_{ji} (\vec{\nabla}n)_i \quad [\text{II.1}]$$

$$\nabla \cdot \vec{\psi} = I \quad [\text{II.2}]$$

où $\vec{\psi}$ désigne le flux d'électrons (ou d'ions), D_{ji} les composantes du tenseur de diffusion et I le taux d'ionisation.

Ce dernier est proportionnel à la densité des primaires et a pour expression :

$$I = \langle n_0 \sigma^{P_0} v^P \rangle n^P \quad [\text{II.3}]$$

n_0 étant la densité des neutres, σ^{P_0} la section efficace d'ionisation, v^P la vitesse des primaires et n^P leur densité. Le symbole $\langle \rangle$ désigne une moyenne sur la distribution des particules.

Les équations macroscopiques qui décrivent le plasma et l'hypothèse de diffusion ambipolaire (8) donnent l'expression du tenseur de diffusion. Il se trouve que celui-ci possède deux valeurs principales, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire au champ magnétique \vec{B} :

$$D_{\parallel} \approx KT_e / M\nu \quad [\text{II.4}]$$

$$D_{\perp} = D_{\parallel} / (1 + \gamma^2 B^2) \quad [\text{II.5}]$$

où T_e désigne la température électronique, M la masse des ions, ν la fréquence de collision ion-neutre et γ le produit des mobilités ionique et électronique.

En l'absence de champ magnétique ($B = 0$), D_{\perp} devient égal à D_{\parallel} . Le tenseur de diffusion est alors diagonal et le seul paramètre qui intervient est le coefficient de diffusion, $D \equiv D_{\parallel}$. Des équations [II.1] et [II.2] on déduit :

$$\nabla^2 n = - \frac{I}{D} \quad [\text{II.6}]$$

Si le problème est monodimensionnel et si l'on suppose I et D uniformes, (ce qui est le cas en l'absence de champ magnétique), la solution de l'équation [II.6] qui vérifie $n(R) = 0$ est, en géométrie cylindrique comme en géométrie plane, un profil parabolique :

$$n(r) = n(0) \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right] \quad [\text{II.7}]$$

où r désigne une coordonnée (axiale ou radiale) et R la position de la paroi.

En géométrie cylindrique, la densité à l'origine s'écrit :

$$n(0) = \frac{I}{4D} R^2 \quad [\text{II.8}]$$

En géométrie plane :

$$n(0) = \frac{I}{2D} R^2 \quad [\text{II.9}]$$

La densité au centre du dispositif est donc fixée par les dimensions, le terme d'ionisation et la valeur du coefficient de diffusion.

Considérons une décharge multipolaire. Le plasma est uniforme. Cela signifie que $|\vec{\nabla}n|$ est petit à l'intérieur de l'enceinte et ne devient important qu'au voisinage immédiat des parois, dans la zone magnétisée.

Si l'on se reporte aux équations [II.1] et [II.2] on peut facilement se convaincre qu'il n'y a que deux possibilités :

- Soit I varie peu. Le flux de particules $\vec{\psi}$ est alors sensiblement le même dans la zone magnétisée et à l'intérieur de l'enceinte. L'équation [II.1] impose alors que D soit très petit au voisinage des parois pour que $|\vec{\nabla}n|$ y soit grand.

- Soit le coefficient de diffusion (en fait la moyenne spatiale de ses composantes) ne diminue pas notablement dans la zone magnétisée. L'équation [II.1] montre alors que $|\vec{\nabla}n|$ ne sera important que pour de grandes valeurs de ψ dans la gaine magnétique. Ceci implique ([II.2]) un terme source I accru dans la même région.

Pour illustrer ces considérations qualitatives, nous allons étudier deux modèles simplifiés, au paragraphe suivant.

II.2.C. PROFILS DE DENSITE : REGIME COLLISIONNEL

a) Diffusion inhibée dans la gaine magnétique : problème à une dimension

Pour illustrer le premier cas mentionné au paragraphe précédent, nous allons résoudre l'équation [II.6] dans le cas d'un cylindre infini et dans le cas d'un plasma limité par deux plans infinis. Nous supposons D égal à une constante D_1 à l'intérieur de l'enceinte pour $r < r_g$ (coordonnées axiales ou radiales), et égal à une constante D_2 plus petite pour r compris entre r_g et R ,

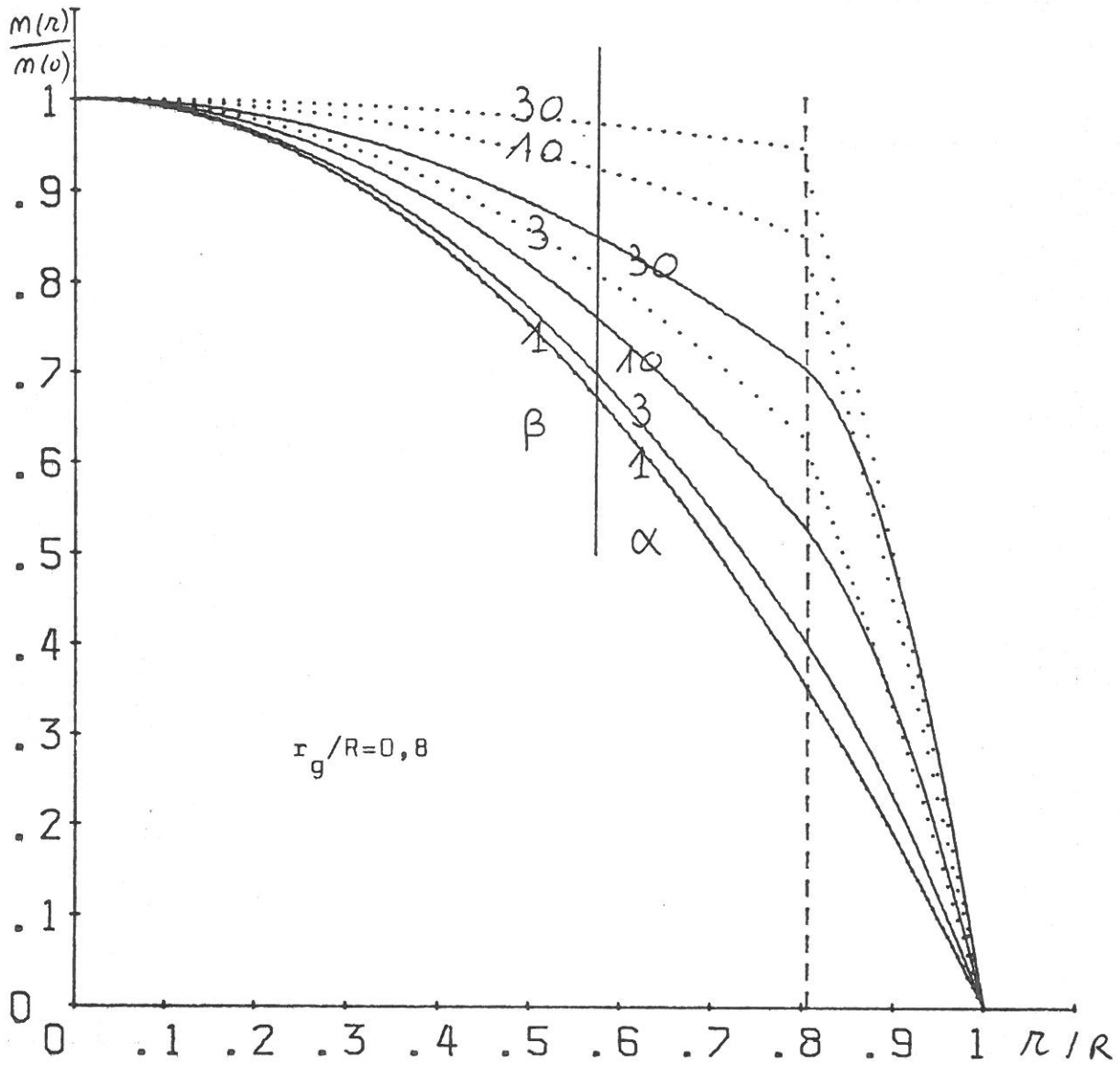


Figure II-1: Profils de densité collisionnels dans le cas plan .
Les courbes en pointillés ont été obtenues en supposant la diffusion inhibée près des parois et les courbes en traits pleins en supposant le terme d'ionisation augmenté.

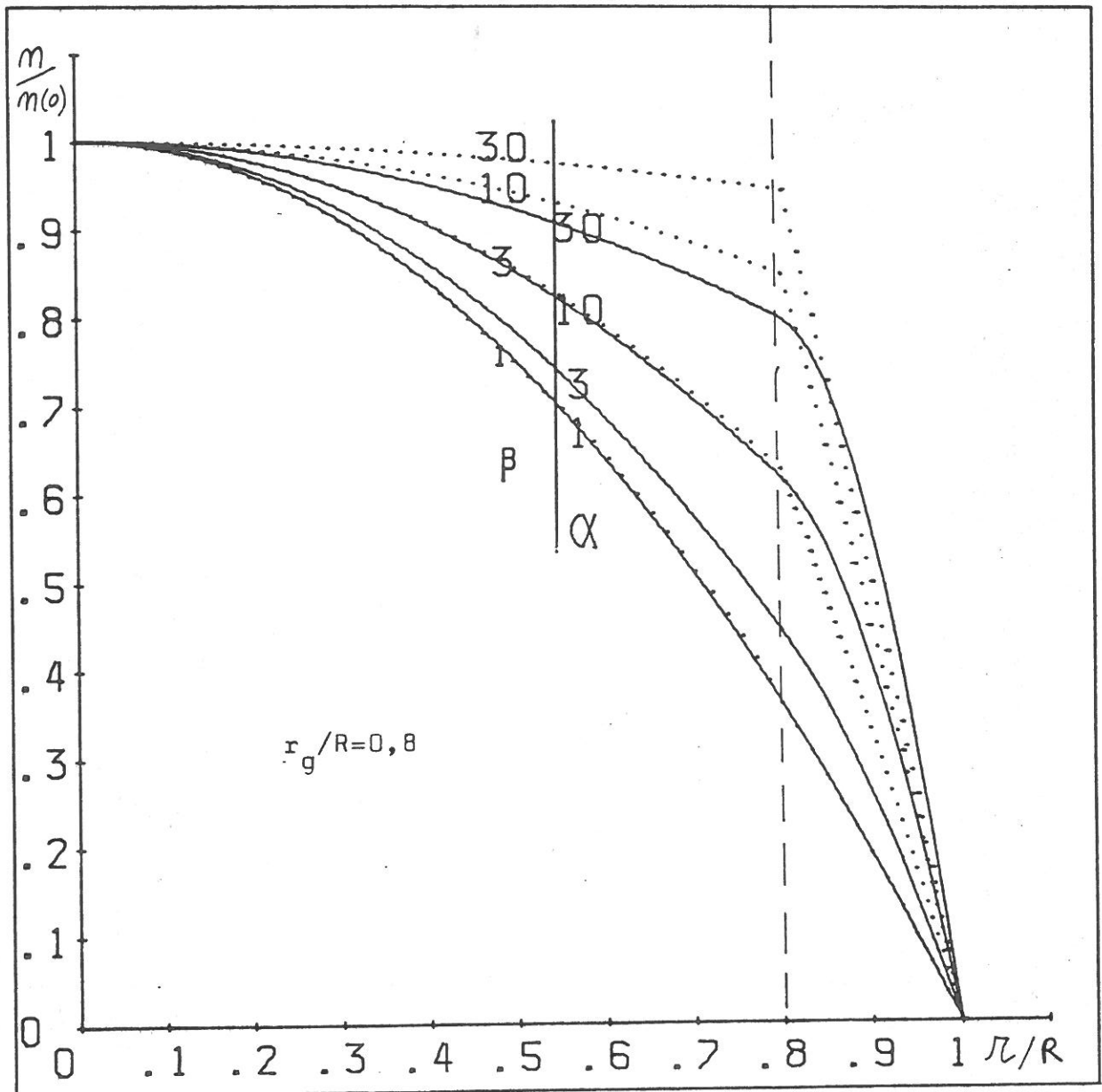


Figure II-2: Profils de densité collisionnels dans le cas cylindrique. Les courbes en pointillés ont été obtenues en supposant la diffusion inhibée près des parois et les courbes en traits pleins en supposant le terme d'ionisation augmenté.

position de la paroi. Dans ce modèle, D_2 est une sorte de moyenne spatiale des composantes du tenseur de diffusion, D_{ij} , dans la zone où règne le champ magnétique. D_2 est plus petit que D_1 car l'équation [II.5] montre que le champ magnétique inhibe la diffusion perpendiculaire.

Comme condition aux limites nous écrivons que la densité est nulle à la paroi. En outre, nous supposons la densité et le flux continus en r_g :

$$\left. \begin{aligned} n(r_g^+) &= n(r_g^-) \\ D_1 \frac{dn}{dr} \Big|_{r_g^+} &= D_2 \frac{dn}{dr} \Big|_{r_g^-} \end{aligned} \right\} \quad \text{[II.10]}$$

Les résultats dépendent du paramètre :

$$\beta \equiv \frac{D_1}{D_2} \quad \text{[II.11]}$$

L'expression analytique des solutions est donnée au tableau II.1. Les expressions sont identiques dans le cas plan et dans le cas cylindrique. Seule la densité à l'origine diffère.

Les figures II-1 et II-2 montrent la variation de la densité en fonction de la coordonnée réduite r/R . La discontinuité de $\vec{V}n$ en r_g n'a pas de signification physique et vient de la définition mathématique du coefficient de diffusion qui a été supposé discontinu. Sur ces figures, il est manifeste que l'uniformité augmente avec β .

b) Terme source augmenté dans la gaine magnétique : modèle mono-dimensionnel

Pour illustrer le deuxième cas mentionné au § II.2.B, nous allons résoudre l'équation [II.6] avec un terme source I égal à I_1 (uniforme) à l'intérieur de l'enceinte et égal à I_2 (plus grand) au voisinage des parois.

	Cylindre	Plan
$0 < r < r_g$	$\frac{n(r)}{n(o)} = 1 - \gamma \left(\frac{r}{R}\right)^2$	$\frac{n(r)}{n(o)} = 1 - \gamma \left(\frac{r}{R}\right)^2$
$r_g < r < R$	$\frac{n(r)}{n(o)} = \gamma \beta \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]$	$\frac{n(r)}{n(o)} = \gamma \beta \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]$
γ	$\gamma = \frac{1}{\left(\frac{r_g}{R}\right)^2 \left[1 - \beta \right] + \beta}$	$\gamma = \frac{1}{\left(\frac{r_g}{R}\right)^2 \left[1 - \beta \right] + \beta}$
$n(o)$	$n(o) = \frac{1}{\gamma} \frac{I}{4D_1} R^2$	$n(o) = \frac{1}{\gamma} \frac{I}{2D_1} R^2$

TABLEAU II.1 : Solution de l'équation de diffusion avec un coefficient de diffusion plus faible au voisinage des parois. L'inverse de γ est simplement l'augmentation de la densité à l'origine relativement au cas où D est uniforme et égal à D_1 .

	Cylindre	Plan
$0 < r < r_g$	$\frac{n(r)}{n(o)} = 1 - \gamma \left(\frac{r}{R}\right)^2$	$\frac{n(r)}{n(o)} = 1 - \gamma \left(\frac{r}{R}\right)^2$
$r_g < r < R$	$\frac{n(r)}{n(o)} = \gamma \left[\alpha \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + (\alpha - 1) \left(\frac{r_g}{R}\right)^2 2 \text{Log} \frac{r}{R} \right]$	$\frac{n(r)}{n(o)} = \gamma \left\{ \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \alpha + (1 - r/R) 2 \frac{r_g}{R} (1 - \alpha) \right\}$
γ	$\gamma = 1 / \left[\alpha + (1 - \alpha) \left(\frac{r_g}{R}\right)^2 \left(1 + 2 \text{Log} \frac{R}{r_g} \right) \right]$	$\gamma = 1 / \left[\alpha - \frac{r_g}{R} \left(\frac{r_g}{R} - 2\right) (1 - \alpha) \right]$
$n(o)$	$\frac{I_1}{4D} R^2 \cdot \frac{1}{\gamma} = n(o)$	$n(o) = \frac{I_1}{2D} R^2 \cdot \frac{1}{\gamma}$

TABLEAU II.2 : Solution de l'équation de diffusion avec un terme source augmenté au voisinage des parois. L'inverse de γ est simplement l'augmentation de densité à l'origine relativement au cas où I est uniforme et égal à I_1 .

La densité est supposée nulle à la paroi et nous utilisons les conditions de continuité de la densité et du flux de particules en r_g ([II.10] avec D uniforme).

Les résultats dépendent d'un paramètre :

$$\alpha \equiv \frac{I_2}{I_1} \quad \text{[II.12]}$$

L'expression des solutions est donnée au tableau II.2 et les figures II-1 et II-2 montrent l'allure des solutions. Cette fois \vec{v}_n est continu, la discontinuité de I n'affectant que la dérivée seconde de n . Il est aussi manifeste que l'uniformité du profil augmente avec α .

c. Calcul de diffusion ambipolaire en champ magnétique

Pour montrer le bien-fondé des considérations précédentes, nous allons donner le résultat d'un calcul numérique rigoureux. C. Koch et G. Matthieussent (8) ont résolu numériquement les équations [II.1] et [II.2] dans la configuration multipolaire, en supposant le terme d'ionisation uniforme.

Ils ont trouvé que l'augmentation de la densité au centre, due au confinement magnétique du plasma, est de l'ordre de 1,5.

La figure II-3 (courbes $\alpha = 1$) montre le profil de densité obtenu. En trait plein apparaît la variation de densité le long d'un rayon passant par un cusp ; la courbe en tirets correspond à cette variation le long d'un rayon passant entre deux cusps. On peut constater que le profil obtenu n'est pas beaucoup plus uniforme que le profil parabolique d'un plasma non confiné (pointillés). Il correspond à la courbe $\beta=3$ de la figure II-2 pour laquelle l'augmentation de densité au centre est proche de 1,5.

Nous avons repris leur calcul en supposant une forte augmentation du terme source dans la gaine magnétique ($\alpha = 30$). Le profil obtenu (figure II-3 courbe $\alpha = 30$) est alors beaucoup plus uniforme.

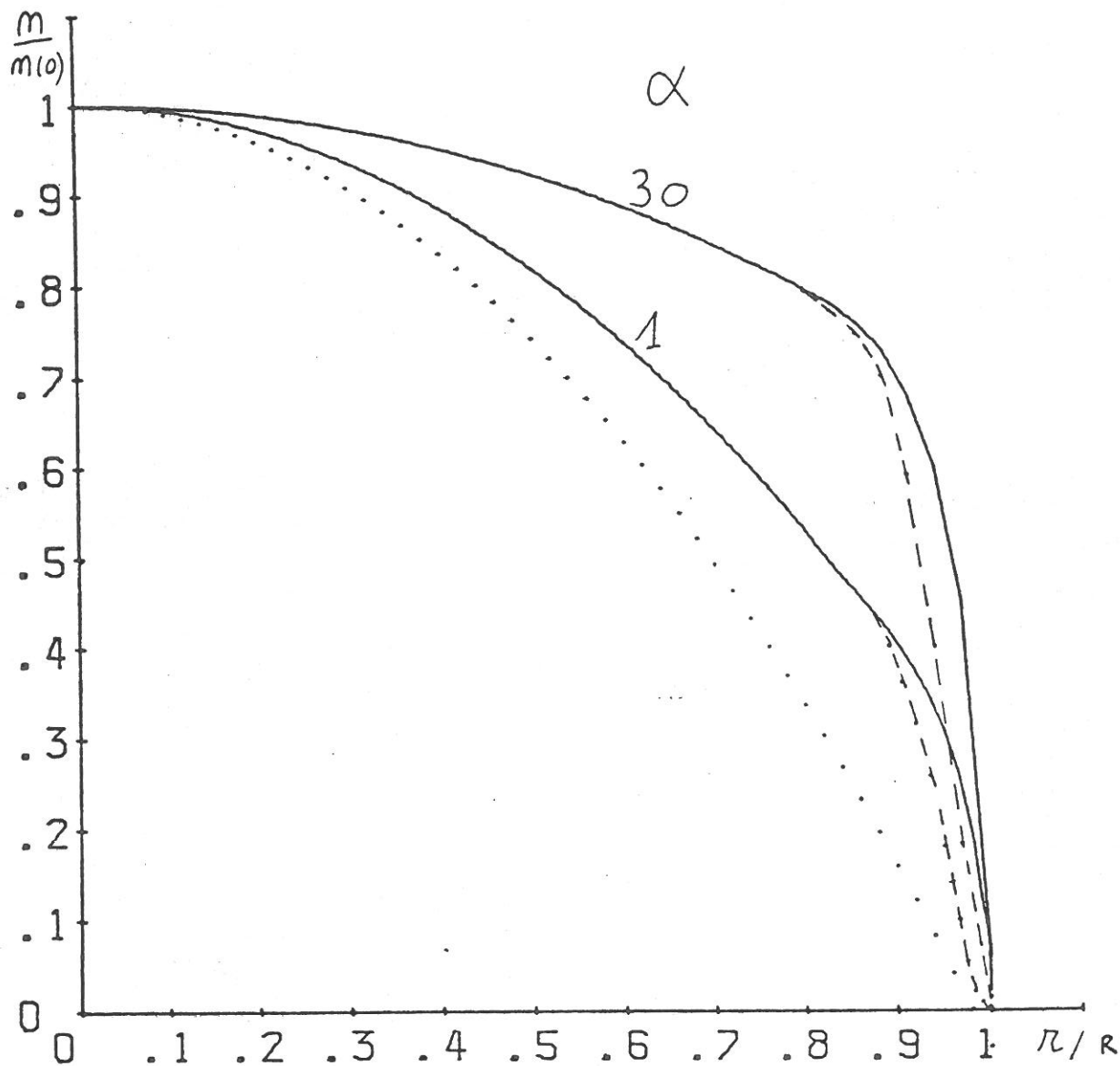


Figure II-3: Profils de densité collisionnels obtenus en résolvant numériquement l'équation de diffusion en champ magnétique. Les courbes en traits pleins montrent la variation de densité le long d'un rayon qui passe par un aimant, les courbes en tiretés montrent la variation entre deux aimants; α est l'augmentation relative du terme d'ionisation dans la gaine magnétique. Les pointillés montrent le profil d'un plasma non confiné.

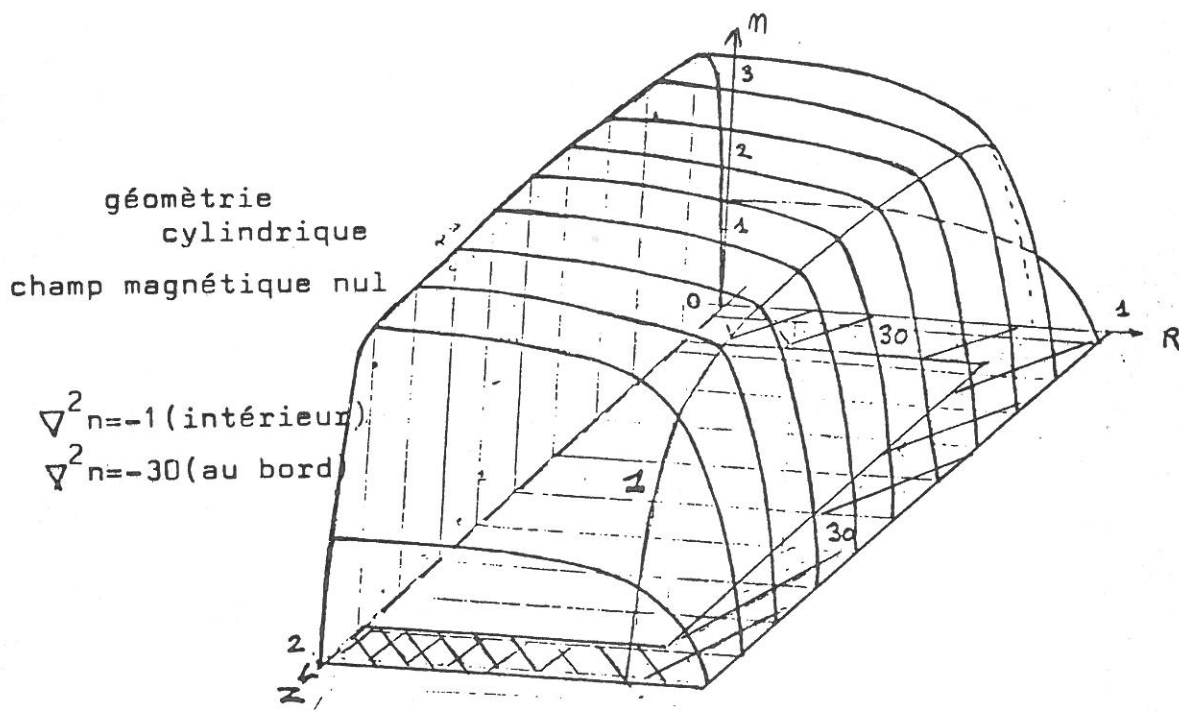


Figure II-4: Solution de l'équation de diffusion dans le cas d'un cylindre fini, avec un terme source augmenté près des parois.

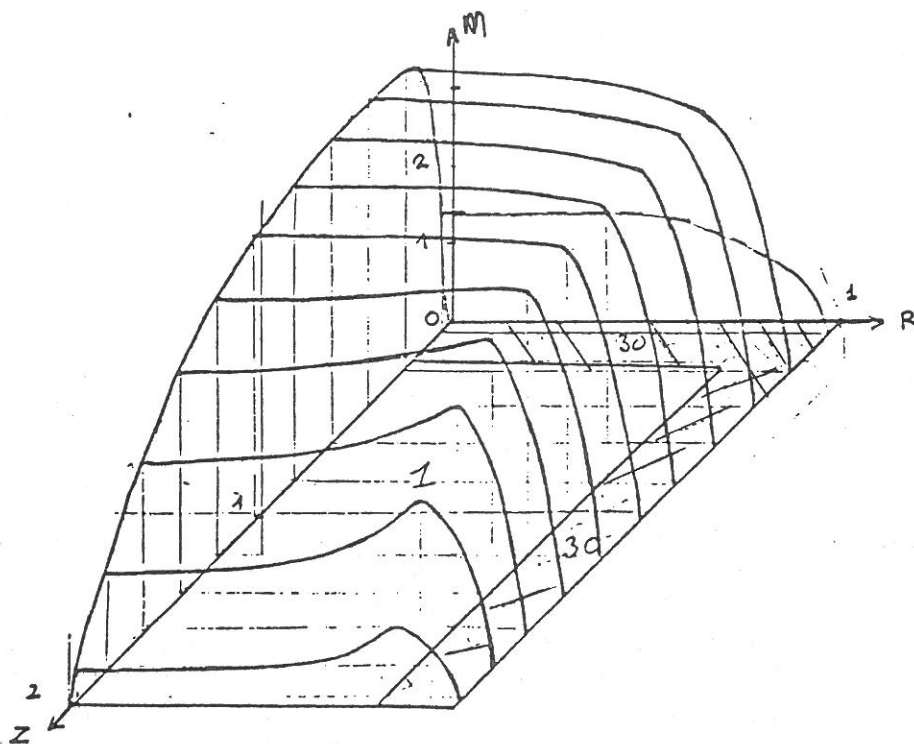


Figure II-5: Solution de l'équation de diffusion dans le cas d'un cylindre fini. Le terme source est augmenté près des parois, sauf à une extrémité, pour simuler la présence d'une feuille de mica.

Au § II.2.A, nous avons écrit que la théorie collisionnelle est valable au-dessus de $5 \cdot 10^{-4}$ Torr. Ceci est exact dans la majeure partie de l'enceinte, mais devient faux dans la gaine magnétique. En effet, le champ y varie extrêmement vite et la théorie ambipolaire ne s'applique que si le libre parcours moyen ions-neutres est inférieur à la longueur d'inhomogénéité. Celle-ci étant de quelques centimètres, il faut reculer la limite de validité du calcul précédent à quelques 10^{-3} Torr.

d. Problème bidimensionnel

Dans le cas d'un cylindre de hauteur finie, l'équation [II.6] ne peut plus être résolue analytiquement et il faut recourir à l'ordinateur.

La figure II-4 montre la solution obtenue avec un terme d'ionisation multiplié par 30 au voisinage des parois : le plasma est parfaitement uniforme, aussi bien axialement que radialement.

Pour simuler la présence d'une feuille de mica, nous avons supprimé l'augmentation du terme d'ionisation à une extrémité de l'enceinte. En effet, si l'ionisation augmente au voisinage des parois, cela ne peut être dû qu'au champ magnétique. Or la feuille de mica empêche les électrons primaires d'arriver jusqu'aux aimants situés sur l'un des couvercles du cylindre. La figure II-5 montre le résultat.

On observe l'apparition d'un gradient de densité axial, l'uniformité radiale étant préservée. Ces profils sont compatibles avec les profils expérimentaux du chapitre I (figures I-6 et I-7).

II.3. THEORIE NON COLLISIONNELLE

II.3.A. PLASMAS NON CONFINES

a) Equation d'équilibre

A basse pression, $P_0 \lesssim 10^{-4}$ Torr, les ions ne subissent plus de collision avec les neutres avant d'arriver à la paroi.

Dans un article historique (10), Tonks et Langmuir ont établi l'équation d'équilibre du plasma, en l'absence de champ magnétique. Leur équation repose sur deux hypothèses :

- la contribution à la densité en un point d'abscisse r , d'un ion qui a été créé à l'abscisse ρ est inversement proportionnelle à la vitesse acquise par cet ion dans le champ électrique de charge d'espace.

- les électrons du plasma sont en équilibre de Boltzmann dans le champ électrique :

$$n_e(r) = n_{e0} \exp[ev(r)/kT_e] \quad [\text{II.13}]$$

où kT_e désigne l'énergie thermique des électrons, n_e leur densité, e leur charge et $v(r)$ le potentiel électrostatique de charge d'espace. Avec ces deux hypothèses, l'équation de Poisson s'écrit alors en géométrie cylindrique :

$$\nabla^2 v = \frac{e}{\epsilon_0} \left\{ n_{e0} \exp[ev(r)/kT_e] - \int_0^r \frac{v n^P \frac{\rho}{r} d\rho}{\left\{ 2 \frac{e}{M} [v(\rho) - v(r)] \right\}^{1/2}} \right\} \quad [\text{II.14}]$$

où v désigne la fréquence des collisions ionisantes des primaires sur les neutres, n^P la densité des primaires, M la masse d'un ion et ϵ_0 la permittivité du vide.

En géométrie plane l'équation est analogue. La seule différence vient de ce que le terme $\frac{\rho}{r}$ disparaît.

Le dénominateur de l'intégrant est simplement la vitesse acquise par un ion en chute libre dans le potentiel du plasma, entre le point où il a été créé (ρ) et le point d'observation (r).

Pour simplifier l'équation [II-14] nous allons effectuer un changement de variables :

$$\left. \begin{aligned} S &\equiv \gamma r \\ \gamma &\equiv \frac{n^P}{n_{e0}} \sqrt{\frac{M}{kT_e}} v \\ \eta(S) &= - \frac{ev(r)}{kT_e} \end{aligned} \right\} \quad \text{[II-15]}$$

L'équation d'équilibre du plasma s'écrit alors en géométrie cylindrique :

$$\frac{1}{\delta^2} S \nabla^2 \eta = \int_0^S \frac{\sigma d\sigma}{\sqrt{\eta(S) - \eta(\sigma)}} - e^{-\eta(S)} \quad \text{[II-16]}$$

et en géométrie plane :

$$\frac{1}{\delta^2} \frac{d^2}{dS^2} \eta = \int_0^S \frac{d\sigma}{\sqrt{\eta(S) - \eta(\sigma)}} - e^{-\eta(S)} \quad \text{[II-17]}$$

avec, dans les deux cas (ω_{Pi} est la fréquence plasma-ionique) :

$$\delta = \frac{n_{e0}}{n^P} \frac{\omega_{Pi}}{v} \sqrt{2} \quad \text{[II-18]}$$

b) Conditions aux limites

Si la paroi est isolante, on doit écrire que les flux électroniques et ioniques y sont égaux :

$$J_e = J_i$$

Si la paroi est conductrice, il faut tenir compte du fait que chaque électron primaire produit un ion et un électron. Il y a donc deux électrons pour chaque ion qui tombe sur la paroi :

$$J_e = 2J_i$$

Comme les électrons sont maxwelliens, le courant électronique a pour expression :

$$J_e = \frac{n_{e0} e}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT_e}{m_e} \right)^{1/2} \exp[ev/kT_e] \quad [\text{II.19}]$$

L'équation de conservation des ions s'écrit :

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{J_i}{e} = -\nu n^P \quad [\text{II.20}]$$

Si l'on suppose le régime permanent et la densité des primaires (n^P) uniforme, on obtient :

$$J_i = e\nu n^P R \quad [\text{II.21}]$$

où R désigne le rayon de l'enceinte. Avec le changement de variables [II.15], les conditions précédentes deviennent :

$$\frac{e^{-\eta(S^P)}}{S^P} = \epsilon \sqrt{\frac{m_e}{M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad [\text{II.22}]$$

S^P est la valeur de S à la paroi,

$\epsilon = 1$ pour une paroi isolante et $\epsilon = 2$ pour une paroi conductrice.

Connaissant $\eta(S)$ solution de [II.16] ou [II.17], l'équation [II.22] impose la valeur S^P prise par S sur la paroi : c'est la valeur pour laquelle la courbe $y = \exp[-\eta(S)]$ coupe la droite $y = \epsilon \sqrt{\frac{m_e}{M}} \frac{S}{\sqrt{2\pi}}$.

Comme l'expérimentateur décide de la position de la paroi (en $r = R$), les équations [II.15] fixent la valeur du rapport n_{e0}/n_P :

$$\gamma = \frac{S^P}{R}$$

$$\frac{n_{e0}}{n^P} = \sqrt{\frac{M}{kT_e}} \cdot \frac{R}{S^P} \quad [\text{II.23}]$$

Pour connaître la densité au centre n_{e0} , il suffit donc d'évaluer n^P .

c) Profils de densité non collisionnels en l'absence de \vec{B}

Le coefficient δ des équations [II.16] et [II.17] est en général très grand (nous en donnerons une évaluation au paragraphe suivant). Le terme contenant le laplacien peut donc être négligé dans la majeure partie du plasma. C'est l'hypothèse de quasi neutralité habituelle, qui n'est démentie qu'au voisinage immédiat des parois. Ces équations s'écrivent alors :

$$\exp[-\eta(S)] = \int_0^S \frac{\sigma d\sigma}{\sqrt{\eta(S) - \eta(\sigma)}} \quad (\text{cylindre}) \quad [\text{II.24}]$$

$$\exp[-\eta(S)] = \int_0^S \frac{d\sigma}{\sqrt{\eta(S) - \eta(\sigma)}} \quad (\text{plan}) \quad [\text{II.25}]$$

Tonks et Langmuir (10) en ont donné une solution analytique approchée, en développant $S(\eta)$ en série de puissances. La figure II-6 montre la variation de la densité électronique qu'ils ont obtenue. Les équations [II.22] et [II.23] donnent la valeur du rapport n_{e0}/n^P qui dépend de S^P , intersection de la courbe $e^{-\eta(S)}$ avec la droite $y = \epsilon \sqrt{\frac{m_e}{M}} \frac{S}{\sqrt{2\pi}}$. Comme celle-ci est pratiquement confondue avec l'axe OS, S^P est l'endroit où $e^{-\eta(S)}$ s'annule, c'est-à-dire l'endroit où $\eta(S)$ est infini :

$$\text{en géométrie plane} \quad S^P \approx 0,345 \quad [\text{II.26}]$$

$$\text{en géométrie cylindrique} \quad S^P \approx 0,58 \quad [\text{II.27}]$$

Il ne faut cependant pas perdre de vue que la solution de Langmuir n'est pas valable au voisinage des parois car la condition

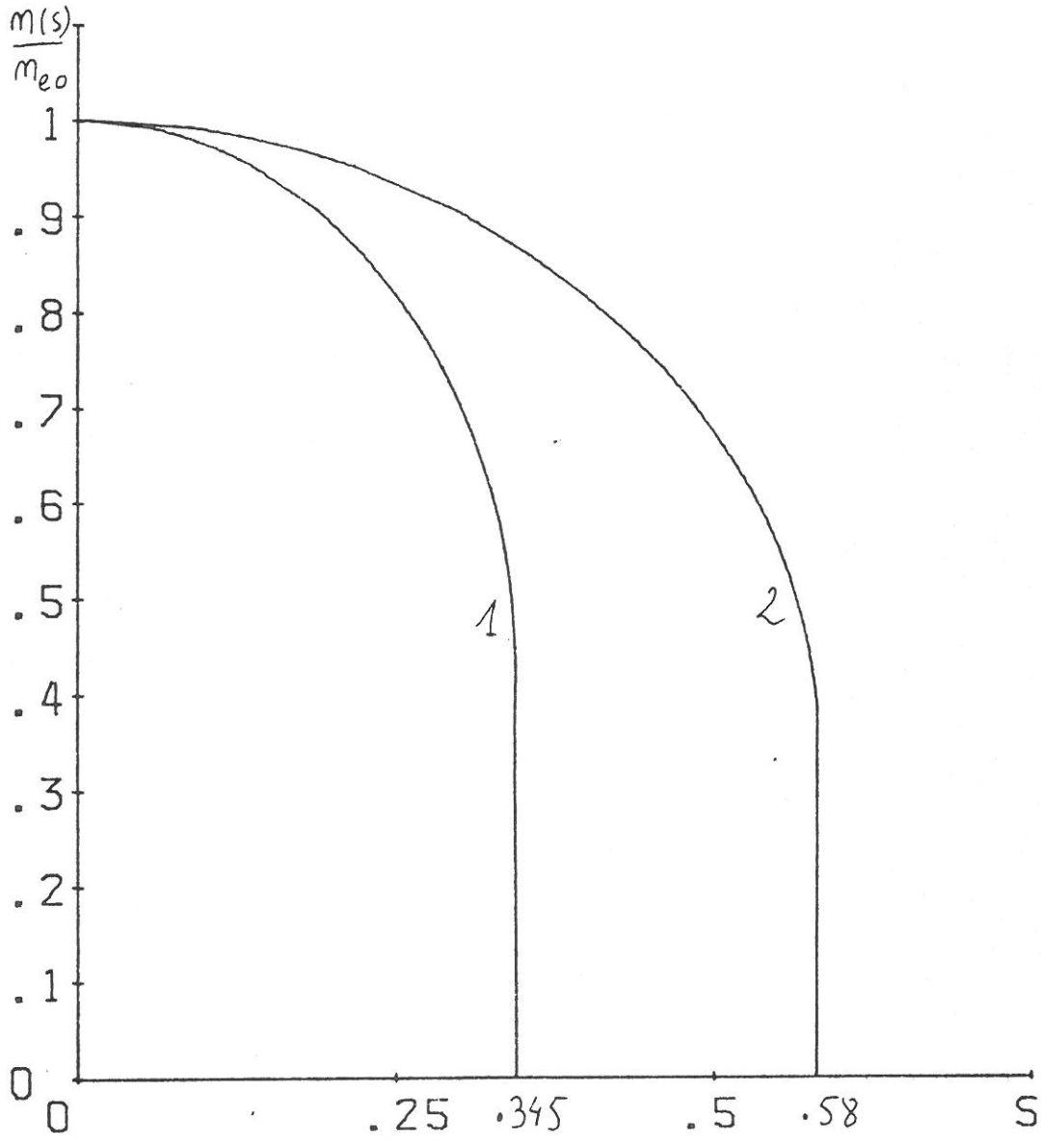


Figure II-6: Variation de la densité électronique dans la théorie de Langmuir.
Courbe 1: cas plan
Courbe 2: cas cylindrique

$$\frac{n(s)}{n_0} = \exp(-\eta(s))$$

de quasi-neutralité n'y est plus vérifiée. Si l'on résolvait les équations [II.24] et [II.25] en gardant le laplacien (on peut le faire numériquement (11)), le résultat serait le même que celui de Langmuir dans la majeure partie du plasma et $n(S)$ resterait fini, bien que très grand, au voisinage des parois. La valeur de S^P que l'on trouverait serait proche de celle de Langmuir.

II.3.B. PLASMAS MULTIPOLAIRES

a) Densité au centre

La théorie de Tonks et Langmuir est valable en l'absence de champ magnétique. Elle s'applique donc aux plasmas multipolaires dans la majeure partie de l'enceinte.

Si, comme nous l'avons écrit au chapitre I la densité obtenue dans les dispositifs multipolaires, est essentiellement due au bon confinement des électrons primaires, la théorie précédente devrait donner le bon ordre de grandeur pour la densité au centre n_{e0} , à condition d'écrire qu'il n'y a pas de pertes d'électrons primaires sur les parois.

Désignons par I^P le courant de décharge. L'équation de conservation des primaires s'écrit :

$$\frac{\partial n^P}{\partial t} = \frac{\partial n^P}{\partial t} = \frac{I^P}{e\pi R^2 H} - \nu n^P \quad [\text{II.28}]$$

En régime établi et en supposant n^P uniforme on trouve ($\pi R^2 H$ est le volume de l'enceinte) :

$$n^P = \frac{I^P}{e\nu\pi R^2 H} \quad [\text{II.29}]$$

Dans une décharge d'Argon, à $P_0 = 10^{-4}$ Torr et pour un courant $I^P = 150$ A, on a mesuré :

$$n_{e0} = 1,3 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$$

$$T_e = 4,3 \text{ eV}$$

De [II.27] et [II.23] on tire $\frac{n_{eo}}{n_p} = 76$. [II.29] nous donne $n_p \approx 3 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$.

La densité au centre prévue par la théorie précédente est alors :

$$n_{eo} \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$$

ce qui est en bon accord avec la densité mesurée, malgré un profil inexact.

Avec ces grandeurs nous pouvons vérifier l'hypothèse de quasineutralité : le coefficient δ des équations [II.16] et [II.17] vaut :

$$\delta^2 \approx 10^7$$

b) Profil de densité

Le profil de densité est déterminé par ce qui se passe dans la zone magnétisée. Malheureusement, nous ne disposons pas d'une équation simple pour y décrire l'équilibre du plasma.

Au paragraphe précédent (§ II.2) nous avons vu qu'un modèle simple qui ne tient pas compte de façon détaillée de l'inhomogénéité des coefficients de diffusion et du terme source, peut cependant rendre compte des profils observés, dans le régime collisionnel. Nous allons donc procéder de façon analogue :

Nous supposons qu'en moyenne la fuite des électrons vers les parois est ralentie car ils sont attachés aux lignes de champs. Il en résulte que la fuite des ions, dont le rayon de Larmor est plus grand que l'épaisseur de la gaine magnétique, est en moyenne freinée par un champ électrique de type ambipolaire.

Nous allons donc résoudre l'équation :

$$e^{-\eta(S)} = \int_0^S \frac{\alpha d\sigma}{\sqrt{\eta(S) - \eta(\sigma)}} \quad [\text{II.30}]$$

avec $\alpha = 1$ dans la région où le champ magnétique est négligeable

et $\alpha > 1$ à partir d'une abscisse arbitraire r_g et jusqu'à la paroi située en R. Comme le dénominateur de l'intégrand représente la vitesse des ions nous simulons ainsi soit une diminution de leur vitesse de fuite, soit une augmentation du terme d'ionisation, dans la gaine magnétique.

Soulignons que cette procédure présente deux difficultés : d'abord nous ne pouvons pas la justifier par un calcul numérique rigoureux comme au § II.2.C. et ensuite nous avons passé sous silence le fait que $e^{-\eta(S)}$ n'est plus la densité électronique. Nous allons cependant pouvoir nous faire une idée des profils de densité auxquels nous pouvons nous attendre.

Plutôt que d'utiliser un développement en série de puissances qui conduit à des calculs inextricables, nous avons préféré recourir à l'ordinateur.

Nous allons donner quelques détails de calcul car nous avons affaire à une équation intégral-différentielle qui n'est pas classique.

La fonction sous le signe somme est singulière en $\sigma = S$. Nous divisons donc l'intervalle $[0, S]$ en segments de largeur h et nous développons $\eta(S)$ en série de Taylor sur $[S-h, S]$:

$$\eta(\sigma) = \eta(S) + (\sigma - S) \frac{d\eta}{dS} + \dots$$

Négligeant les termes d'ordre supérieur à h , nous obtenons une équation approchée de [II.30] :

$$e^{-\eta(S)} - \int_0^{S-h} \frac{\alpha d\sigma}{\sqrt{\eta(S) - \eta(\sigma)}} - \frac{2h^{1/2}\alpha}{\sqrt{d\eta/dS}} = 0 \quad [\text{II.31}]$$

Cette équation présente l'avantage de contenir une intégrale définie que l'on peut traiter par une méthode classique (par exemple celle de Simpson).

Posons :

$$\eta_{k+1} \equiv n(S=kh), \quad k \text{ entier}$$

$$F(x) \equiv e^{-x} - \alpha \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{\sqrt{x-\eta_i}} - 2 \frac{h\alpha}{\sqrt{x-\eta_n}}$$

où les C_i sont les coefficients de Simpson. Et assignons à η_1 , η_2 , η_3 des valeurs calculées à partir de la solution de Langmuir.

η_{n+1} est alors la solution de l'équation $F(x) = 0$ que l'on obtient par une méthode standard (par exemple celle de Newton).

L'erreur globale est en $\mathcal{O}(h^{3/2})$, ce qui est loin d'être une performance ! Elle est essentiellement due au passage de [II.30] à [II.31]. Nous n'avons pas cherché à la diminuer car bien que la méthode soit lourde, elle converge relativement vite. Nous l'avons testée en vérifiant que pour $\alpha = 1$ on retrouve bien la courbe de Langmuir.

La figure II.7 présente les résultats. On peut y vérifier que le profil de densité est d'autant plus uniforme que α est grand, c'est-à-dire que la fuite de plasma est ralentie ou que le terme source est augmenté par le champ magnétique.

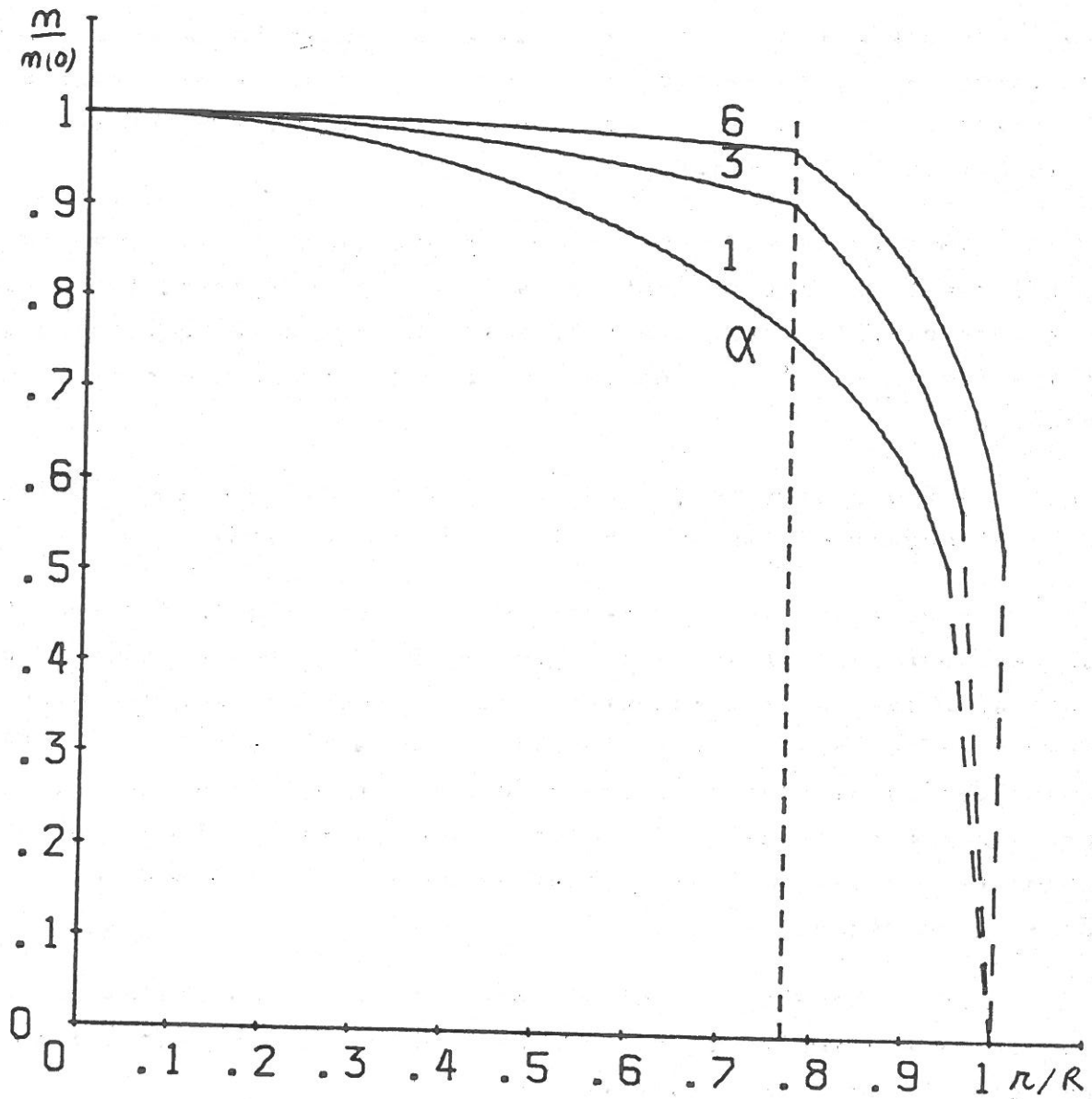


Figure II-7: Profils de densité non collisionnels pour différentes valeurs de α (cas plan). Les courbes en traits pleins correspondent aux points calculés. Au voisinage de $r/R=1$, notre méthode de calcul ne convergeait pas.

II.4. DISCUSSION

Les pages qui précèdent permettent de conclure que l'uniformité des plasmas multipolaires est explicable si l'on suppose soit une diminution de la fuite du plasma dans la gaine magnétique, soit la localisation de l'ionisation dans la même région. Cependant, pour expliquer les profils observés, l'effet considéré doit être très important.

Nous avons vu au § I.3 qu'à basse pression les aimants n'allongent pas notablement la durée de vie du plasma (un facteur 3 seulement). Celle-ci étant directement reliée à la vitesse de fuite des ions, l'effet de confinement du plasma n'est pas très important.

A haute pression, nous avons vu au § II.2.C que l'effet de confinement ne conduit pas à un profil uniforme.

Nous devons donc admettre que les profils de densité observés sont surtout dus à l'augmentation du terme d'ionisation au voisinage des parois. En outre, cette hypothèse explique bien les mesures effectuées avec la feuille de mica (§ II.2.C.d). Cette augmentation ne peut être due qu'à une accumulation des électrons primaires dans la gaine magnétique, qui entraîne elle-même une augmentation des collisions ionisantes avec les atomes neutres dans cette région.

Pour connaître le détail des variations spatiales de la densité des primaires, nous allons devoir étudier leurs trajectoires dans le champ multipolaire.

Liste des principaux symboles utilisés dans les expressions mathématiques du chapitre II

$\dot{\psi}$	flux de particules
D_{ji}	tenseur de diffusion
∇	opérateur gradient
n	densité
I	taux d'ionisation
n_o	densité des atomes neutres
n^P	densité des primaires
v^P	vitesse des primaires
σ^{Po}	section efficace des collisions primaires-neutres
D	coefficient de diffusion
kT_e	énergie thermique électronique du plasma
M	masse des ions
ν	fréquence des collisions ions-neutres
γ	produit des mobilités électronique et ionique
R	position de la paroi de l'enceinte
r_g	début de la gaine magnétique
β	rapport des coefficients de diffusion à l'intérieur de la décharge et dans la gaine magnétique
α	rapport des taux d'ionisation dans la gaine magnétique et à l'intérieur de la décharge
n_e	densité électronique
n_{eo}	densité électronique au centre de la décharge
$v(r)$	potentiel plasma
e	charge électronique
ϵ_o	permittivité du vide

ω_{pi} fréquence plasma ionique
 J_e, J_i densité de courant électronique et ionique
 m_e masse électronique
 H hauteur de l'enceinte cylindrique
 I^P courant de décharge.

* *
*

PLAN DU CHAPITRE III

ETUDE DES TRAJECTOIRES DES ELECTRONS PRIMAIRES DANS LE CHAMP MULTIPOLAIRE

III.1.	<u>INTRODUCTION</u>	40
III.2.	<u>EQUATIONS DU MOUVEMENT</u>	42
III.3.	<u>COORDONNEES REDUITES</u>	44
III.4.	<u>CONFIGURATION DU CHAMP MULTIPOLAIRE</u>	47
	III.4.A. Topographie du champ.....	47
	III.4.B. Symétries.....	49
III.5.	<u>ZONES INTERDITES ET PARTICULES PIEGEES</u>	52
III.6.	<u>APPROXIMATION ADIABATIQUE</u>	55
	III.6.A. Domaine de validité.....	55
	III.6.B. Equations du mouvement adiabatiques.....	59
	III.6.C. Invariants adiabatiques.....	64
	III.6.D. Application au champ multipolaire.....	67
III.7.	<u>PROGRAMME DE CALCUL DES TRAJECTOIRES</u>	71
	III.7.A. Méthode utilisée.....	71
	III.7.B. Choix des constantes et précision du calcul.....	71
III.8.	<u>TRAJECTOIRES DES PARTICULES PIEGEES</u>	74
	III.8.A. Particules piégées adiabatiques.....	74
	III.8.B. Particules piégées non adiabatiques.....	83
III.9.	<u>TRAJECTOIRES DES PARTICULES LIBRES</u>	88
	<u>LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISES</u>	96

CHAPITRE III

ETUDE DES TRAJECTOIRES DES ELECTRONS PRIMAIRES DANS LE CHAMP MULTIPOLAIRE

III.1. INTRODUCTION

Le calcul des trajectoires de particules chargées dans le champ multipolaire a déjà été fait par Samec (5). Cependant, aucun auteur n'a étudié l'influence de ce champ sur la densité des électrons primaires. Nous le ferons dans les deux chapitres qui suivent, mais auparavant nous devons étudier les trajectoires.

Par commodité, nous allons remplacer le multipôle cylindrique par une structure linéaire : le champ magnétique est produit par une rangée de barreaux aimantés parallèles et alignés (figure III-1). Le rayon de notre enceinte étant beaucoup plus grand que l'écartement des aimants ($R = 50$ cm contre $\ell = 6$ cm), la situation physique n'en est pas changée pour autant.

Les champs électriques de charge d'espace du plasma sont situés dans le plan perpendiculaire aux barreaux aimantés et les variations de potentiel ne dépassent pas quelques volts. Comme les primaires ont une énergie de quelques dizaines d'eV, ces champs ne changent pas la nature des trajectoires. Ils entraînent une dérive $\vec{E} \times \vec{B}$ des particules parallèlement aux barreaux aimantés et ne changent pas les variations de la densité des électrons primaires dans le plan (x,y) . Par conséquent, nous les négligeons.

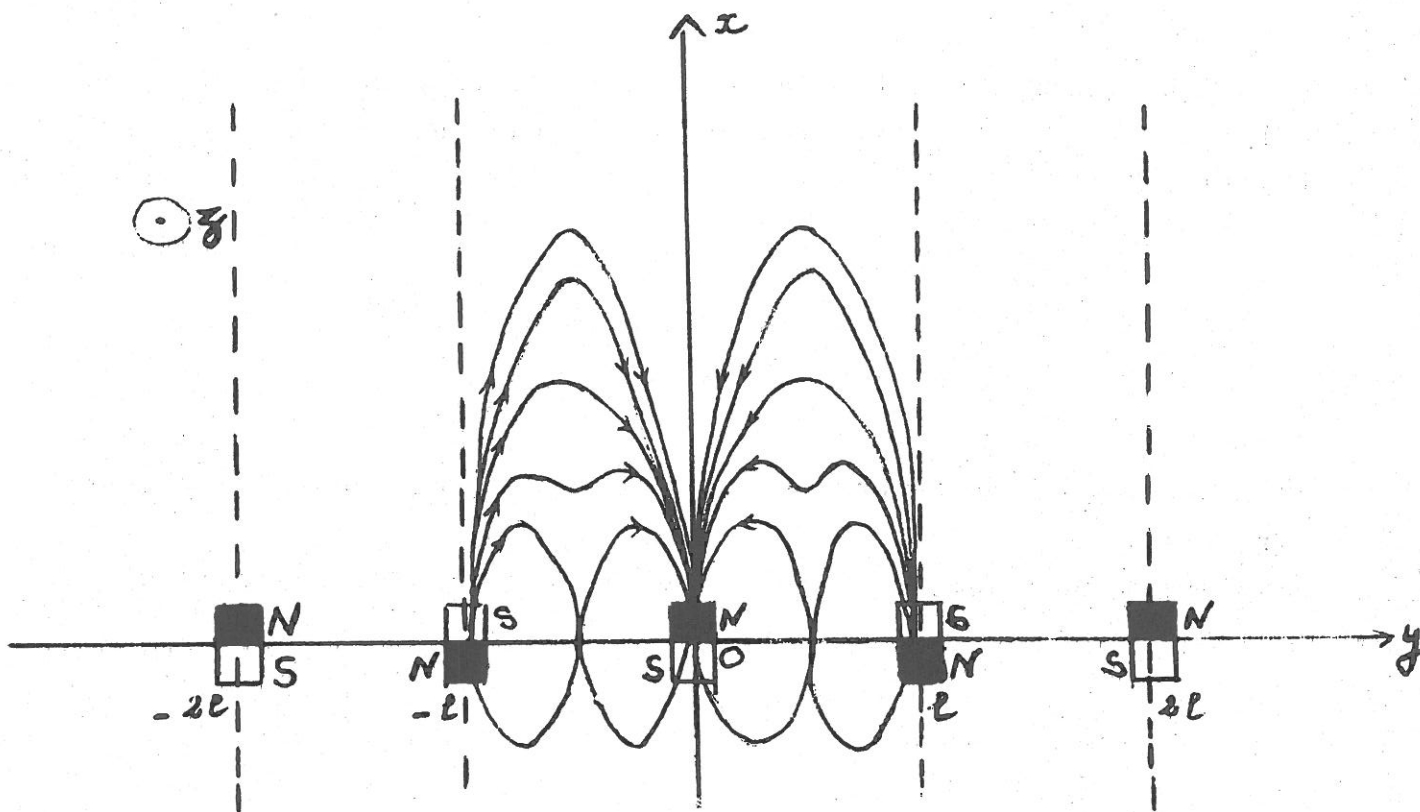


Figure III-1: Structure du champ magnétique. Les barreaux aimantés sont parallèles à l'axe Oz .

III.2. EQUATIONS DU MOUVEMENT

Le champ magnétique produit par une rangée d'aimants alignés dérive d'un potentiel vecteur à une seule composante (5), (12) :

$$\vec{A} = A(x,y)\hat{z} \quad [\text{III.1}]$$

$$A(x,y) = \frac{\ell B_0}{\pi} \frac{\text{ch} \frac{\pi x}{\ell} \sin \frac{\pi y}{\ell}}{\text{ch}^2 \frac{\pi x}{\ell} - \cos^2 \frac{\pi y}{\ell}} \quad [\text{III.2}]$$

où ℓ désigne l'écartement des aimants et B_0 une constante qui les caractérise.

Le champ magnétique, égal au rotationnel de \vec{A} a pour composantes :

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A}{\partial y} \\ B_y &= -\frac{\partial A}{\partial x} \\ B_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [\text{III.3}]$$

Le lagrangien du mouvement s'écrit alors (i varie de 1 à 3 et représente la coordonnée x , y ou z)

$$L(x_i, \dot{x}_i) = \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - eA(x,y)\dot{z} \quad [\text{III.4}]$$

On en déduit l'impulsion :

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$$

en particulier :

$$P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} - eA(x,y) \quad [\text{III.5}]$$

Les équations d'Euler s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

Et sous forme explicite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} p_x = -e \frac{\partial A}{\partial x} \dot{z} \\ \frac{d}{dt} p_y = -e \frac{\partial A}{\partial y} \dot{z} \\ \frac{d}{dt} p_z = 0 \end{array} \right. \quad [\text{III.6}]$$

Les deux premières équations ne sont autres que les composantes x et y de la force de Lorentz :

$$\vec{F} = -e \vec{x} \times \vec{B}$$

D'après la troisième équation, p_z est un invariant du mouvement et comme le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, l'énergie est aussi conservée :

$$p_z = mv_{z0} - eA(x_0, y_0) \quad [\text{III.7}]$$

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_0^2 \quad \text{III.8}$$

où l'indice "o" désigne les conditions initiales.

III.3. COORDONNEES REDUITES

On introduit les variables sans dimension :

$$\begin{aligned} X &\equiv \frac{\pi x}{\ell} \\ Y &\equiv \frac{\pi y}{\ell} \\ \vec{V} &\equiv \frac{\vec{v}}{v_0} \\ T &\equiv \frac{eB_0}{m} t \\ \vec{b} &\equiv \frac{\vec{B}}{B_0} \\ P &\equiv \frac{P_z}{mv_0} \end{aligned} \quad \text{[III.9]}$$

Le potentiel vecteur ([III.2]) s'écrit :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\ell B_0}{\pi} \lambda(X, Y) \\ \lambda(X, Y) &\equiv \frac{\text{ch } X \sin Y}{\text{ch}^2 X - \cos^2 Y} \end{aligned} \quad \text{[III.10]}$$

Le champ réduit a pour composantes :

$$\begin{aligned} b_X &= - \frac{\partial \lambda}{\partial Y} \\ b_Y &= \frac{\partial \lambda}{\partial X} \end{aligned} \quad \text{[III.11]}$$

En introduisant la constante :

$$C \equiv \frac{\ell}{\pi} \frac{eB_0}{mv_0} \quad \text{[III.12]}$$

les équations du mouvement ([III.6]) deviennent :

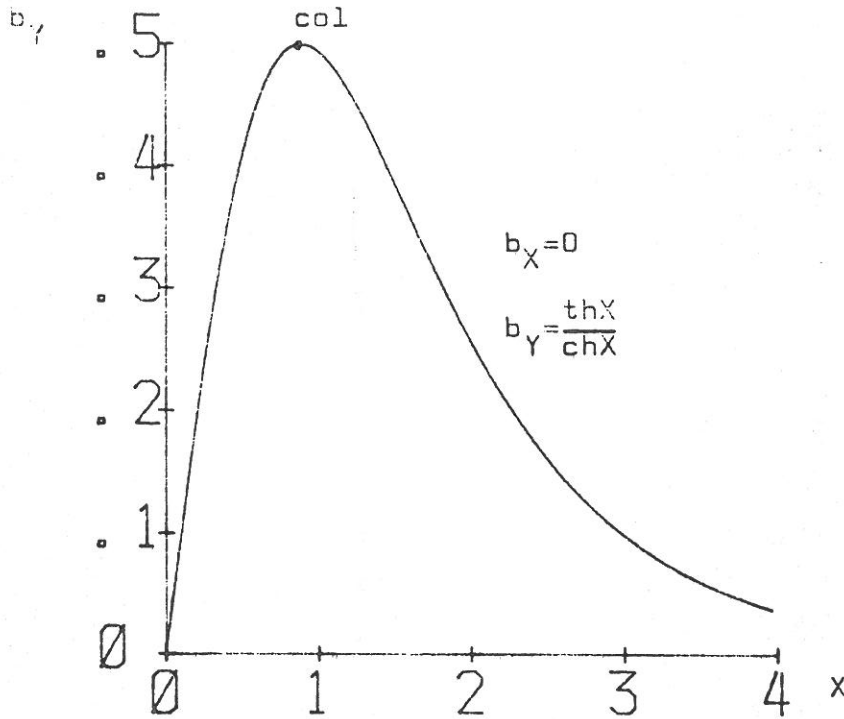
$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_X}{dT} &= V_Z \frac{\partial \lambda}{\partial X} \\ \frac{dV_Y}{dT} &= V_X \frac{\partial \lambda}{\partial Y} \\ \frac{dV_Z}{dT} &= V_X \frac{\partial \lambda}{\partial X} - V_Y \frac{\partial \lambda}{\partial Y} \\ \frac{dX}{dT} &= \frac{1}{C} V_X \\ \frac{dY}{dT} &= \frac{1}{C} V_Y \\ \frac{dZ}{dT} &= \frac{1}{C} V_Z \end{aligned} \right\} \quad [\text{III.13}]$$

Et les invariants du mouvement :

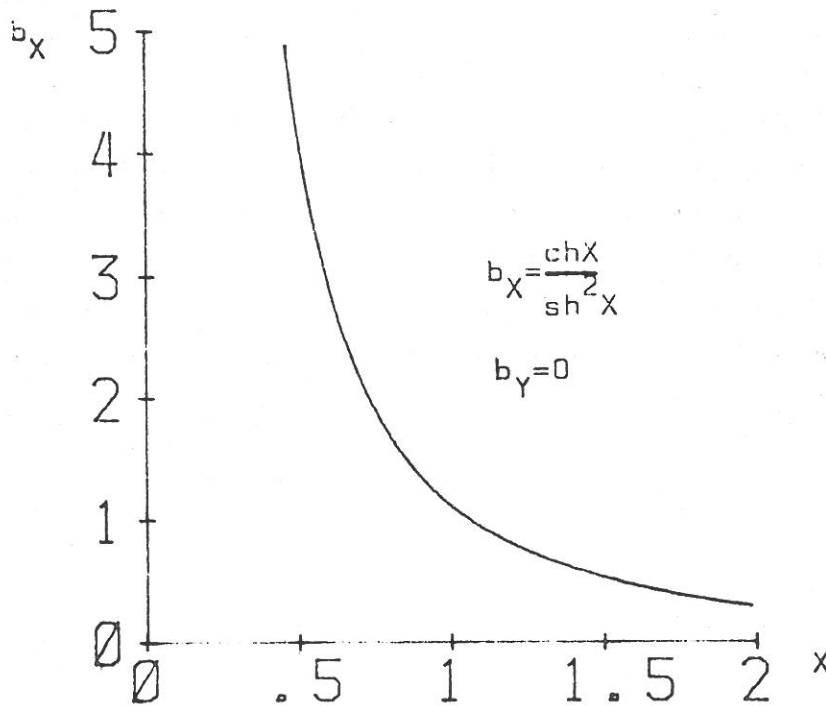
$$V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2 = 1 \quad [\text{III.14}]$$

$$V_Z - C\lambda(X,Y) = V_Z^0 - C\lambda(X_0, Y_0) \quad [\text{III.15}]$$

L'écartement et l'aimantation des aimants, la charge, la masse et l'énergie des particules n'apparaissent dans ces équations qu'à travers la constante C. Il existe donc des lois d'échelle : si l'on fait varier les paramètres précédents sans changer la valeur de C, les trajectoires sont identiques. Seules changent les échelles de temps et de distance, conformément aux équations [III.9].



FigureIII-2:Variation du champ magnétique le long de $\gamma = \pi/2$
Le champ présente un maximum appelé col et égal à 1/2
au voisinage de $X=0.8814$.



FigureIII-3:Variation du champ magnétique le long de $\gamma = 0$.
Le champ décroît de façon monotone quand on s'éloigne
de la paroi($X=0$).

III.4. CONFIGURATION DU CHAMP MULTIPOLAIRE

III.4.A. TOPOGRAPHIE DU CHAMP

Nous avons déjà donné l'expression du potentiel vecteur ([III.2] et [III.10]). Voici les composantes de \vec{b} :

$$b_X = \frac{\partial \lambda}{\partial Y} = \text{ch } X \cos Y \frac{\text{sh}^2 X - \sin^2 Y}{(\text{ch}^2 X - \cos^2 Y)^2} \quad [\text{III.16}]$$

$$b_Y = -\frac{\partial \lambda}{\partial X} = \text{sh } X \sin Y \frac{\text{ch}^2 X + \cos^2 Y}{(\text{ch}^2 X - \cos^2 Y)^2} \quad [\text{III.17}]$$

Il est manifeste que \vec{b} est orthogonal au gradient de $\lambda(X,Y)$. Par conséquent, les lignes de champ sont les courbes sur lesquelles λ est constant.

Les figures III-2 et 3 montrent la variation de b_X et b_Y le long des axes $Y = 0$ et $Y = \frac{\pi}{2}$. Dans ce dernier cas, on constate que le module de \vec{b} présente un maximum (un col) égal à $1/2$. La constante B_0 qui caractérise les aimants dans l'équation [III.2] est donc égale à deux fois la valeur de $|\vec{b}|$ au col.

La figure III-4 montre la topographie du champ. Sur la partie gauche, on a tracé les lignes de champ. Celles-ci se resserrent toutes sur les aimants et forment une structure appelée cusp. La droite $Y = 0$ passe par le milieu d'un cusp. La droite $Y = \frac{\pi}{2}$ passe entre deux aimants. Sur la partie droite de la figure III.4, on a tracé les lignes sur lesquelles le module du champ est constant. Celui-ci a pour expression :

$$|\vec{b}|^2 = \frac{\text{ch}^2 X - \sin^2 Y}{(\text{ch}^2 X - \cos^2 Y)^2} \quad [\text{III.18}]$$

En particulier, sur la droite $Y = 0$ on a :

$$|\vec{b}| = \frac{\text{ch } X}{\text{sh}^2 X} \quad [\text{III.19}]$$

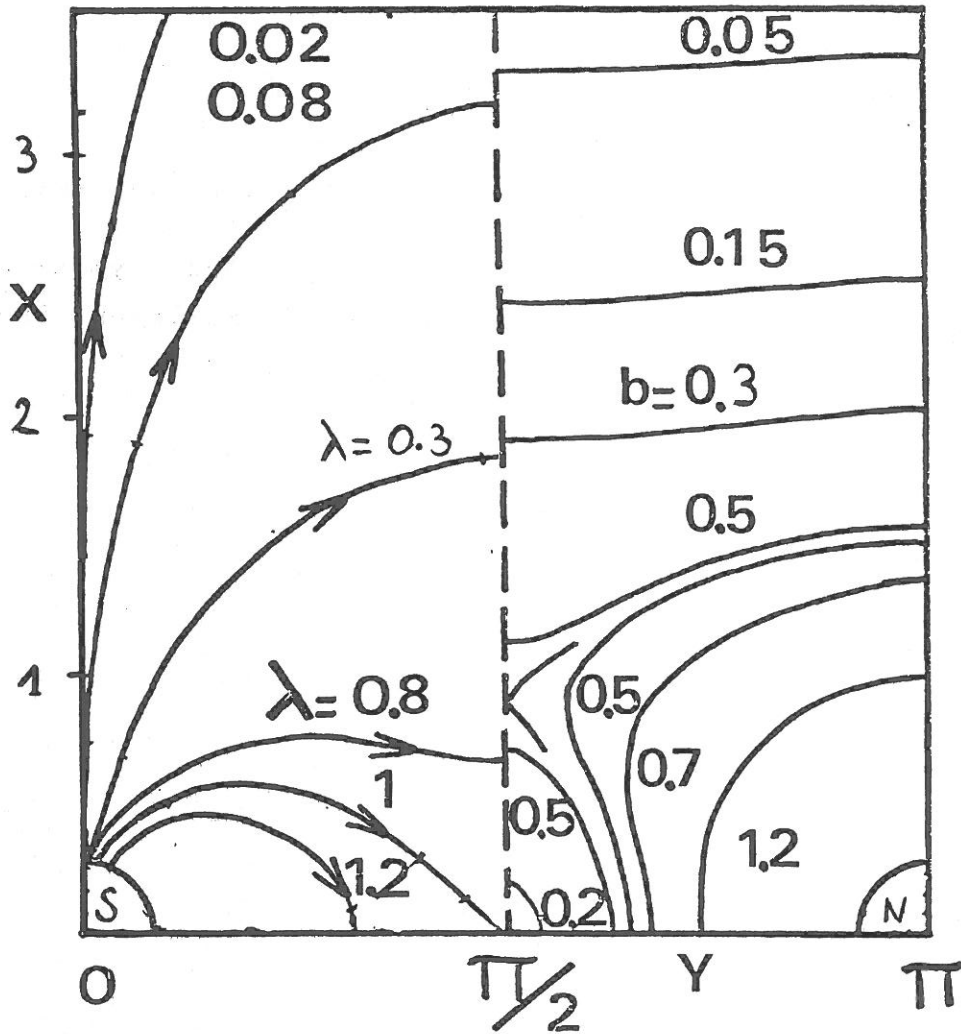


Figure III-4: Topographie du champ multipolaire.
Les axes sont les mêmes que ceux de la figure III-1, mais les unités ont changé

III.4.B. SYMETRIES

Il y a trois opérations de symétrie qui laissent le champ invariant :

une translation quelconque le long de OZ

une translation de 2π le long de OY

une symétrie par rapport aux plans $Y = k\pi$ ($k =$ entier naturel)

Une translation de π le long de OY suivie d'une symétrie par rapport au plan $Z = 0$ laissent les équations du mouvement invariantes. Seul P_Z change de signe. En effet, posons :

$$X' \equiv X$$

$$Y' \equiv Y - \pi$$

$$Z' \equiv -Z$$

Alors :

$$V'_X = V_X$$

$$V'_Y = V_Y$$

$$V'_Z = -V_Z$$

$$\lambda(X', Y') = \frac{\text{ch } X \sin(Y-\pi)}{\text{ch}^2 X - \cos^2(Y-\pi)} = -\lambda(X, Y)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial X'} = -\frac{\partial \lambda}{\partial X}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial Y'} = -\frac{\partial \lambda}{\partial Y}$$

$$\frac{dV_X}{dT} = V_Z \frac{\partial \lambda}{\partial X} \text{ devient } \frac{dV'_X}{dT} = (-V_Z) \left(-\frac{\partial \lambda}{\partial X}\right) = V'_Z \frac{\partial \lambda}{\partial X'}$$

$$\frac{dV_Y}{dT} = V_Z \frac{\partial \lambda}{\partial Y} \text{ devient } \frac{dV'_Y}{dT} = (-V_Z) \left(-\frac{\partial \lambda}{\partial Y}\right) = V'_Z \frac{\partial \lambda}{\partial Y'}$$

$$P = V_Z - C\lambda(X, Y) \text{ devient } P' = (-V_Z) - C\left(-\lambda(X, Y)\right)$$

$$= V'_Z - C\lambda(X', Y') = -P$$

Grâce à cette dernière opération de symétrie, nous pouvons restreindre l'étude des trajectoires à la bande $|Y| < \pi/2$. Lorsqu'une particule sortira de cette bande au point A (figure III-5) on la réinjectera au point A' en changeant le signe de P. La trajectoire décrite par la particule à partir du point A' sera alors la translatée de la trajectoire qu'elle aurait suivie à partir de A si on l'avait laissée continuer.

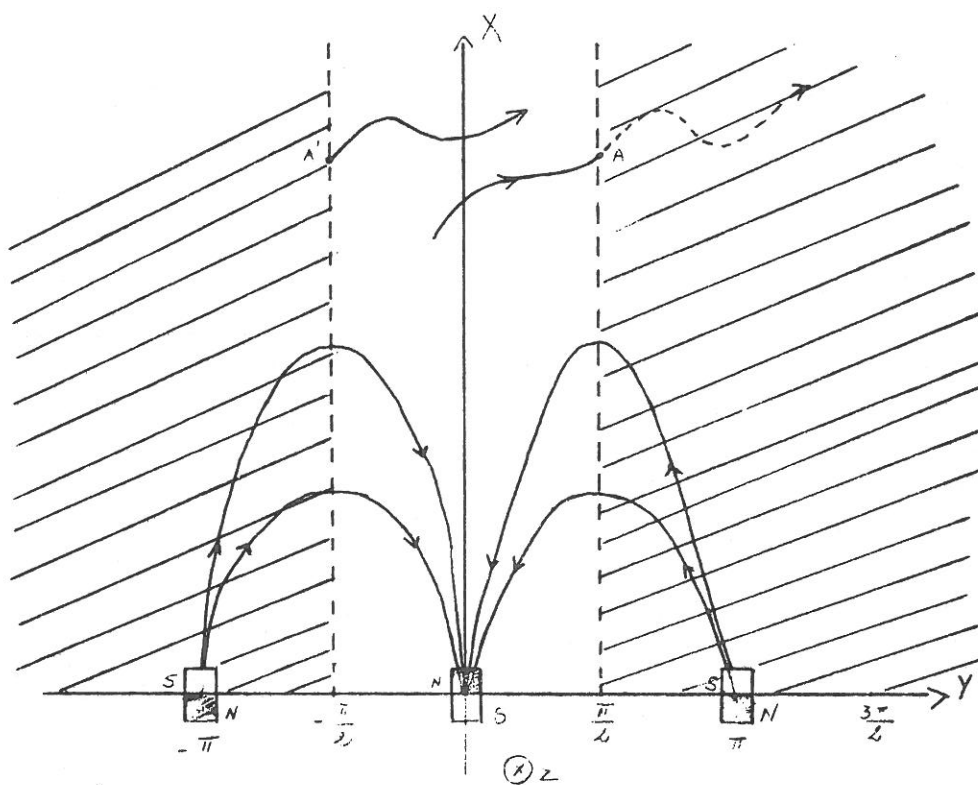


Figure III-5: Symétries du champ et domaine de calcul.
Le trièdre (X, Y, Z) est direct.

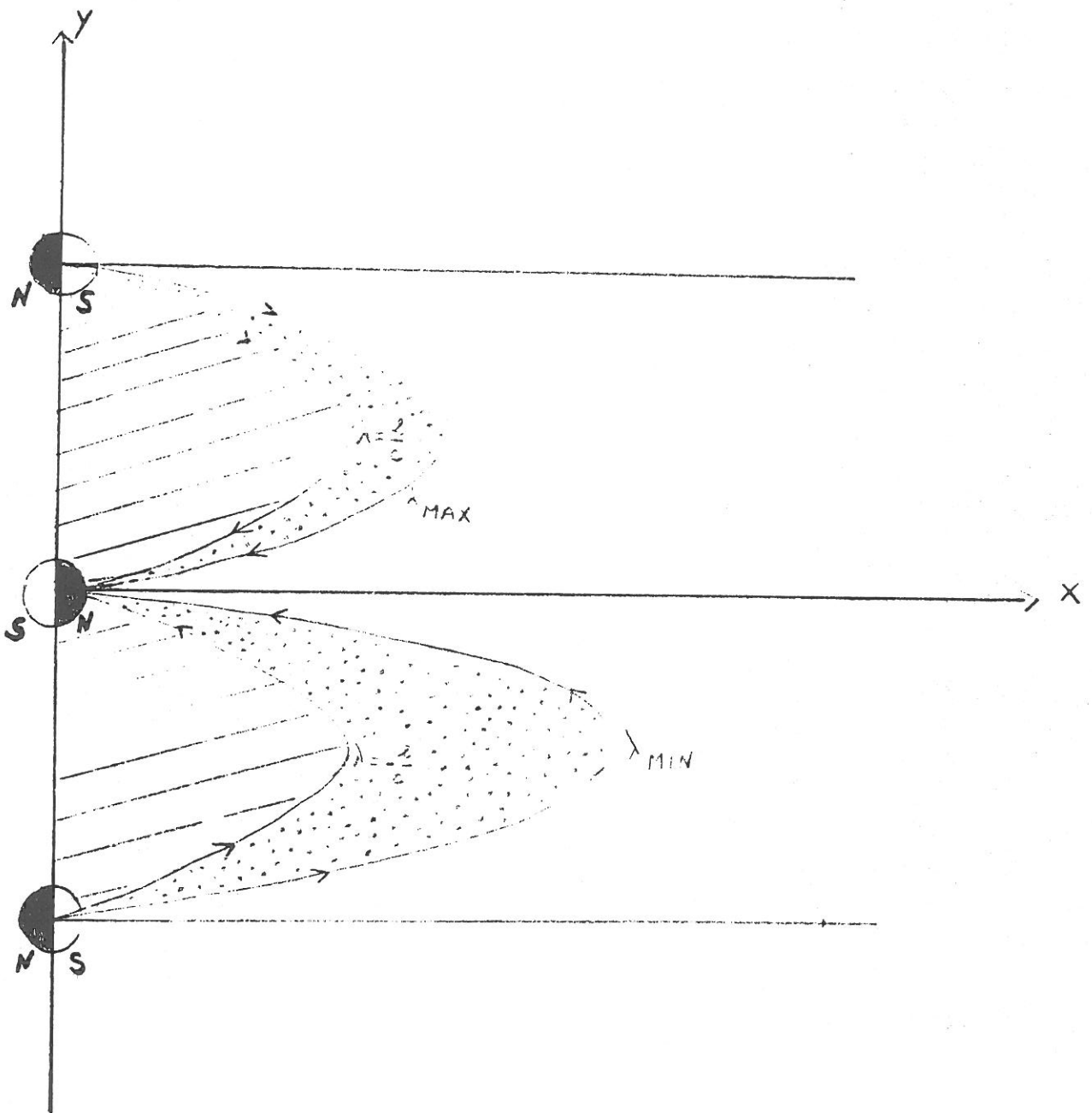


Figure III-6: Zones interdites aux particules qui viennent de l'infini. Le domaine hachuré indique la région interdite à toutes les particules, quelle que soit la valeur de P . La zone en pointillés montre le domaine supplémentaire interdit aux particules de P donné. Le trièdre (X, Y, Z) est direct.

III.5. ZONES INTERDITES ET PARTICULES PIEGEES

Les invariants du mouvement permettent de déduire des propriétés très générales concernant les trajectoires : reprenons les équations de conservation en coordonnées réduites :

$$v_X^2 + v_Y^2 + v_Z^2 = 1 \quad [\text{III.14}]$$

$$v_Z - C\lambda(X,Y) = P^0 \quad [\text{III.15}]$$

Éliminons v_Z et écrivons que $v_X^2 + v_Y^2$ est toujours positif. On obtient :

$$\left(1 - P^0 - C\lambda(X,Y)\right)\left(1 + P^0 + C\lambda(X,Y)\right) \geq 0$$

D'où l'on déduit :

$$\lambda_{\min} \leq \lambda(X,Y) \leq \lambda_{\max} \quad [\text{III.20}]$$

avec

$$\lambda_{\min} \equiv -\frac{1 + P_0}{C} \quad [\text{III.21}]$$

$$\lambda_{\max} \equiv \frac{1 - P_0}{C} \quad [\text{III.22}]$$

Les électrons primaires sont donc astreints à se mouvoir dans les régions où la condition [III.20] est vérifiée.

Il y a deux cas à considérer :

- λ_{\min} et λ_{\max} sont de signes contraires. Le volume accessible aux particules est alors ouvert (figure III-6). Ce cas correspond aux particules qui viennent de l'infini, pour lesquelles $P_0 = v_{Z0}$ et est donc compris entre -1 et 1. Les lignes de champ $\lambda = \frac{2}{C}$ et $\lambda = -\frac{2}{C}$ définissent un domaine interdit à toutes les particules venant de l'infini, quelle que soit la valeur de P.

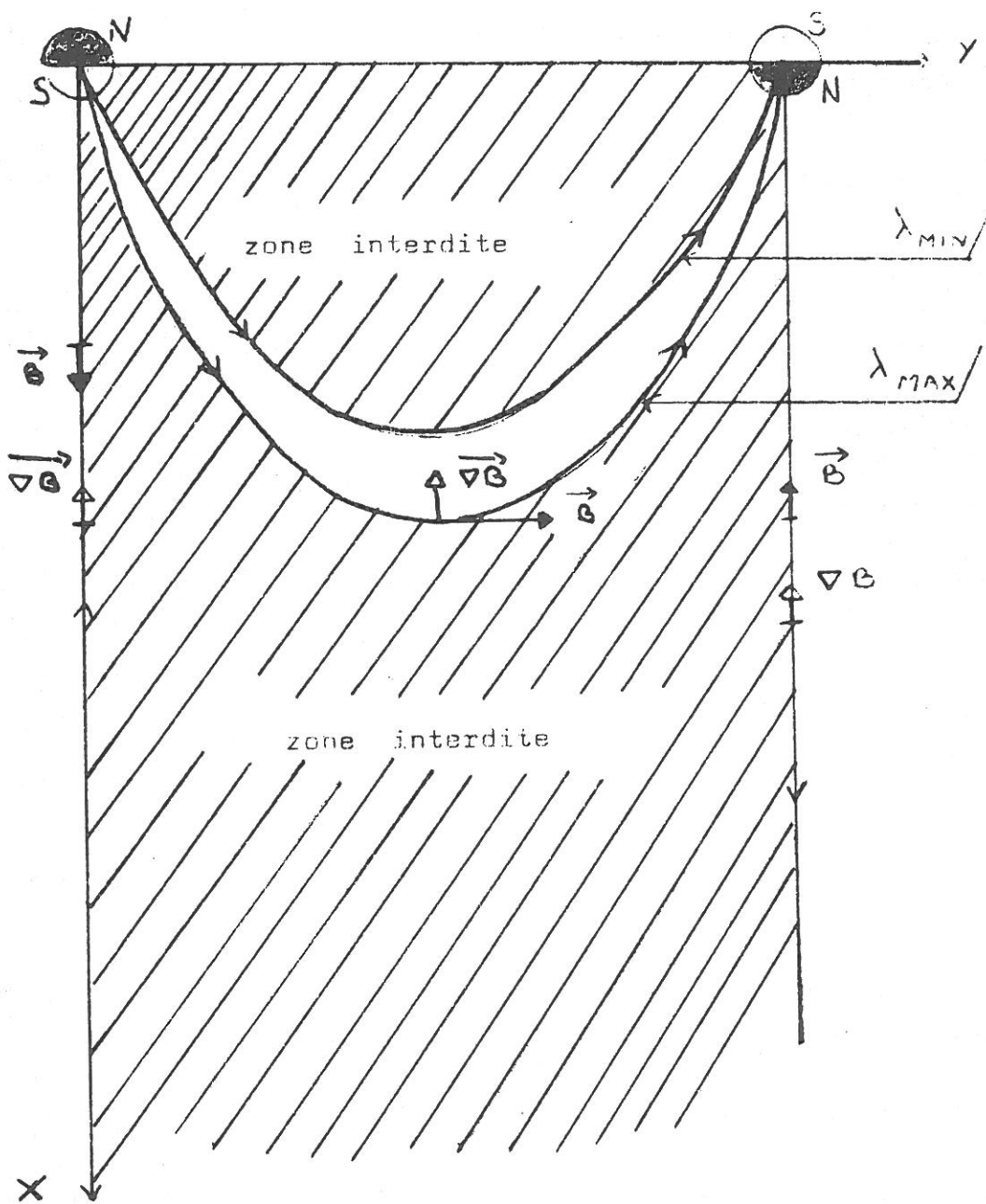


Figure III-7: Zones interdites aux particules piégées pour une valeur de P donnée.

- λ_{\min} et λ_{\max} sont de même signe. Le volume accessible aux particules est alors fermé (figure III-7). Les particules sont astreintes à se mouvoir dans une région en forme de croissant, sans pouvoir s'éloigner des aimants. Nous verrons qu'elles oscillent indéfiniment entre deux points miroir. Ces particules sont définies par la relation :

$$p^2 > 1 \quad \text{[III.23]}$$

qui s'écrit avec les coordonnées habituelles :

$$\left(\frac{P_z}{mv_0} \right)^2 > 1 . \quad \text{[III.24]}$$

III.6. APPROXIMATION ADIABATIQUE

III.6.A. DOMAINE DE VALIDITE

Il existe très peu de configurations magnétiques pour lesquelles les équations du mouvement peuvent être intégrées analytiquement. Dans le cas du champ multipolaire, cela n'est malheureusement pas possible. Cependant, lorsque le rayon de Larmor est petit devant la longueur d'inhomogénéité du champ, on peut simplifier les équations en ignorant le mouvement de rotation de la particule autour d'une ligne de champ et en ne s'intéressant qu'au mouvement d'un point fictif : le centre guide.

Il existe alors des quantités qui se conservent de façon approchée et qui jouent le rôle d'intégrales premières : les "invariants adiabatiques".

La longueur d'inhomogénéité est la plus grande des quantités :

$$\left[\frac{1}{B_i} \frac{\partial}{\partial x_j} B_i \right]^{-1}$$

Pour simplifier, nous choisirons plutôt la définition suivante :

$$L^{-1} \equiv \frac{1}{|\vec{B}|} \frac{\partial}{\partial x} |\vec{B}| \quad [\text{III.25}]$$

car le champ varie plus rapidement avec x qu'avec y .

Le rayon de Larmor vérifie l'inégalité :

$$r_L \equiv \frac{mv_{\perp}}{eB} < \frac{mv_0}{eB} \quad [\text{III.26}]$$

où v_0 désigne le module de la vitesse et v_{\perp} la composante perpendiculaire à \vec{B} .

Le critère d'adiabaticité s'écrit alors :

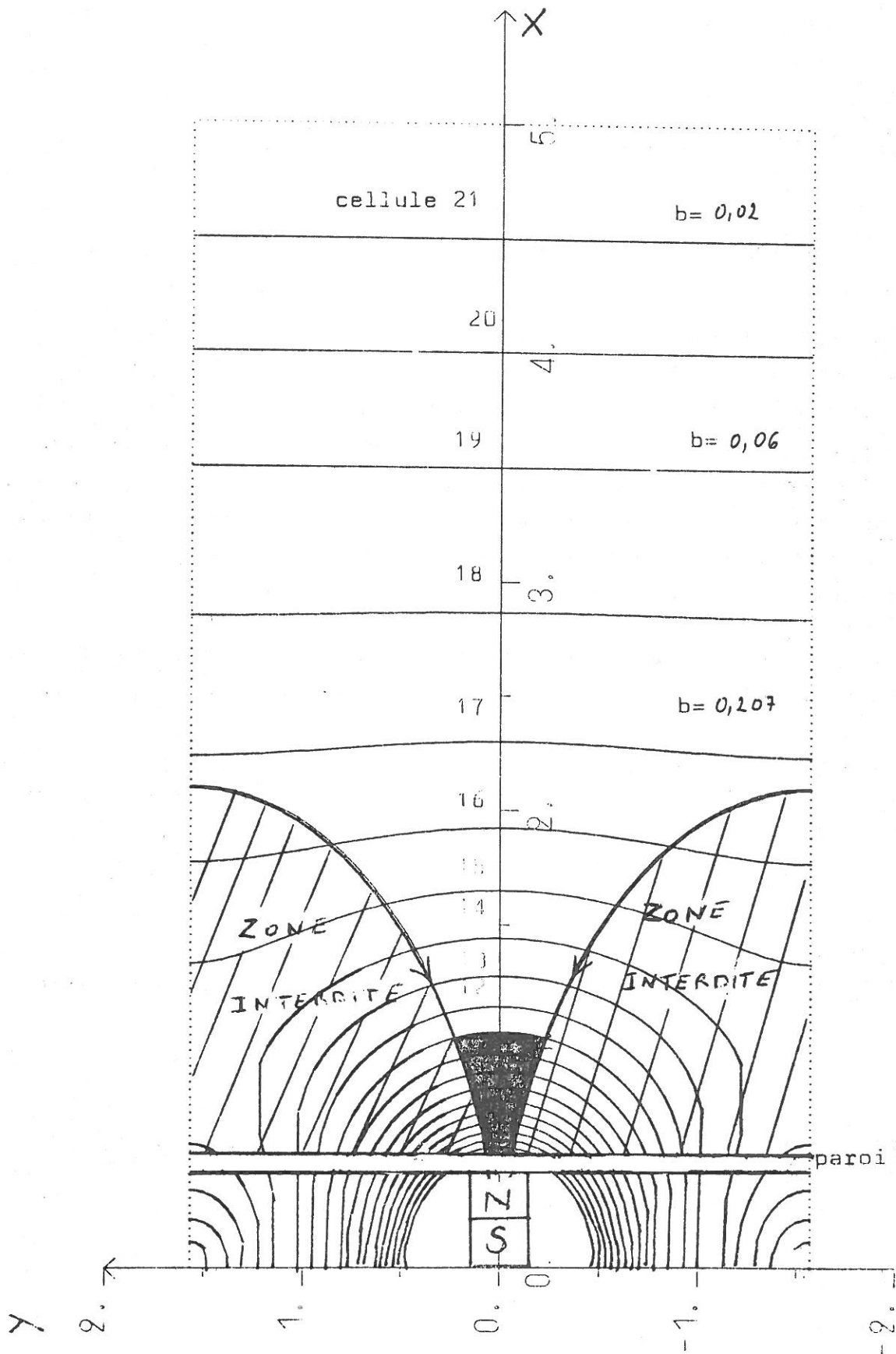


Figure III-8: Domaine de validité de l'approximation adiabatique (zone en grisé) et cellules utilisées pour le calcul des trajectoires (§ III-7)

$$\frac{mv_0}{e} \frac{1}{B^2} \frac{\partial B}{\partial x} \ll 1 \quad [\text{III.27}]$$

Et en coordonnées réduites :

$$\frac{1}{b^2} \frac{\partial b}{\partial X} \ll C \quad [\text{III.28}]$$

où C, défini par [III.12], vaut $\frac{2}{r_L^0}$, r_L^0 étant le rayon réduit de Larmor au col :

$$C \equiv \frac{1}{\frac{\pi}{\ell} \frac{mv_0}{eB_0}} \quad [\text{III.12}]$$

La fonction $\frac{1}{b^2} \frac{\partial b}{\partial X}$ croît rapidement avec X. La région où l'approximation adiabatique est valable est donc limitée au voisinage immédiat des aimants. Cette région est d'autant plus étendue que le champ (B_0) est fort et que l'énergie des électrons (v_0) est faible. Grossièrement, les particules que l'on peut considérer comme adiabatiques sont celles qui se trouvent à l'intérieur des cusps (figure III-8).

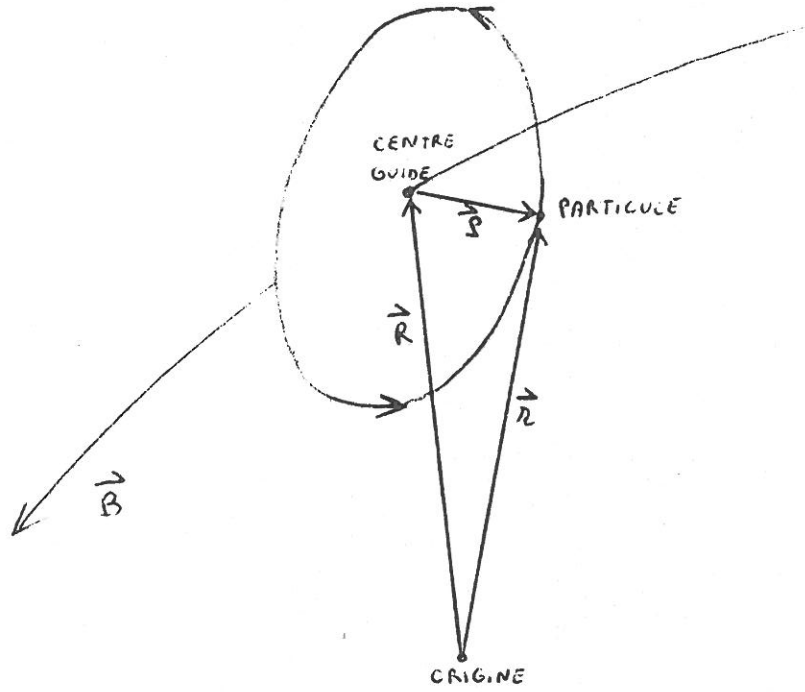


Figure III-9: La particule chargée et son centre guide.

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{\rho} \quad \text{[III.33]}$$

Le mouvement du centre guide est rectiligne, uniforme et de vitesse \vec{u}_E .

Supposons maintenant les champs faiblement non uniformes. La condition [III.27] est alors vérifiée. Au cours de son mouvement circulaire autour du centre guide, la particule subit un champ pratiquement constant et les faibles variations du champ n'auront pas d'effet visible avant plusieurs périodes de Larmor. Il y a donc deux échelles de temps : l'une, rapide, qui correspond à la rotation de la particule autour du centre guide, l'autre, lente, qui correspond à la variation du mouvement de celui-ci.

Reportons [III.33] dans [III.29] et développons les champs en série de Taylor. On néglige les dérivées secondes :

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{B}(\vec{r}) + (\vec{\rho} \cdot \nabla) \vec{B}(\vec{R}) \\ \frac{d^2}{dt^2} \vec{\rho} + \frac{d^2}{dt^2} \vec{R} &= - \frac{e}{m} \left[\vec{E}(\vec{R}) + \vec{R} \times \vec{B}(\vec{R}) \right] - \frac{e}{m} \vec{\rho} \times (\vec{\rho} \cdot \nabla) \vec{B}(\vec{R}) \\ &\quad - \frac{e}{m} (\vec{\rho} \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{R}) - \frac{e}{m} \vec{R} \times (\vec{\rho} \cdot \nabla) \vec{B}(\vec{R}) \end{aligned}$$

Moyennons cette équation sur l'échelle de temps rapide :

$$\langle X \rangle \equiv \frac{\omega}{2\pi} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} X dt$$

Les termes linéaires en $\vec{\rho}$ s'éliminent. Comme \vec{R} varie lentement, il est égal à sa valeur moyenne et il vient :

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{R} = - \frac{e}{m} \left[\vec{E}(\vec{R}) + \vec{R} \times \vec{B}(\vec{R}) \right] - \frac{e}{m} \langle \vec{\rho} \times (\vec{\rho} \cdot \nabla) \vec{B}(\vec{R}) \rangle$$

Le mouvement du centre guide est donc le mouvement d'une particule fictive sollicitée par les champs moyens qui agissent sur la particule et par une force pondéromotrice responsable de

III.6.B. EQUATIONS DU MOUVEMENT ADIABATIQUES

a) Mouvement du centre guide

Nous allons donner, en la simplifiant quelque peu, la dérivation des équations du mouvement du centre guide de Northrop et Teller (13).

Dans un chapitre ultérieur, nous étudierons l'effet d'un champ électrique sur les trajectoires. Considérons donc un électron situé en \vec{r} , de vitesse \vec{v} et subissant l'action d'un champ électromagnétique statique : $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$.

L'équation de mouvement s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e[\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})] \quad [\text{III.29}]$$

Adoptons les définitions suivantes :

vecteur unitaire tangent à \vec{B} :

$$\hat{e}_1 \equiv \frac{\vec{B}}{B} \quad [\text{III.30}]$$

vitesse de dérive électrique :

$$\vec{u}_E \equiv \vec{E} \times \frac{\hat{e}_1}{B} \quad [\text{III.31}]$$

rayon de Larmor ($\omega \equiv \frac{eB}{m}$ est la valeur absolue de la pulsation de Larmor)

$$\vec{\rho} = -\frac{1}{\omega} \hat{e}_1 \times (\vec{v} - \vec{u}_E) \quad [\text{III.32}]$$

Si les champs sont uniformes et si \vec{E} est perpendiculaire à \vec{B} , on sait que le mouvement est cycloïdal. Le vecteur $\vec{\rho}$, qui décrit le mouvement dans un repère galiléen de vitesse \vec{u}_E , est animé d'un mouvement circulaire uniforme, de pulsation ω . Appelons centre guide le centre de ce cercle (figure III.9). Sa position est donnée par :

la dérive du centre guide. Nous devons maintenant évaluer cette force pondéromotrice.

Construisons un repère orthonormé à partir de \hat{e}_1 (défini par [III.30] et évalué en \vec{R}) : $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ et exprimons $\vec{\rho}$ et $\dot{\rho}$:

$$\vec{\rho} = \rho(\hat{e}_2 \sin \theta + \hat{e}_3 \cos \theta)$$

$$\dot{\rho} = -\omega\rho(\hat{e}_2 \cos \theta - \hat{e}_3 \sin \theta) + \dot{\rho}(\hat{e}_2 \sin \theta + \hat{e}_3 \cos \theta)$$

Le signe "-" devant ω est dû au signe de la charge électronique.

De $\langle \sin \theta \cos \theta \rangle = 0$ et $\langle \sin^2 \theta \rangle = \langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}$, on déduit :

$$\langle \vec{\rho} \times (\vec{\rho} \cdot \nabla) \rangle = -\frac{\omega\rho^2}{2} \left\{ \hat{e}_2 \times (\hat{e}_3 \cdot \nabla) - \hat{e}_3 \times (\hat{e}_2 \cdot \nabla) \right\}.$$

L'équation du mouvement du centre guide devient donc :

$$\ddot{\vec{R}} = -\frac{e}{m} \left(\vec{E}(\vec{R}) + \vec{R} \times \vec{B}(\vec{R}) \right) + \frac{e}{m} \frac{\omega\rho^2}{2} \left[\hat{e}_2 \times (\hat{e}_3 \cdot \nabla) \vec{B} - \hat{e}_3 \times (\hat{e}_2 \cdot \nabla) \vec{B} \right]$$

pour simplifier l'expression entre crochets on écrit que $\vec{B} \equiv B^i \hat{e}_i$ et on exprime les composantes (i varie de 1 à 3 et on somme sur les indices deux fois répétés). Appelons β l'expression entre crochets :

$$\beta = \hat{e}_2 \times \hat{e}_i \partial_3 B^i - \hat{e}_3 \times \hat{e}_i \partial_2 B^i = (\partial_2 B^2 + \partial_3 B^3) \hat{e}_1 - \partial_2 B^1 \hat{e}_2 - \partial_3 B^1 \hat{e}_3$$

La divergence du champ magnétique est nulle :

$$\partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3 = 0$$

Reportons dans l'équation précédente. On obtient :

$$\beta = -(\partial_1 B^1 \hat{e}_1 + \partial_2 B^1 \hat{e}_2 + \partial_3 B^1 \hat{e}_3) = -\nabla B^1(R) = -\nabla |\vec{B}(\vec{R})|$$

En définitive, l'équation du mouvement du centre guide s'écrit :

$$\vec{R} = -\frac{e}{m} \left[\vec{E}(\vec{R}) + \vec{R} \times \vec{B}(\vec{R}) \right] - \frac{\mu}{2} \vec{\nabla} |\vec{B}| \quad [\text{III.34}]$$

avec $\mu \equiv \frac{e\omega}{m} \rho^2 = \frac{v_{\perp}^2}{|\vec{B}|}$ [III.35]

où $v_{\perp} \equiv |\vec{\rho}|$ est la composante de la vitesse de l'électron perpendiculaire à \vec{B} et μ le moment magnétique.

Nous allons maintenant résoudre l'équation [III.34] pour exprimer les composantes du mouvement parallèle et perpendiculaire à \vec{B} .

b) Dérive perpendiculaire

Multiplions vectoriellement [III.34] par \hat{e}_1 et réarrangeons les termes pour obtenir la vitesse de dérive perpendiculaire :

$$\vec{u}_{\perp} \equiv \vec{R} - (\vec{R} \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1 = \vec{E} \times \frac{\hat{e}_1}{B} - \frac{\mu}{2\omega} \hat{e}_1 \times \vec{\nabla} B - \frac{1}{\omega} \hat{e}_1 \times \vec{R}$$

Le premier terme n'est autre que \vec{u}_E ([III.31]). Les deux suivants sont des corrections dues à l'inhomogénéité du champ.

Explicitons le dernier terme.

$$\vec{R} \equiv \frac{d}{dt} (\vec{u}_{\perp} + \vec{u}_{\parallel}) = \frac{d\vec{u}_{\perp}}{dt} + u_{\parallel} \frac{d\hat{e}_1}{dt} + \frac{du_{\parallel}}{dt} \hat{e}_1$$

car $\vec{u}_{\parallel} \equiv u_{\parallel} \hat{e}_1$

Au premier ordre $\frac{d\vec{u}_{\perp}}{dt} = \frac{d\vec{u}_E}{dt}$ et la dérive perpendiculaire s'écrit finalement :

$$\vec{u}_{\perp} = \vec{u}_E - \frac{\mu}{2\omega} \hat{e}_1 \times \vec{\nabla} B + \frac{1}{\omega} \frac{d\vec{u}_E}{dt} \times \hat{e}_1 + u_{\parallel} \frac{d\hat{e}_1}{dt} \times \hat{e}_1 \quad [\text{III.36}]$$

Le deuxième terme est la dérive de gradient et le dernier terme, la dérive de courbure.

c) Mouvement parallèle au champ

Reprenons l'équation [III.34] et multiplions la scalairement par \hat{e}_1 :

$$\ddot{R} \cdot \hat{e}_1 = - \frac{e}{m} E_{\parallel}(\vec{R}) - \frac{\mu}{2} (\hat{e}_1 \cdot \nabla) B$$

or
$$\ddot{R} \cdot \hat{e}_1 = \frac{d}{dt} (\dot{R} \cdot \hat{e}_1) - \dot{R} \cdot \frac{d\hat{e}_1}{dt} \approx \frac{du_{\parallel}}{dt} - \vec{u}_E \cdot \frac{d\hat{e}_1}{dt}$$

L'équation du mouvement du centre guide parallèle au champ magnétique est donc :

$$\frac{du_{\parallel}}{dt} = - \frac{e}{m} E_{\parallel}(\vec{R}) - \frac{\mu}{2} (\hat{e}_1 \cdot \nabla) B + \vec{u}_E \cdot \frac{d\hat{e}_1}{dt} \quad [\text{III.37}]$$

d) Energie cinétique

Compte tenu de [III.35] et [III.36] l'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c \equiv \frac{1}{2} m v^2 \approx \frac{1}{2} m (u_E^2 + u_{\parallel}^2 + \mu B) \quad [\text{III.38}]$$

Multiplions scalairement [III.29] par \vec{v} :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} v^2 = - \frac{e}{m} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v} \quad [\text{III.39}]$$

On retrouve bien le fait que la force magnétique ne travaille pas.

III.6.C. INVARIANTS ADIABATIQUES

a) Moment magnétique

Pour plus de généralité, nous supposons que le champ électromagnétique dépend aussi du temps. Les équations du § III.6.B sont toujours vérifiées avec une condition supplémentaire :

$$\frac{1}{\omega} \frac{1}{B} \left| \frac{\partial B}{\partial t} \right| \ll 1$$

Cette expression est l'analogie temporelle de l'inégalité [III.27] : si elle est vérifiée le champ varie très peu pendant une période de Larmor.

Multiplions [III.34] par \vec{R} :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{R}^2 = - \frac{e}{m} \vec{E}(\vec{R}, t) \cdot \vec{R} - \frac{\mu}{2} \vec{R} \cdot \nabla B$$

Soustrayons cette équation de [III.39] ; compte tenu de $\vec{v} \equiv \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{\rho}}$ ([III.33]) :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{\rho}^2 + 2 \dot{u}_{\perp} \cdot \dot{\rho} = - \frac{e}{m} \vec{E}(\vec{R}, t) \cdot \dot{\rho} + \frac{\mu}{2} \vec{R} \cdot \nabla B$$

Moyennons cette équation sur une période de Larmor et écrivons le champ électrique à l'aide des potentiels :

$$\vec{E} = - \nabla \varphi(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(\vec{r}, t)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\dot{\rho}|^2 \approx \frac{e}{m} \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left[\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] \cdot \dot{\rho} dt + \frac{\mu}{2} \vec{R} \cdot \nabla B$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\dot{\rho}|^2 \approx \frac{e}{m} \frac{\omega}{2\pi} \oint \nabla \varphi \cdot d\vec{\rho} - \frac{e}{m} \frac{\omega}{2\pi} \oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\rho} + \frac{\mu}{2} \vec{R} \cdot \nabla B$$

Le premier terme du deuxième membre est pratiquement nul car ρ décrit une orbite presque fermée.

Le deuxième terme se transforme aisément :

$$\oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\rho} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \approx - \pi |\vec{\rho}|^2 \frac{\partial B}{\partial t}$$

Utilisons [III.35]. Il vient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} v_{\perp}^2 \approx \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \vec{R} \cdot \nabla B \right)$$

Le deuxième membre contient la dérivée du champ magnétique dans le repère du centre guide. Comme les dérivées le long du mouvement exact de la particule sont très proches des dérivées le long du mouvement du centre guide, on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} v_{\perp}^2 - \mu \frac{dB}{dt} \approx 0$$

Dérivons [III.35] :

$$\frac{d}{dt} \frac{v_{\perp}^2}{B} = \frac{\frac{dv_{\perp}^2}{dt} - \frac{dB}{dt} \frac{v_{\perp}^2}{B}}{B} \approx 0$$

A condition que B soit non nul, (ce qui est le cas si [III.27] est vérifiée). Nous avons donc démontré que :

$$\frac{d}{dt} \mu \approx 0 \quad \text{[III.40]}$$

Le moment magnétique se conserve donc de façon approchée si les conditions de l'approximation adiabatique sont vérifiées.

b) Invariant longitudinal

L'invariance du moment magnétique est liée à la périodicité du mouvement de la particule autour du centre guide. Lorsque le mouvement du centre guide est lui-même périodique (c'est le cas lorsque la particule oscille entre deux miroirs magnétiques), il existe une deuxième quantité qui est conservée de façon approchée : l'invariant longitudinal J :

$$J \equiv \oint u_{\parallel} dS \quad \text{[III.41]}$$

où l'intégrale porte sur une période de rebond du centre guide et dS est l'élément de longueur de la trajectoire du centre guide.

Nous ne donnerons pas la démonstration de l'invariance de J dans le cas général (13). Nous nous bornerons à la démontrer au paragraphe suivant dans le cas particulier du champ multipolaire (§ III.6.D.c).

III.6.D. APPLICATION AU CHAMP MULTIPOLAIRE

a) Points miroirs

En l'absence de champ électrique, l'énergie cinétique ne varie pas [III.38] et [III.39] :

$$u_{\parallel}^2 + \mu B(x,y) = v_0^2 \quad [\text{III.42}]$$

La figure III-8 montre que dans un cusp les lignes $|\vec{b}| = C^{\text{te}}$ sont presque parallèles à OY. $B(x,y)$ ne dépend donc pratiquement pas de y. De plus, le champ magnétique est presque parallèle à OX et l'on peut écrire :

$$u_{\parallel} \approx v_x \approx \pm \sqrt{v_0^2 - MB(x)} \quad [\text{III.43}]$$

où $B(x)$ est donné par [III.19] ; le signe "+" correspond aux particules qui s'éloignent des aimants et le signe "-" à celles qui s'en approchent. En coordonnées réduites le moment magnétique a pour expression :

$$M \equiv \frac{\mu B_0}{2} = \frac{v_{\perp}^2}{b(X,Y)} \quad [\text{III.44}]$$

L'équation [III.43] devient :

$$V_X \approx \pm \sqrt{1 - Mb(X)} \quad [\text{III.45}]$$

L'abscisse X_M du point où la particule rebrousse chemin est alors solution de l'équation :

$$b(X_M) = \frac{1}{M} \quad \text{III.46}]$$

b) Dérive des électrons

Toujours en l'absence de champ électrique, la dérive perpendiculaire des particules se simplifie ([III.36]) :

$$\vec{u}_\perp = \frac{m}{e} \frac{\mu}{2} \vec{\nabla} B \times \frac{\hat{e}_1}{B} + \frac{m}{e} u_{\parallel} \frac{d\hat{e}_1}{dt} \times \frac{\hat{e}_1}{B} \quad [\text{III.47}]$$

Ces termes s'appellent respectivement la dérive de gradient et la dérive de courbure.

Dans un cusp, la courbure des lignes de champ est faible et ∇B est parallèle à \hat{e}_1 (figure III-7). On s'attend donc à ce que la dérive y soit pratiquement nulle. Entre deux cusps, par contre, ∇B est perpendiculaire à \hat{e}_1 et la courbure est importante. La vitesse de dérive y est maximale. L'équation [III.47] ne fait intervenir que les vecteurs du plan XOY. La dérive est donc parallèle à OZ ; ceci implique que le centre guide suit toujours la même ligne de champ. En gardant les axes adoptés sur la figure III.7, la dérive est dirigée vers les Z négatifs. Si l'on inversait les pôles, les particules dériveraient dans l'autre sens.

c) Invariant longitudinal et période de rebond

Nous venons de voir que le centre guide suivait toujours la même ligne de champ. Celle-ci joint deux aimants de polarités opposées. Il y a donc deux points miroirs M_1 et M_2 et le mouvement est périodique. Soit τ la durée qui sépare deux réflexions et s la distance parcourue par le centre guide sur la ligne de champ λ . [III.42] s'écrit :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mu B(s) = v_0^2$$

d'où l'on déduit :

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - \mu B(s)}}$$

La période de rebond est l'intégrale de dt prise le long de λ :

$$\tau = \int_{M_1}^{M_2} \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - \mu B(s)}} \quad [\text{III.48}]$$

L'invariant longitudinal s'écrit ([III.41]) :

$$J = \oint \sqrt{v_0^2 - \mu B(s)} ds$$

L'intégration porte sur un aller-retour. Comme le temps n'intervient nulle part dans cette expression, l'invariance de J est manifeste.

On pourrait conclure de ce qui précède que le mouvement des particules dans le champ multipolaire est toujours périodique. Cela est évidemment faux. Pour que le mouvement soit périodique il faut que l'approximation adiabatique soit vérifiée tout au long de la trajectoire. Cela n'est pas possible pour les faibles valeurs de λ .

Pour pouvoir comparer avec les résultats du calcul numérique, nous allons écrire [III.48] en coordonnées réduites.

L'élément de longueur de la ligne de champ a pour expression :

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial_Y \lambda}{\partial_X \lambda}\right)^2} dY$$

ou encore ([III.11]) :

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{bX}{bY}\right)^2} dY$$

Soient (X_m, Y_m) les coordonnées du point miroir. L'équation de la ligne de champ λ dans l'intervalle $Y_m \leq Y < \frac{\pi}{2}$ se déduit de [III.10] :

$$X(Y) = \text{Argch} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\sin Y}{\lambda} + \sqrt{\frac{\sin^2 Y}{\lambda^2} + 4 \cos^2 Y} \right] \right\} \quad [\text{III.49}]$$

Le temps mis par la particule pour parcourir une demi-arche (de Y_m à $Y = \frac{\pi}{2}$) est alors :

$$T = C \int_{Y_m}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + \left[\frac{bX(X(Y), Y)}{bY(X(Y), Y)} \right]^2}}{\sqrt{1 - Mb(X(Y), Y)}} dY \quad [\text{III.50}]$$

où $bX(X, Y)$, $bY(X, Y)$ et $b(X, Y)$ sont donnés par [III.16], [III.17] et [III.18].

Cette expression se calcule numériquement sans difficulté. Elle sera utilisée par la suite pour comparer les temps de parcours des particules avec les prévisions de la théorie adiabatique (§ III.8.A et § VI.2).

III.7. PROGRAMME DE CALCUL DES TRAJECTOIRES

III.7.A. METHODE UTILISEE

Les équations du mouvement constituent un système de six équations différentielles ordinaires du premier ordre ([III.13]). Il existe plusieurs méthodes de résolution numérique (14). La méthode de Runge-Kutta présente l'avantage d'autoriser une variation du pas d'intégration, mais elle conduit à des temps de calcul assez longs. Celle d'Adams-Moulton est plus rapide, mais elle exige un pas constant. En outre, au début du calcul, il faut lui fournir une estimation de plusieurs points de la solution par une autre méthode. Nous avons donc choisi de diviser le domaine de calcul en cellules de frontière $|\vec{B}| = C^{te}$. Le pas de temps ΔT , voisin d'une fraction de la période de Larmor, est choisi constant dans chaque cellule (numérotées de 1 à 21 sur la figure III-8). On intègre les équations du mouvement à l'aide de la méthode d'Adams-Moulton, tant que la particule est à l'intérieur d'une cellule. On utilise par contre celle de Runge-Kutta si la particule change de cellule ou sort du domaine de calcul. Lorsqu'elle traverse la frontière $|Y| = \frac{\pi}{2}$, on la réinjecte de l'autre côté en changeant le signe de V_z , comme nous l'avons expliqué au § III.4.B. Le calcul cesse dès que la distance parcourue est égale à un libre parcours moyen ou dès que la particule tombe sur une paroi placée en X voisin de zéro. On trouvera l'ordinogramme du calcul dans l'appendice B.

III.7.B. CHOIX DES CONSTANTES ET PRECISION DU CALCUL

Nous ne pouvons malheureusement pas calculer les trajectoires avec les constantes correspondant à l'enceinte multipolaire dont nous disposons. Les temps de calcul seraient prohibitifs. Le tableau III.1 permet de comparer les valeurs choisies aux valeurs réelles. Comme nous travaillons en coordonnées réduites, la seule

différence entre la situation expérimentale et la situation choisie réside dans les constantes C et T_{\max} .

Les échelles de longueur et de temps sont les suivantes :

à $X = 1$ correspond $x \approx 2$ cm

à $T = 1$ correspond $t \approx 1$ ns

Le domaine de calcul est un rectangle limité par les droites $|Y| = \frac{\pi}{2}$, $X = 5$ et $X = 0,5$. La paroi de l'enceinte est supposée placée en $X = 0,5$. En $X = 5$ le champ magnétique vaut 3 % de la valeur au col.

Le pas d'intégration est égal au cinquantième de la période de Larmor. En fin de calcul, on vérifie que l'énergie et P_z ont peu varié (les variations sont dues aux erreurs d'arrondis).

Avec le pas de temps indiqué, la variation relative de l'énergie au bout de 40 périodes de Larmor est de $2 \cdot 10^{-7}$. La variation de l'impulsion est par contre plus importante : si le P_z initial est nul on admet une variation de 0,01.

L'UNIVAC 1110 demande 100 ms pour calculer une période de Larmor par la méthode Adams-Moulton et le double par la méthode Runge-Kutta.

Nous avons testé le programme avec un champ magnétique uniforme. Après trente périodes de Larmor, l'erreur relative sur la position, en comparant avec la solution analytique, était inférieure à 10^{-4} .

	Valeurs réelles	Valeurs choisies
ℓ	6 cm	2π cm
B_o	300 G	100 G
ω_b^o	$3 \cdot 10^9$	10^9
E_{co}	25 eV	50 eV
r_L^o	0,057 cm	0,24 cm
ℓ_{pm}	1 m	1 m
C	35	8,25
T_{max}	1754	400

TABLEAU III.1 : Comparaison entre les constantes utilisées pour calculer les trajectoires et les constantes réelles :

ℓ : écartement des aimants

B_o : double de l'intensité magnétique au col

$\omega_b^o \equiv \frac{eB_o}{m}$: pulsation de Larmor

E_{co} : énergie des électrons primaires

$r_L^o \equiv \frac{mv_o}{qB_o}$: demi rayon de Larmor au col

ℓ_{pm} : libre parcours moyen d'un électron primaire

C : constante de l'équation [III.12]

T_{max} : temps (réduit) au bout duquel le ℓ_{pm} est parcouru

III.8. TRAJECTOIRES DES PARTICULES PIEGEES

III.8.A. PARTICULES PIEGEES ADIABATIQUES

Les figures III.10 montrent la trajectoire d'un électron piégé. Comme nous l'avons prévu au § III.5, la particule est confinée dans une région en forme de croissant, limitée par deux lignes de champ. Dans cet exemple, $P = 3,3$ et les lignes de champ frontières ont pour valeur ([III.21] et [III.22]) :

$$\lambda_{\min} = 0,2788$$

$$\lambda_{\max} = 0,5212.$$

La particule oscille indéfiniment entre deux miroirs magnétiques. La trajectoire présente manifestement deux périodicités : l'une est associée au mouvement de rotation autour du centre guide (période de Larmor) et l'autre est associée aux rebonds du centre guide sur les miroirs magnétiques (période de rebond).

Le tableau III.2 donne quelques indications relatives à la trajectoire au voisinage des points de rebroussement successifs :

La ligne de champ suivie par le centre guide ne varie pratiquement pas :

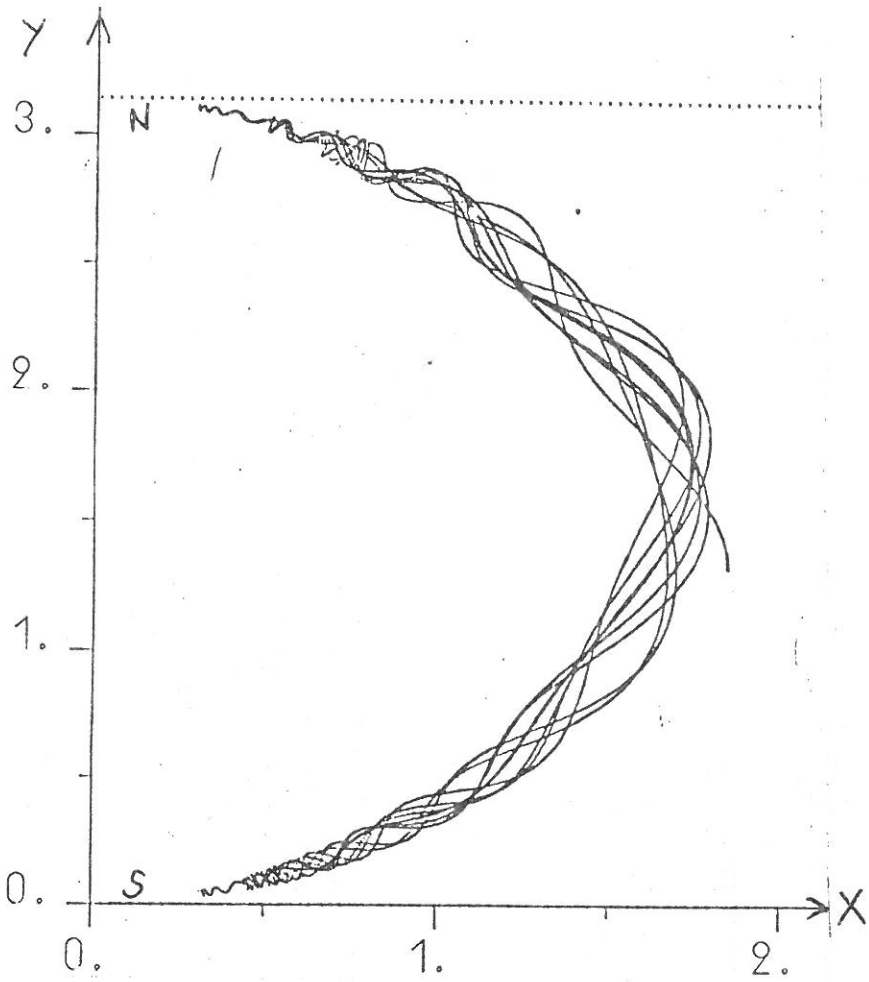
$$\lambda_{CG} \approx \frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}{2} = 0,400$$

La dérive est parallèle à OZ et dirigée vers les Z négatifs.

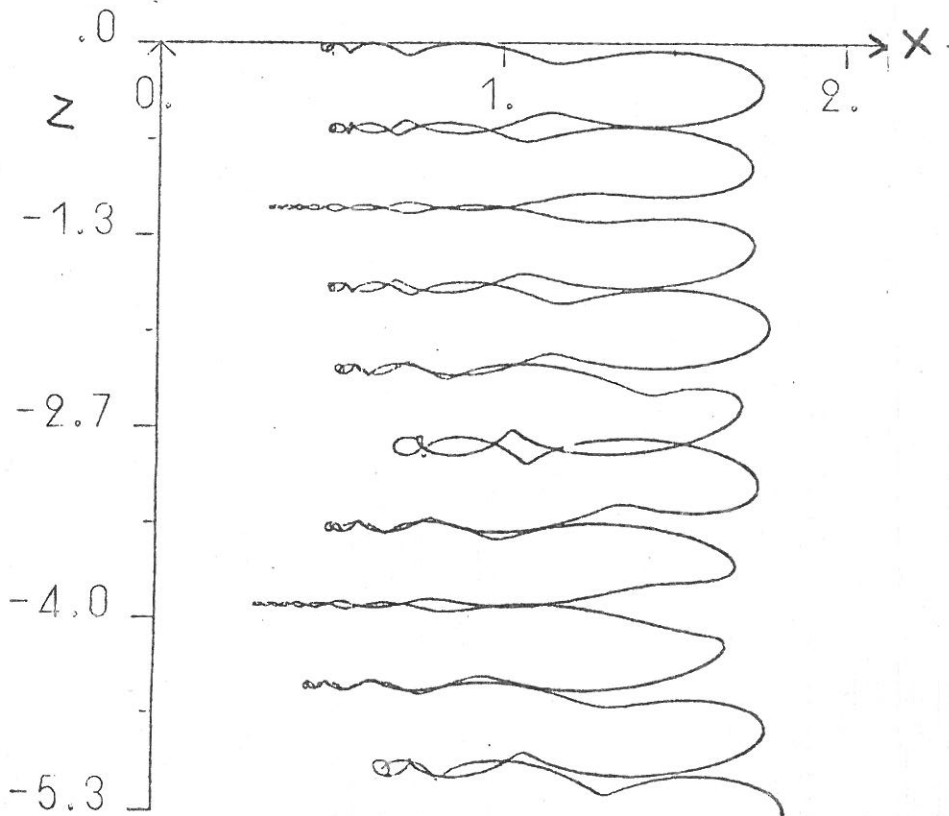
On constate que d'une réflexion à l'autre, le moment magnétique varie beaucoup. La figure III.11 montre le détail des variations en fonction du temps. On y observe des plateaux séparés par de brusques oscillations. Ces variations brutales ont lieu entre les cusps, là où l'approximation adiabatique cesse d'être vérifiée. Chaque passage dans la région non adiabatique entraîne des variations aléatoires du moment magnétique.

Réflexion n°	1	2	3	4	5	6	7
T	T = 1,86	T = 43,7	T = 84,82	T = 126,7	T = 169,1	210,15	T = 251,6
moment magnétique	M = 0,230	M = 0,242	M = 0,103	M = 0,255	M = 0,286	M = 0,506	M = 0,252
point miroir	X = 0,486	X = 0,491	X = 0,319	X = 0,510	X = 0,541	X = 0,690	X = 0,497
point miroir (adiabatique)	X = 0,489	X = 0,501	X = 0,324	X = 0,515	X = 0,546	X = 0,738	X = 0,512
centre guide	$\lambda = 0,400$	$\lambda = 0,399$	$\lambda = 0,398$	$\lambda = 0,394$	$\lambda = 0,392$	$\lambda = 0,392$	$\lambda = 0,390$

TABLEAU III.2 : Renseignements relatifs à la particule des figures III.10 et 11



III-10-a



III-10-b

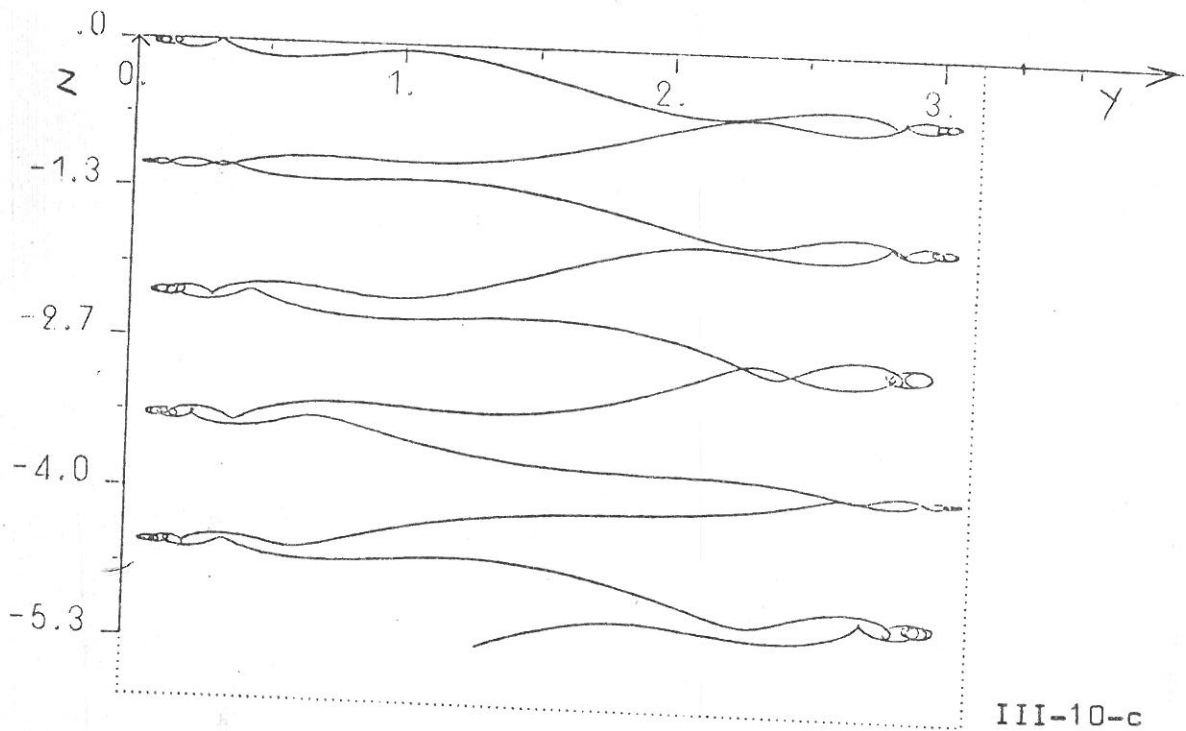
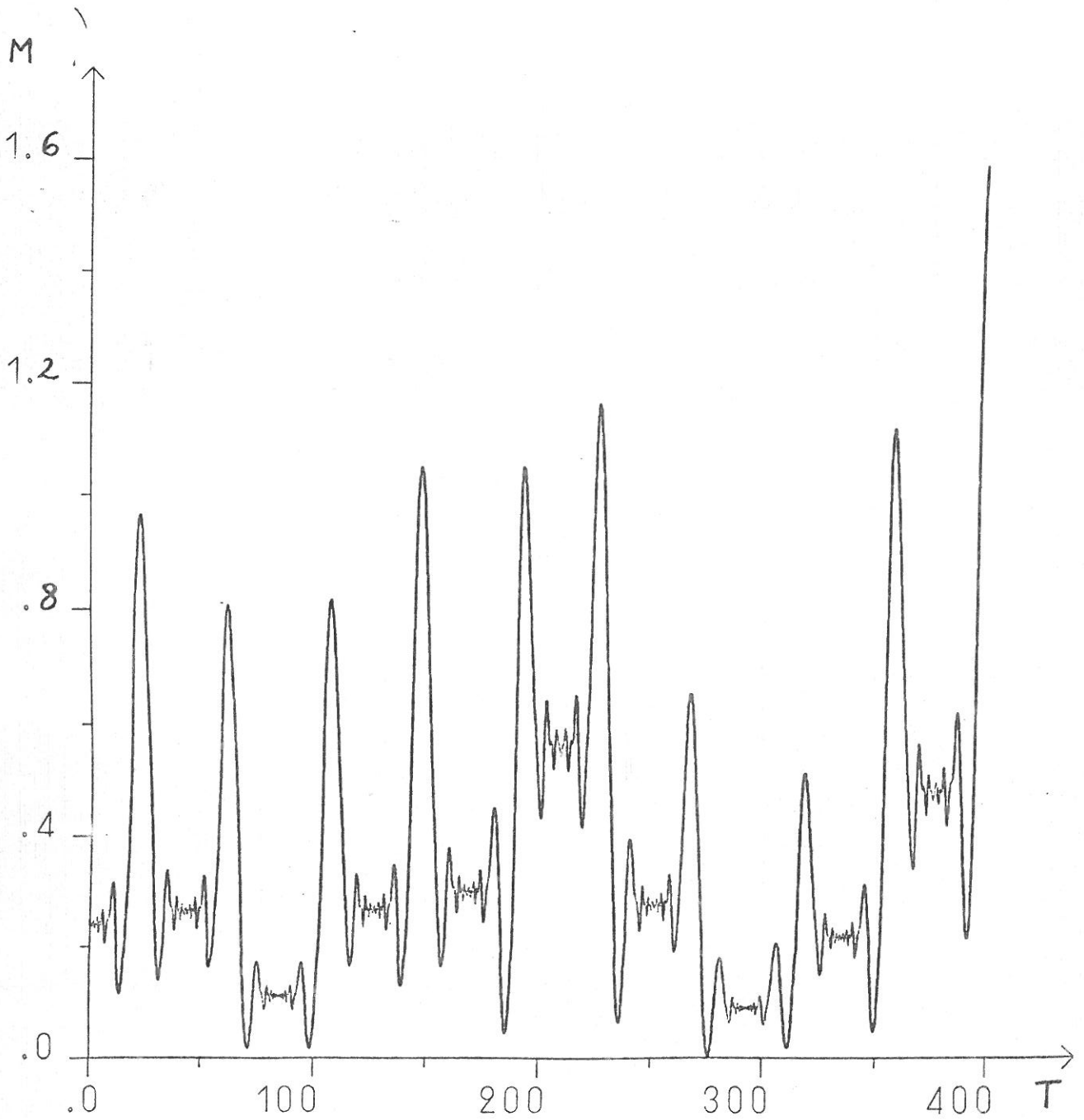


Figure III-10: Trajectoire d'une particule piégée
(a) projection dans le plan XOY
(b) projection dans le plan XOZ
(c) projection dans le plan YOZ

Les figures (b) et (c) montrent que la dérive est dirigée vers les Z négatifs.

Conditions initiales: $X=0.5$
 $Y=0.1$
 $V_x = 0.0595$
 $V_y = -0.9982$
 $P = -3.3$

Figure III-11: Variation du moment magnétique en fonction du temps.
P=3,3.



Période de rebond réelle	$T_{12} = 41,8$	$T_{23} = 41,1$	$T_{34} = 41,9$	$T_{45} = 42,4$	$T_{56} = 41,1$	$T_{67} = 41,5$
Période de rebond (approximation / adiabatique)	$T'_{12} = 40,8$	$T'_{23} = 40,4$	$T'_{34} = 40,5$	$T'_{45} = 41,3$	$T'_{56} = 40,9$	$T'_{67} = 40,6$
$\frac{T_{12} - T'_{12}}{T_{12}}$	2,4 %	1,8 %	3,5 %	2,7 %	0,5 %	2,1 %

TABLERAU III.3 : Comparaison entre la période de rebond réelle et la période calculée par la théorie adiabatique ([III.50]) pour la particule des figures III-10 et III-11

Le tableau III.2 montre que l'abscisse du point miroir est en bon accord avec l'abscisse calculée par l'équation [III.46].

La période de rebond varie légèrement d'une réflexion à l'autre, à cause des variations de M . Le tableau III.3 permet de comparer le temps qui sépare deux réflexions, déduit du tableau III.2, avec celui calculé par l'équation [III.50] en supposant M constant sur la moitié du parcours et égal à sa valeur au moment des plateaux. On constate que malgré les variations stochastiques de M , la théorie adiabatique donne le bon résultat à quelques pour cent près.

La particule ayant parcouru une distance de un mètre au bout de 282 périodes de Larmor, nous avons cessé le calcul. La variation relative de l'énergie (due à l'imprécision du calcul) était de 10^{-6} et P avait varié de 0,7 %.

Les figures III-12 et III-13 montrent un autre exemple de particule piégée ($P = -3,8$) et la variation de son moment magnétique en fonction du temps.

La trajectoire présente des caractéristiques analogues à celles de la trajectoire que nous venons de commenter.

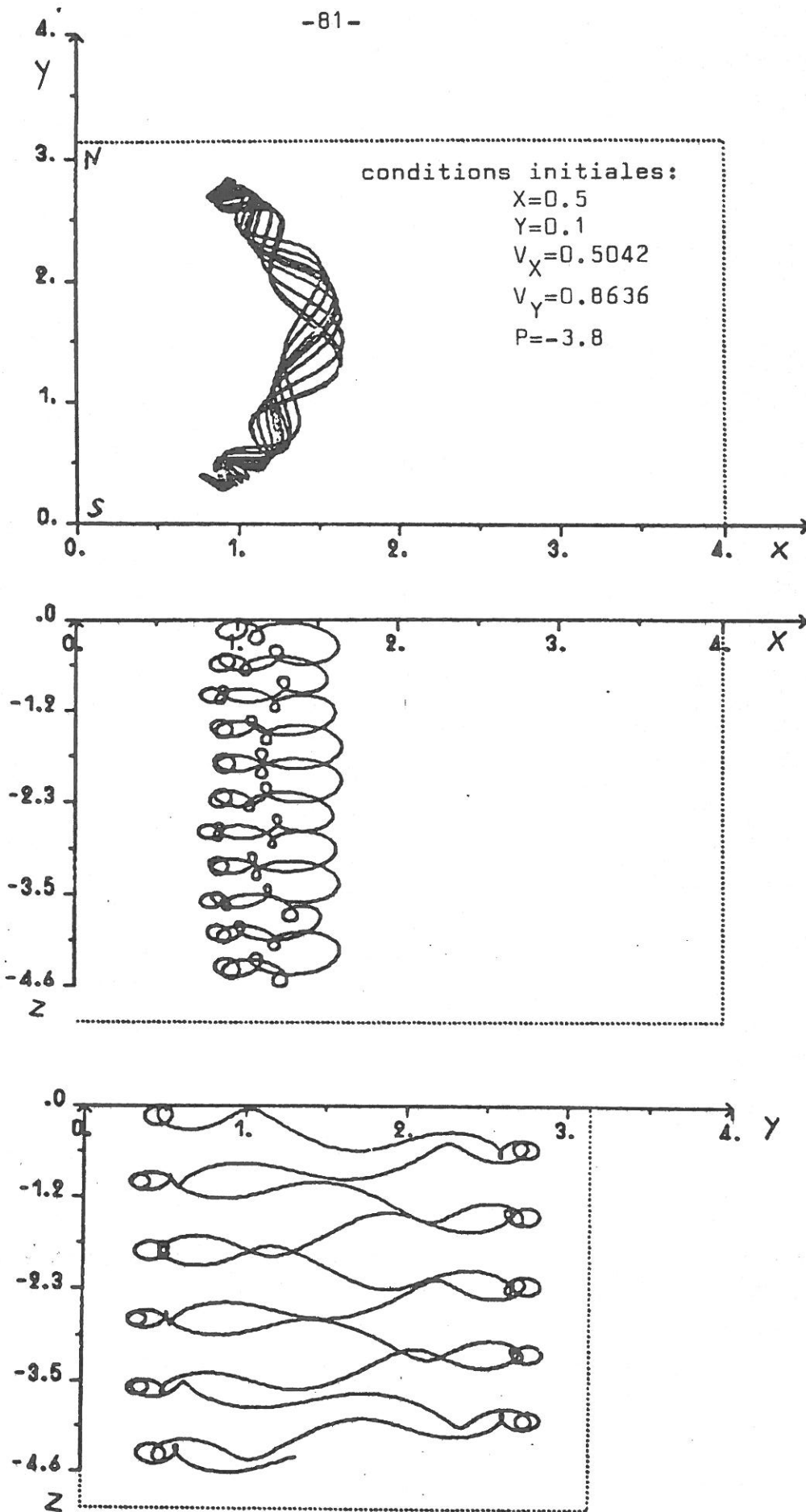
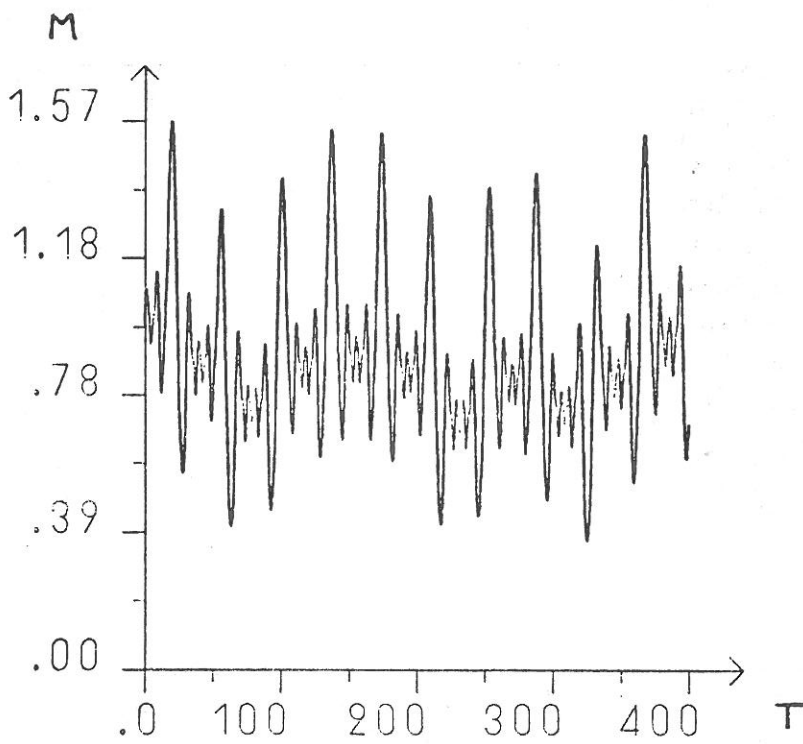


Figure III-12: Trajectoire d'une particule piégée ($|P|=3.8$)



FigureIII-13:Variation du moment magnétique de la particule de la figureIII-12 (P=-3.8)

III.8.B. PARTICULES PIEGEES NON ADIABATIQUES

Lorsque P est supérieur mais peu différent de 1, le domaine accessible à la particule s'étend loin des aimants ([III.21] et [III.22]) :

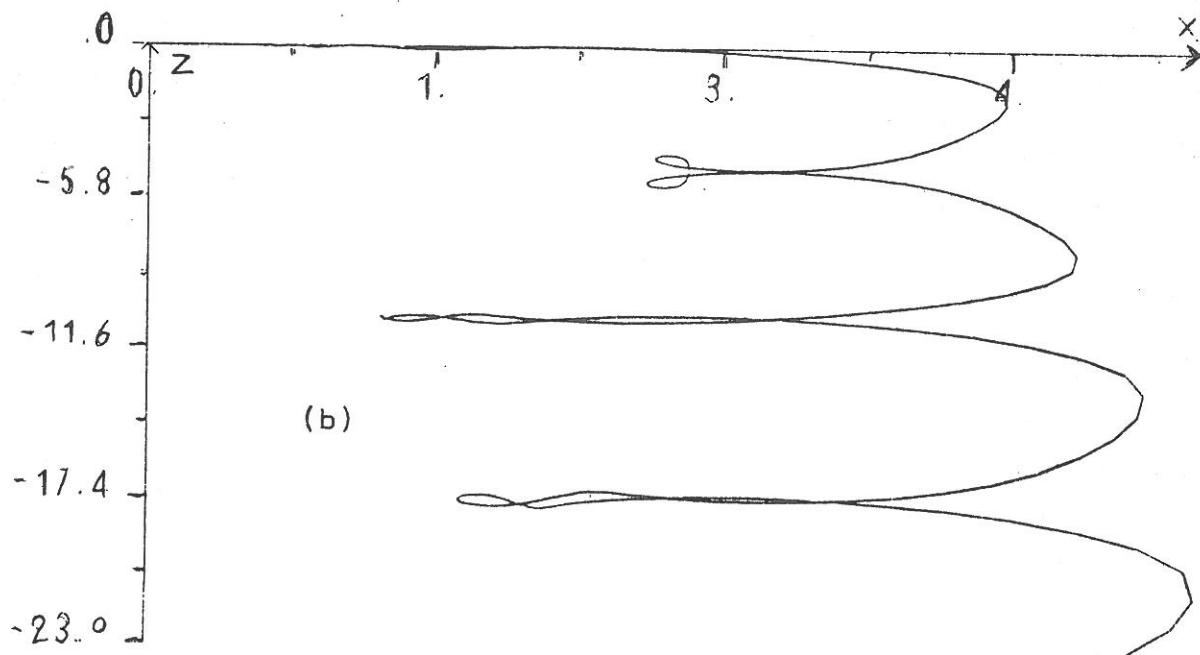
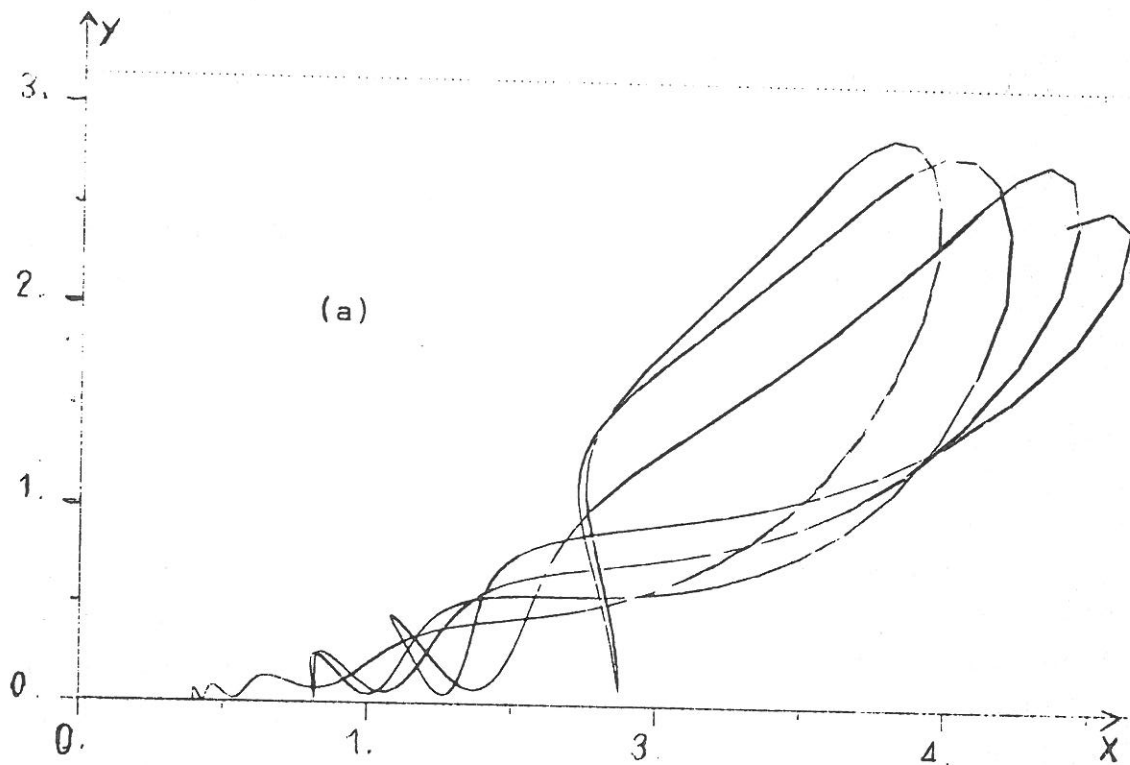
$$\lambda_{\min} = \frac{1 - P}{C} \approx 0$$

$$\lambda_{\max} = - \frac{1 + P}{C} \approx - \frac{2}{C}$$

Les conditions de l'approximation adiabatique ([III.27]) ne sont plus vérifiées et la périodicité associée au mouvement longitudinal disparaît. De plus, il n'y a plus de point miroir car l'endroit où la particule rebrousse chemin varie considérablement. Les figures III-14 a) à d) montrent un exemple de trajectoire de ce type (P = 1,1).

La dérive le long de OZ est toujours observable mais la régularité des trajectoires III.10 et 12 a disparu. Le moment magnétique (figure III-14d) varie considérablement au cours du temps.

Le passage des trajectoires du type III.14 aux trajectoires du type III.10 se fait de façon continue lorsque P augmente : on observe l'apparition progressive de deux points miroirs symétriques (figures III-15 et 16).



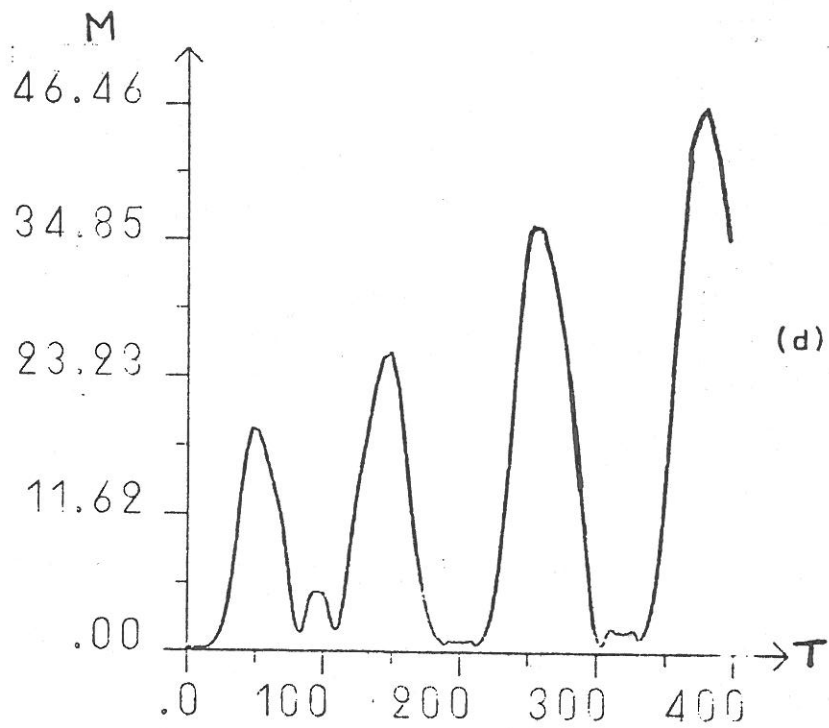
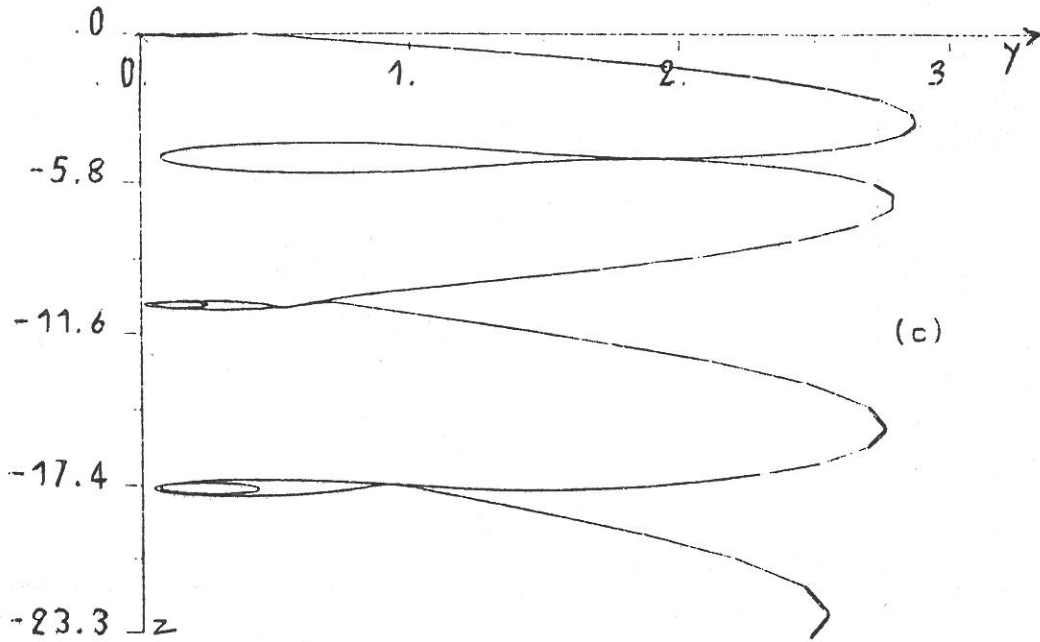


Figure III-14: (a), (b), (c): trajectoire d'une particule piégée ($P=1,1$)

(d): Variation du moment magnétique en fonction du temps ($P=1,1$).

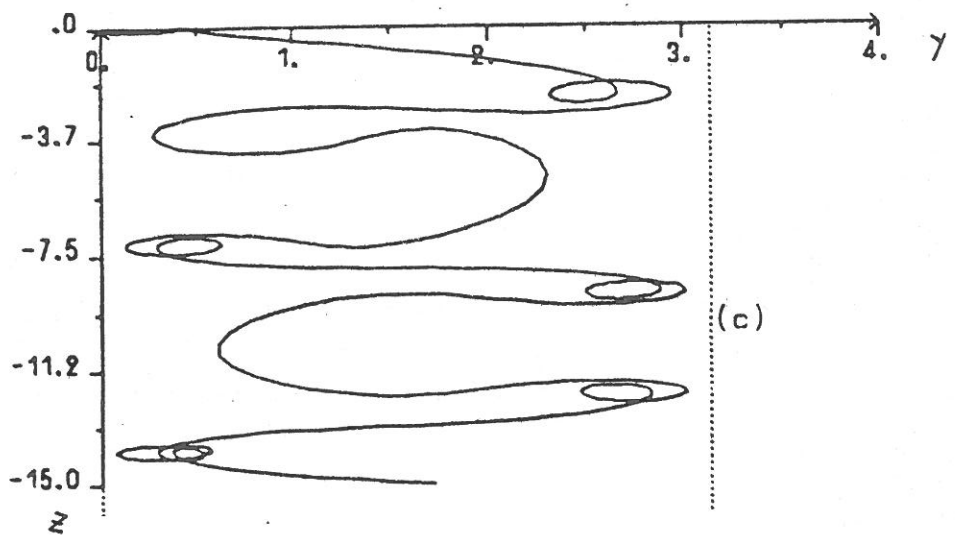
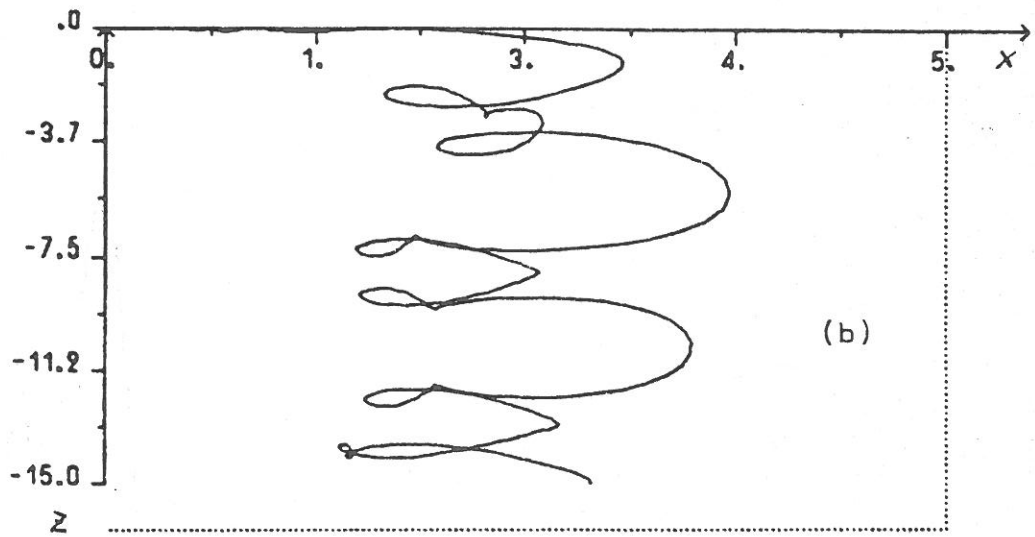
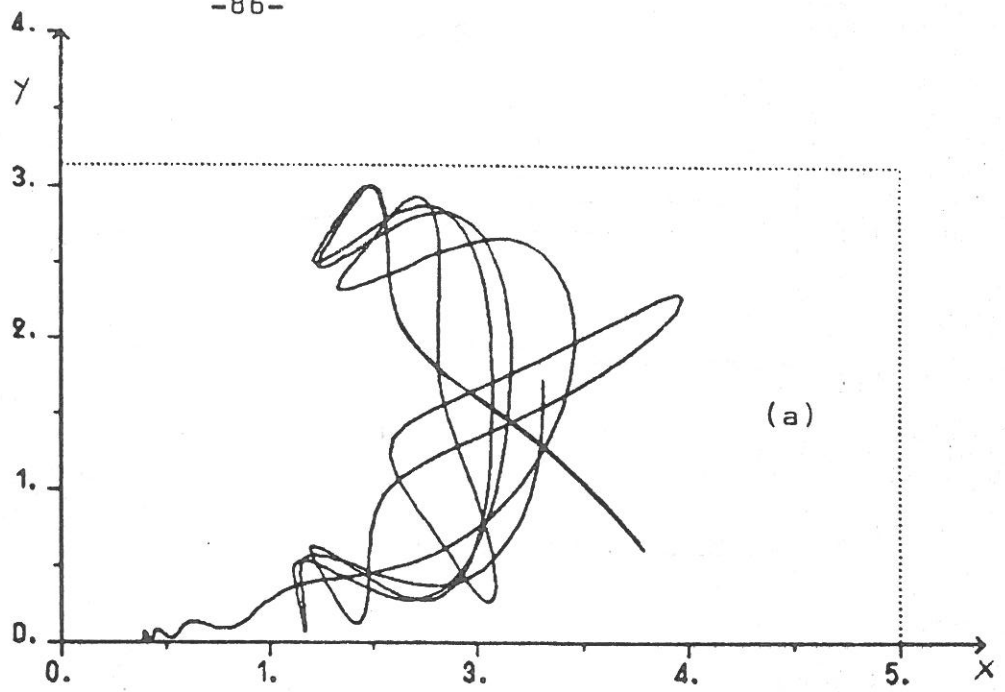


Figure III-15: Trajectoire d'une particule piégée (P=1,36)

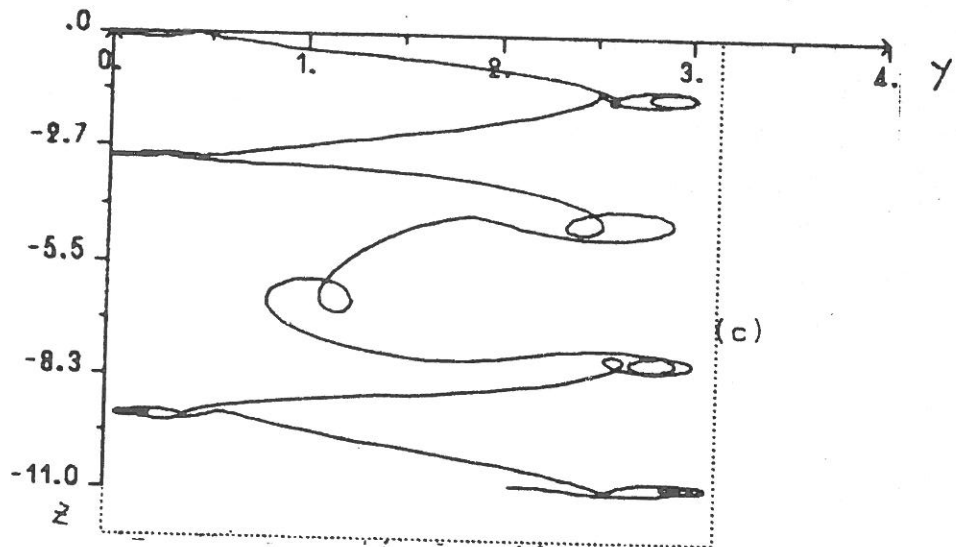
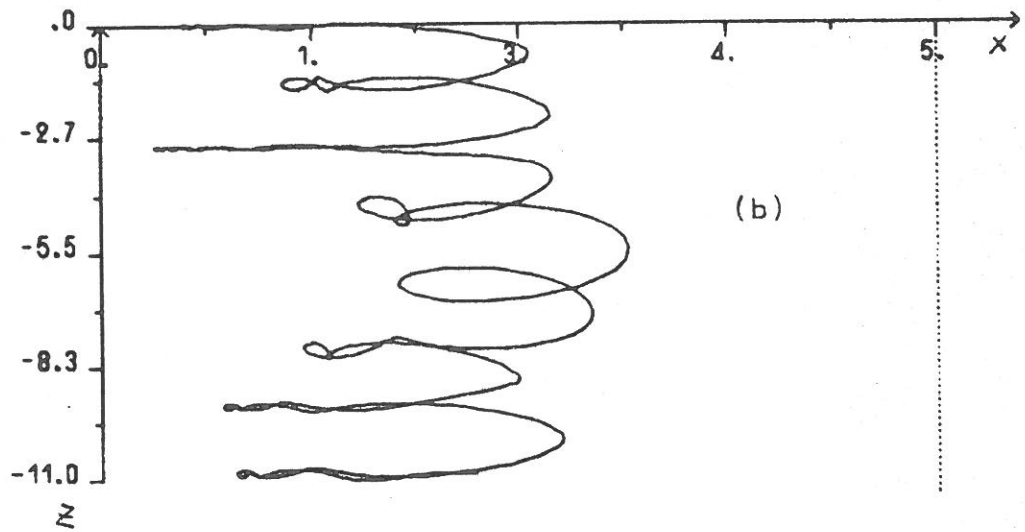
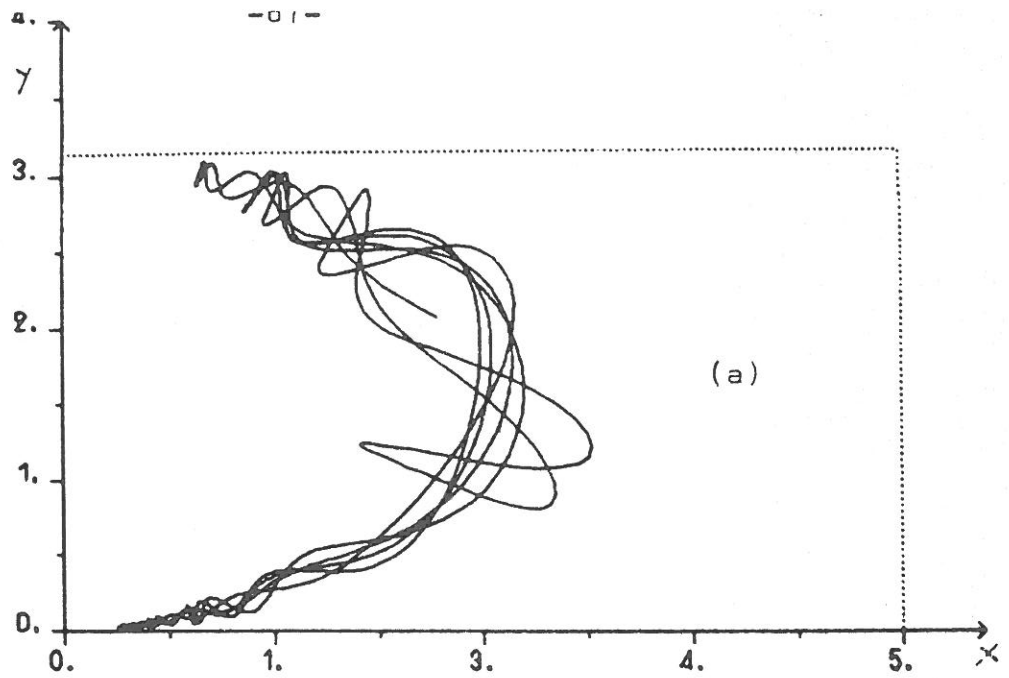


Figure III-16: Trajectoire d'une particule piégée ($P=1,67$)

III.9. TRAJECTOIRES DES PARTICULES LIBRES

Les figures III-17 et 18 présentent quelques trajectoires typiques. Les particules sont toutes issues d'un point du plan XOZ et leur vitesse initiale \vec{v}_0 est située dans le plan XOY.

On observe que les particules qui pénètrent le plus profondément dans le cusp sont celles qui sont injectées avec un angle $\theta \equiv (\text{OX}, \vec{v}_0)$ petit. Plus cet angle est petit et plus le point de rebroussement s'approche de l'aimant. A la limite, lorsque la vitesse initiale est parallèle à OX, la force de Lorentz est toujours nulle. La trajectoire est alors rectiligne et la particule ne rebrousse pas chemin.

Les figures III-19 et 20 montrent l'évolution du moment magnétique le long de la trajectoire pour deux valeurs de θ (le tableau III.4 donne la position de ces particules en fonction du temps).

Nous constatons que lorsque la particule pénètre suffisamment loin dans le cusp ($X < 2$), le moment magnétique oscille en s'écartant peu d'une valeur moyenne, en accord avec la théorie adiabatique. Par contre, pour les particules qui ne pénètrent pas, le moment magnétique varie énormément.

Le tableau III.5 permet de comparer l'abscisse du point miroir avec la valeur calculée par l'équation [III.46]. Là encore, la théorie adiabatique s'applique aux particules qui pénètrent dans le cusp.

Les trajectoires $\theta = 5^\circ$ et $\theta = 7^\circ$ sont rivées à la ligne de champ $\lambda = 0$ et il n'y a pas de dérive parallèlement à OZ, comme nous l'avions prévu au § III.6.D.b.

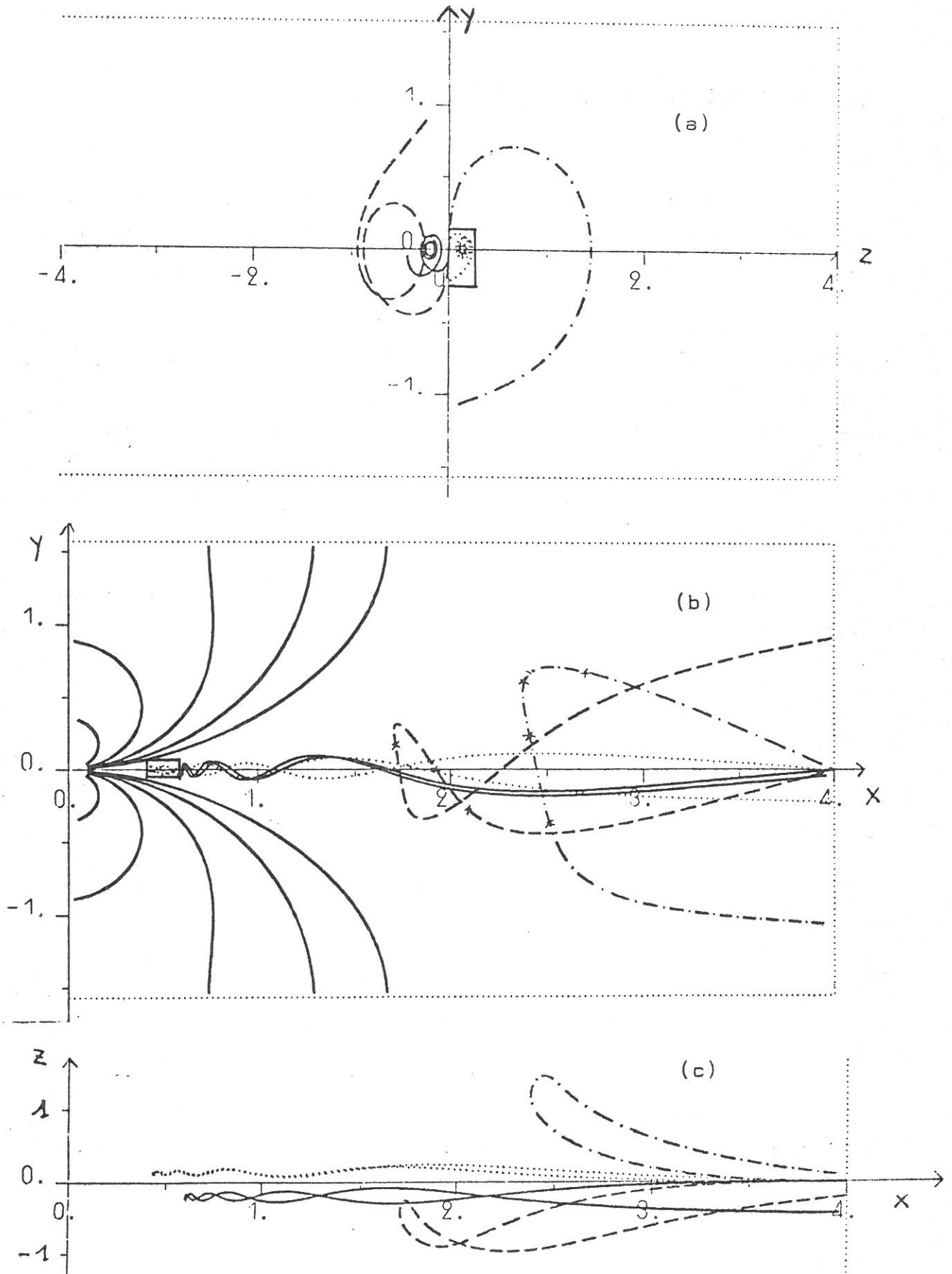


Figure III-17: Trajectoires de particules libres ($\theta = -5^\circ, 7^\circ, 20^\circ$ et -30°).

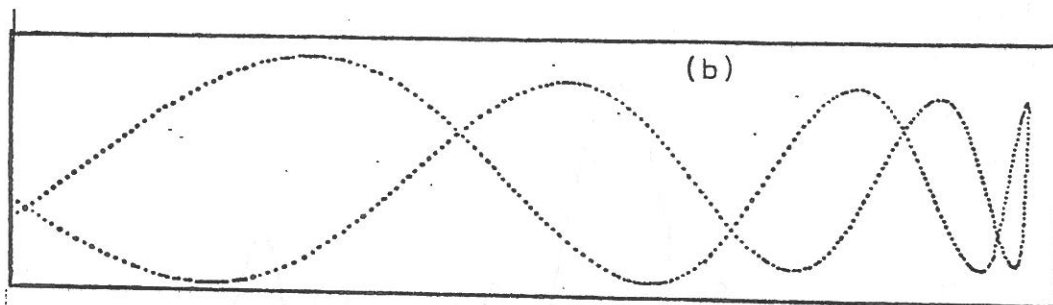
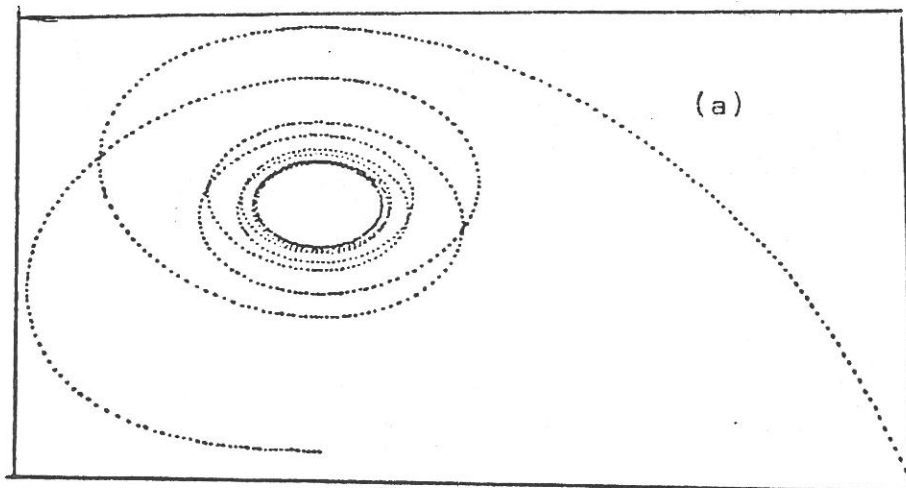
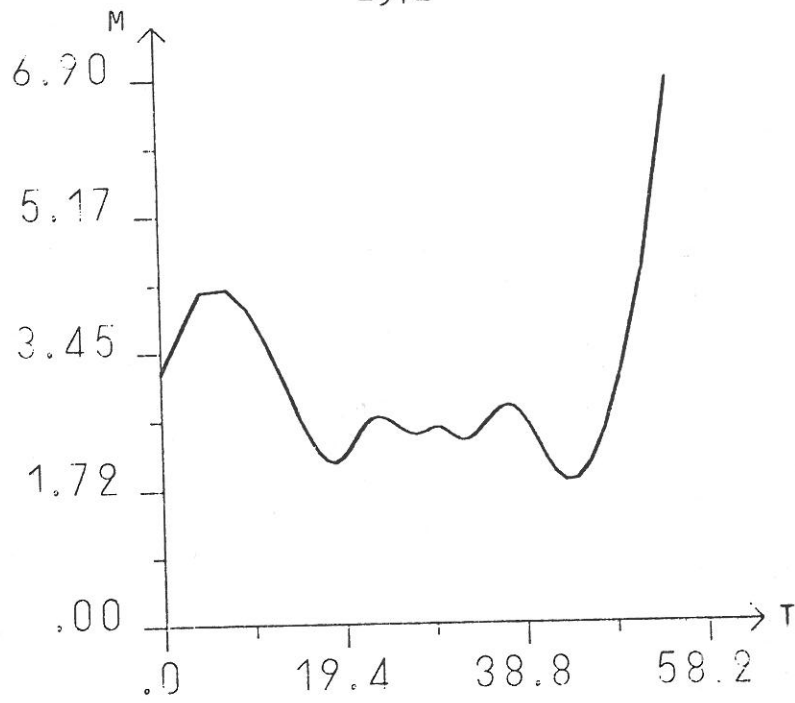
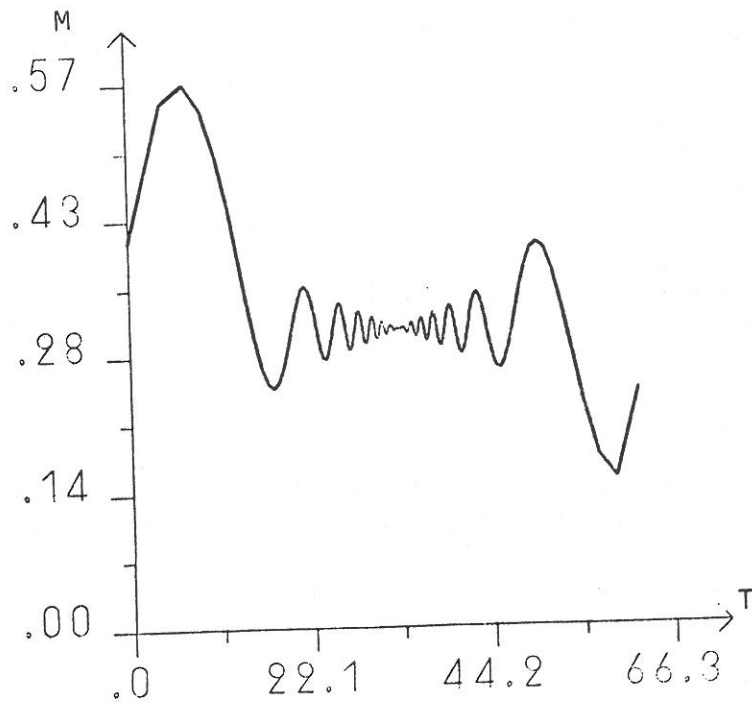


Figure III-18: Détails de la trajectoire $\theta = -5^\circ$ de la figure III-17.
Il s'agit d'un agrandissement des rectangles des figures III-20(a) et (b).
(a): plan YOZ
(b): plan XOY



FigureIII-19:Variation du moment magnétique le long de la trajectoire $\theta = 20^\circ$



FigureIII-20:Variation du moment magnétique le long de la trajectoire $\theta = 7^\circ$

a) $\theta = 20^\circ$

T	0	7	15	19	26	32	39	47	58
X	4	3,2	2,3	2	1,71	1,74	2,1	2,8	4

b) $\theta = 7^\circ$

T	0	12	20	28	36	44	49	54	66
X	4	2,54	1,67	0,82	0,67	1,45	2	2,6	4

TABLEAU III.4 : Position des particules $\theta = 20^\circ$ (a) et $\theta = 7^\circ$ (b) en fonction du temps

θ	Moment magnétique moyen	Abscisse du point miroir	Solution de [III.46] (approximation adiabatique)
5°	M = 0,16	$X_M = 0,404$	$X_M = 0,405$
7°	M = 0,30	$X_M = 0,56$	$X_M = 0,57$
20°	M = 2,4	$X_M = 1,7$	$X_M = 1,67$

TABLEAU III.5 : Comparaison de l'abscisse du point miroir avec la valeur donnée par l'approximation adiabatique pour les particules $\theta = 5^\circ, 7^\circ$ et 20°

Afin de déterminer la proportion des particules vérifiant l'approximation adiabatique, nous avons tiré au sort un grand nombre de conditions initiales simulant une distribution d'électrons primaires isotrope en vitesse et uniforme le long de la frontière du domaine de calcul ($X = 5$). Nous précisons par la suite (§ V.3) la méthode employée pour le tirage au sort. La figure III-21 montre que peu de particules pénètrent profondément dans les cusps. Ainsi, par exemple, seuls 28 % des particules injectées ont atteint la cellule 14 (figure III-8). La plupart des particules sont donc non adiabatiques. La statistique porte sur 800 trajectoires. Entre 400 et 800 tirs, les résultats n'ont pratiquement pas varié. On estime donc que le calcul a convergé.

Le sort final des particules tirées a été le suivant :

- 5 % ont été absorbées par la paroi située en $X = 0,5$
- 84 % ont été renvoyées vers le plasma
- 11 % ont parcouru une distance supérieure à un libre parcours moyen dans la gaine magnétique et ont été "tuées" pour simuler une ionisation.

Nous avons donc là un bon dispositif de confinement pour les électrons primaires. Il semble, d'autre part, qu'il n'y ait pas de corrélation entre les directions du vecteur vitesse à l'entrée et à la sortie de la zone magnétisée.

Cela nous suggère un premier modèle pour calculer la densité des électrons primaires dans l'enceinte multipolaire :

Le champ magnétique joue le rôle d'un mur diffuseur qui renvoie les particules incidentes vers l'intérieur de l'enceinte, dans une direction aléatoire.

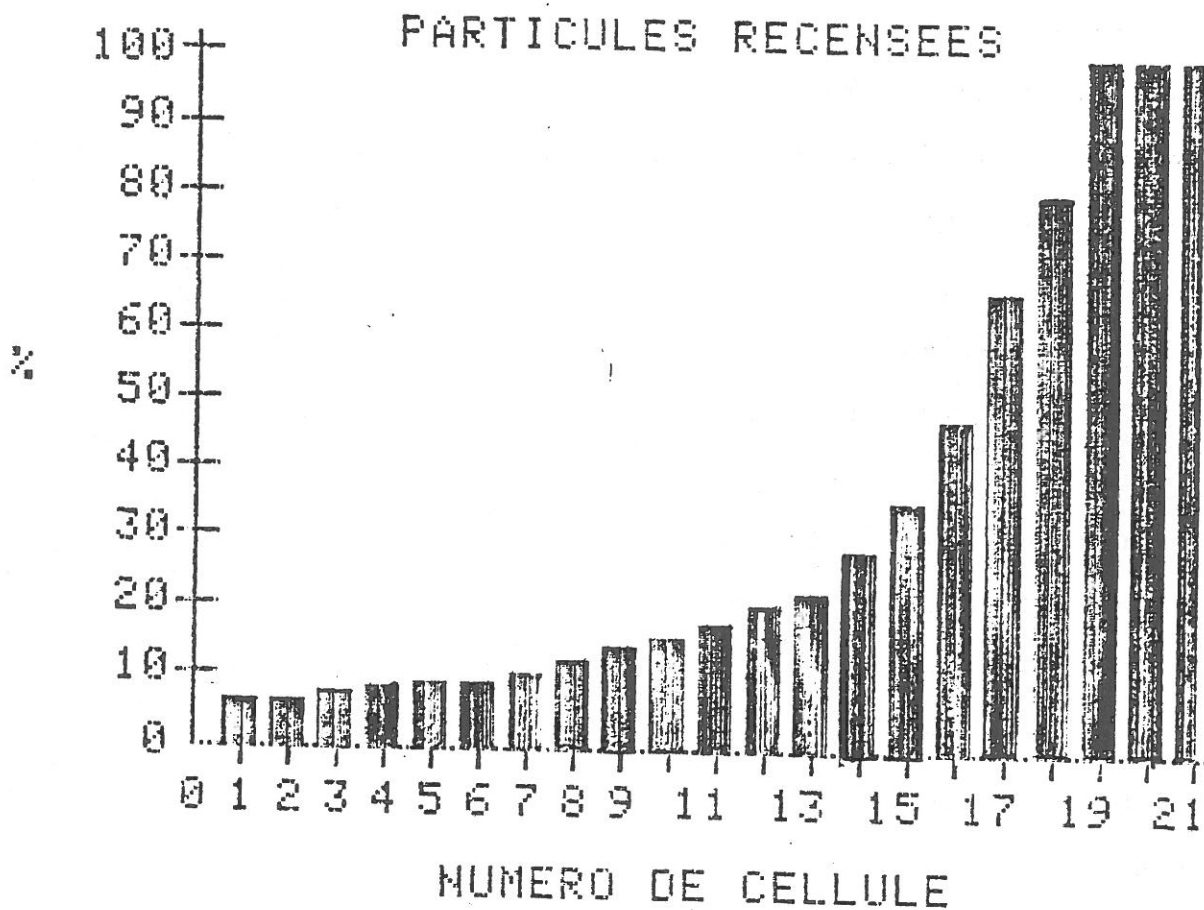


Figure III-21: Pourcentage de particules recensées dans les cellules pour une distribution isotrope et uniforme à l'infini.

Principaux symboles utilisés dans les expressions mathématiques
du chapitre III

En général, lorsqu'une grandeur est symbolisée par une majuscule, la grandeur réduite est une minuscule.

φ	potentiel électrique
\vec{A}	potentiel vecteur
l	écartement des aimants
B_0	valeur caractéristique du champ multipolaire
m	masse électronique
e	charge élémentaire
\vec{B}	champ magnétique
\vec{b}	champ magnétique réduit
P_z	impulsion généralisée
P	impulsion généralisée réduite
λ	potentiel vecteur réduit
C	double de l'inverse du rayon de Larmor réduit au col
r_L	rayon de Larmor
\vec{E}	champ électrique
\hat{e}_l	vecteur unitaire tangent à B
\vec{u}_E	vitesse de dérive $\vec{E} \times \vec{B}$
\vec{R}	positions du centre guide
\vec{r}	position de la particule
ω_{b0}	pulsation de Larmor au col
ω	pulsation de Larmor
$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$	
μ	moment magnétique
M	moment magnétique réduit

- \vec{u}_\perp vitesse de dérive du centre guide perpendiculaire à \vec{B}
 \vec{u}_\parallel vitesse du centre guide parallèle à \vec{B}
 E_c énergie cinétique des électrons primaires
 E_{co} énergie cinétique initiale
 T temps réduit
 T_{ij} durée (réduite) écoulée entre la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ réflexion
 J invariant longitudinal

* *
*

PLAN DU CHAPITRE IV

CALCUL DE LA DENSITE DES ELECTRONS PRIMAIRES DANS L'ENCEINTE ; DIFFUSION PAR LES PAROIS

IV.1. <u>DESCRIPTION DU MODELE</u>	98
IV.2. <u>EXPRESSION DE LA DENSITE DES ELECTRONS PRIMAIRES</u>	100
IV.2.A. Calcul du flux sur la paroi.....	100
IV.2.B. Calcul de la densité des primaires.....	101
IV.2.C. Application.....	102
IV.3. <u>CALCUL NUMERIQUE</u>	105
IV.3.A. Calcul du flux.....	105
IV.3.B. Calcul de la densité des primaires.....	106
IV.4. <u>CALCUL DE LA DENSITE DES ELECTRONS SECONDAIRES</u>	112
IV.5. <u>CONCLUSION</u>	112

* *
* *

C H A P I T R E I V

CALCUL DE LA DENSITE DES ELECTRONS PRIMAIRES DANS L'ENCEINTE : DIFFUSION PAR LES PAROIS

IV.1. DESCRIPTION DU MODELE

Les électrons primaires sont émis par les filaments de façon isotrope (§ I.2). Ils traversent l'enceinte en ligne droite et certains disparaissent par collision inélastique sur un atome neutre (nous négligeons les collisions élastiques). Nous supposons le libre parcours moyen égal à un mètre.

Les électrons survivants arrivent alors dans la région où règne le champ magnétique. Au chapitre précédent, nous avons montré que la plupart rebroussent chemin et repartent dans une direction quelconque.

Nous allons donc représenter le champ magnétique par une paroi fictive qui diffuse les particules incidentes dans toutes les directions ; la probabilité pour qu'une particule soit diffusée dans l'angle solide $\vec{\Omega}$ est :

$$P(\vec{\Omega}) d\Omega = \frac{d\Omega}{2\pi}$$

Comme les filaments émettent de façon isotrope, la probabilité pour qu'un primaire soit émis dans $\vec{\Omega}$ est :

$$P(\vec{\Omega}) d\Omega = \frac{d\Omega}{4\pi}$$

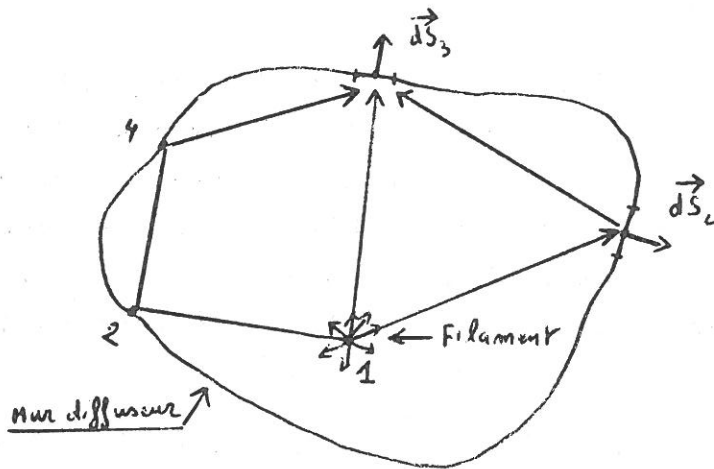


Figure IV-1: Décomposition du flux qui arrive sur l'élément de surface dS_3 en un flux direct, un flux réfléchi une fois, deux fois,...

IV.2. EXPRESSION DE LA DENSITE DES ELECTRONS PRIMAIRES

IV.2.A. CALCUL DU FLUX A LA PAROI

Considérons deux éléments de surface : $d\vec{S}_3$, situé sur la paroi de l'enceinte et $d\vec{S}_1$ situé sur les filaments. Une partie des électrons émis par $d\vec{S}_1$ atteint $d\vec{S}_3$. Certains y arrivent en ligne droite, d'autres ont été réfléchis une ou plusieurs fois par les parois de l'enceinte. Nous décomposons donc ϕ_3 , le flux de particules qui atteint $d\vec{S}_3$, en un flux direct et un flux multiplement réfléchi :

$$\phi_3 = \int_1 \frac{\phi_1}{4\pi} dS_1 \left\{ \frac{d\omega_{13}}{dS_3} e^{-r_{13}/\lambda} + \frac{1}{2\pi} \int_2 e^{-r_{12}/\lambda} d\omega_{12} \left[e^{-r_{23}/\lambda} \frac{d\omega_{23}}{dS_3} + \frac{1}{2\pi} \int_4 d\omega_{24} e^{-r_{24}/\lambda} \left(\frac{d\omega_{43}}{dS_3} e^{-r_{43}/\lambda} + \dots \right) \right] \right\} \quad [IV.1]$$

Dans cette équation, r_{ij} désigne la distance du point i au point j , λ le libre parcours moyen des électrons primaires, $d\omega_{ij}$ l'angle solide sous lequel $d\vec{S}_j$ est vu du point i . Les termes exponentiels tiennent compte de la disparition des primaires par collision sur les neutres. La première intégration porte sur la surface des filaments et les suivantes, sur la paroi diffusante.

Les éléments d'angle solide s'écrivent :

$$d\omega_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij} \cdot d\vec{S}_j}{r_{ij}^3} \quad [IV.2]$$

Le flux direct des filaments (premier terme de [IV.1]) se calcule à l'aide d'une intégrale double. Le flux réfléchi une fois nécessite une intégrale quadruple : il faut intégrer à la fois sur les filaments et sur la surface diffusante. Le flux diffusé deux fois demande une intégrale sextuple et ainsi de suite. Il est évident que l'équation [IV.1] ne peut pas être traitée numériquement.

Posons
$$I_1(3) \equiv \int_1 dS_1 \frac{d\omega_{13}}{dS_3} e^{-r_{13}/\lambda} \quad [\text{IV.3}]$$

$$I_n(3) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_2 dS_2 \frac{d\omega_{23}}{dS_2} I_{n-1}(2) e^{-r_{23}/\lambda} \quad [\text{IV.4}]$$

$$\phi_1/4\pi \equiv 1. \quad [\text{IV.5}]$$

où 1 désigne un point courant sur la surface des filaments et 2, 3 des points situés sur la surface diffusante.

On peut alors vérifier que l'équation [IV.1] s'écrit :

$$\varphi_3(3) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(3) \quad [\text{IV.6}]$$

Nous avons donc mis le flux sur la paroi sous la forme d'une série dont les termes, donnés par une formule de récurrence, ne contiennent qu'une intégrale double.

IV.2.B. CALCUL DE LA DENSITE

Pour obtenir la densité en un point M, il faut sommer la contribution des filaments et celle de la paroi diffusante :

$$n(M) = \frac{\phi_1}{4\pi} \frac{1}{v} \int_1 dS_1 \frac{e^{-r_{1M}/\lambda}}{r_{1M}^2} + \frac{1}{2\pi v} \int_3 \frac{\varphi_3 dS_3}{r_{3M}^2} e^{-r_{3M}/\lambda} \quad [\text{IV.7}]$$

où v désigne la vitesse des électrons primaires et r_{iM} , la distance du point i au point M.

Connaissant φ_3 , le flux à la paroi, une simple quadrature nous donne la densité.

IV.2.C. APPLICATION

L'enceinte est un cylindre fermé par deux couvercles, de rayon $R = 1$ m et de hauteur $H = 2$ m (figure IV-2).

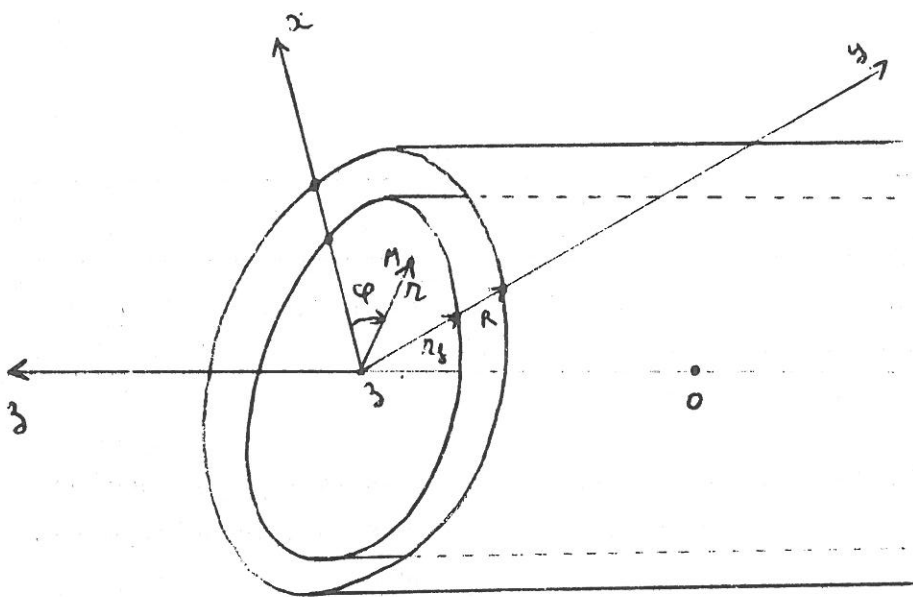
Pour la commodité du calcul, nous représentons les filaments par une surface émissive cylindrique concentrique de rayon $R_f = 0,8$ m et de hauteur $H = 1,6$ m. Toutes les intégrales auront alors la même forme.

Il y a symétrie par rapport à l'axe Oz et par rapport au plan $z = H/2$. En particulier, le flux est le même sur les deux couvercles et il est indépendant de l'angle φ (coordonnée angulaire d'un point).

Les réflexions à prendre en compte sont des réflexions :

- du cylindre vers le cylindre
- du couvercle inférieur vers le cylindre
- du couvercle supérieur vers le cylindre
- du cylindre vers les couvercles
- du couvercle inférieur vers le couvercle supérieur
- du couvercle supérieur vers le couvercle inférieur.

L'appendice C donne l'expression des différents angles solides qui interviennent dans les équations [IV.3] et [IV.4].



FigureIV-2: Géométrie du calcul et repère utilisé. Les filaments sont représentés par une surface émissive cylindrique de rayon $R_f < R$

n	0	1	2	3	4	5
I_n	0,95	0,32	0,075	0,017	0,004	0,0008

FIGURE IV.3 : Valeur des flux successifs (I_n) en fonction du nombre de réflexions (n), au point $z = 0,5$ de la paroi du cylindre

IV.3. CALCUL NUMERIQUE

IV.3.A. CALCUL DU FLUX

Il s'agit de calculer les intégrales [IV.3] et [IV.4]. Nous disposons d'expressions analytiques pour les éléments d'angle solide (appendice C), mais pas pour les $I_{n-1}(3)$. Il faut donc procéder par interpolation.

La démarche suivie est la suivante :

- nous calculons I_1 sur 9 points du cylindre, le long d'une génératrice, et 5 points du couvercle, le long d'un rayon, en utilisant [IV.3] et une méthode standard d'intégration
- nous interpolons linéairement. La fonction $I_1(3)$ est alors connue sur toute la surface de l'enceinte car le problème est invariant par rotation autour de Oz
- l'équation [IV.4] nous permet alors de calculer $I_2(3)$ aux mêmes points
- une nouvelle interpolation définit la fonction $I_2(3)$ et permet de recommencer pour obtenir les termes suivants.

La figure IV-3 donne les valeurs de I_n obtenues au point $z = 0,5$ du cylindre. On peut constater que le flux diminue extrêmement vite avec le nombre de réflexions. Cette décroissance rapide est due au libre parcours moyen que nous avons choisi égal à un mètre. Avec un libre parcours moyen plus grand, il aurait fallu attendre plus longtemps pour que la série [IV.6] converge. A la limite, si λ est infini le flux à la paroi est aussi infini, l'enceinte étant fermée et alimentée en permanence par les filaments.

Il serait intéressant d'évaluer l'erreur commise en interpolant la fonction $I_{n-1}(3)$. Cette erreur est de plus en plus grande sur chaque terme de la série. Mais comme ceux-ci décroissent, l'erreur sur leur somme reste faible.

La figure IV-4 montre le flux total sur la surface du cylindre. Il est maximum au milieu de celui-ci. On constate que la prise en compte de la paroi diffusante ne conduit pas à une augmentation très importante du flux. Ceci est dû au libre parcours moyen λ que nous avons choisi égal au rayon pour limiter le nombre de réflexions à prendre en compte. Dans une décharge multipolaire, λ est au moins dix fois plus grand (Appendice A).

La figure IV-5 montre le flux total sur un couvercle. Le maximum obtenu en $r=0,8$ pour le flux direct est dû à la proximité des filaments. Le flux total, par contre, est maximum à la périphérie du couvercle.

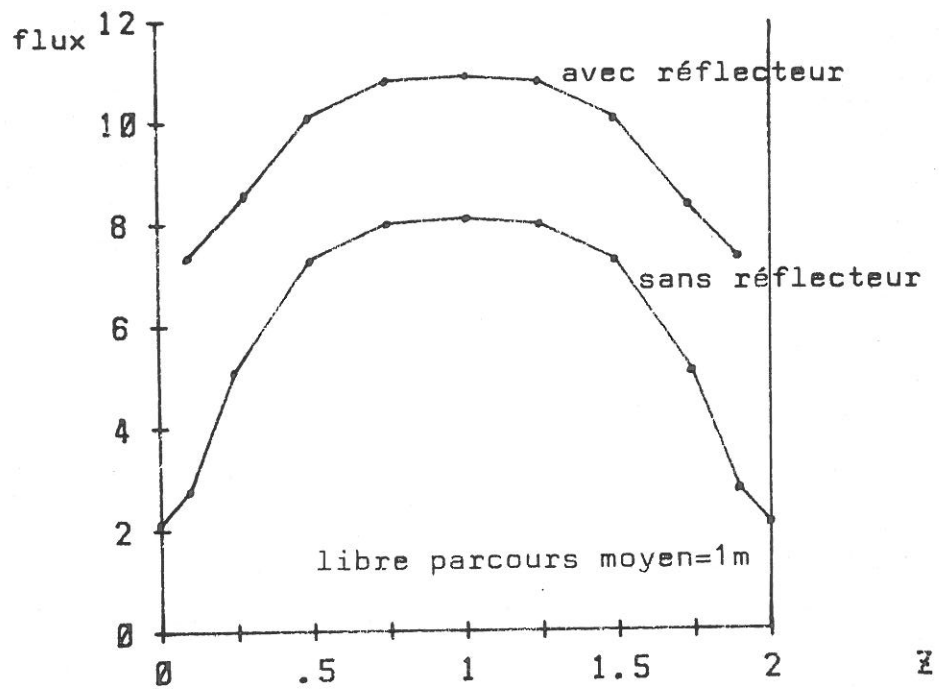
IV.3.B. CALCUL DE LA DENSITE DES ELECTRONS PRIMAIRES

Connaissant le flux sur les parois de l'enceinte, l'équation [IV.7] donne alors, par une simple quadrature, la valeur de la densité en tout point.

La figure IV-6 montre la variation de la densité des primaires le long de l'axe de l'enceinte. On observe qu'en l'absence de paroi diffusante, la densité décroît de façon monotone lorsque l'on s'éloigne du centre du cylindre. Avec le diffuseur, par contre, la densité varie très peu à l'intérieur de l'enceinte et croît brutalement au voisinage des couvercles. Ceci s'explique par le fait que les couvercles agissent comme une source, la densité autour d'un élément de surface des couvercles décroissant en $1/r^2$ (équation [IV.7]).

La figure IV-7 montre la variation radiale de la densité en $z = 0,5$. La tendance générale est une croissance régulière du centre vers la paroi du cylindre, avec un accident en $r = 0,8$ dû à la présence des filaments.

Il est évident sur ces figures que la densité des primaires est augmentée par la présence de la paroi diffusante. Cette augmentation n'est cependant pas très importante dans notre calcul, car nous avons choisi un libre parcours moyen assez petit.



FigureIV-4:Flux arrivant sur le cylindre.

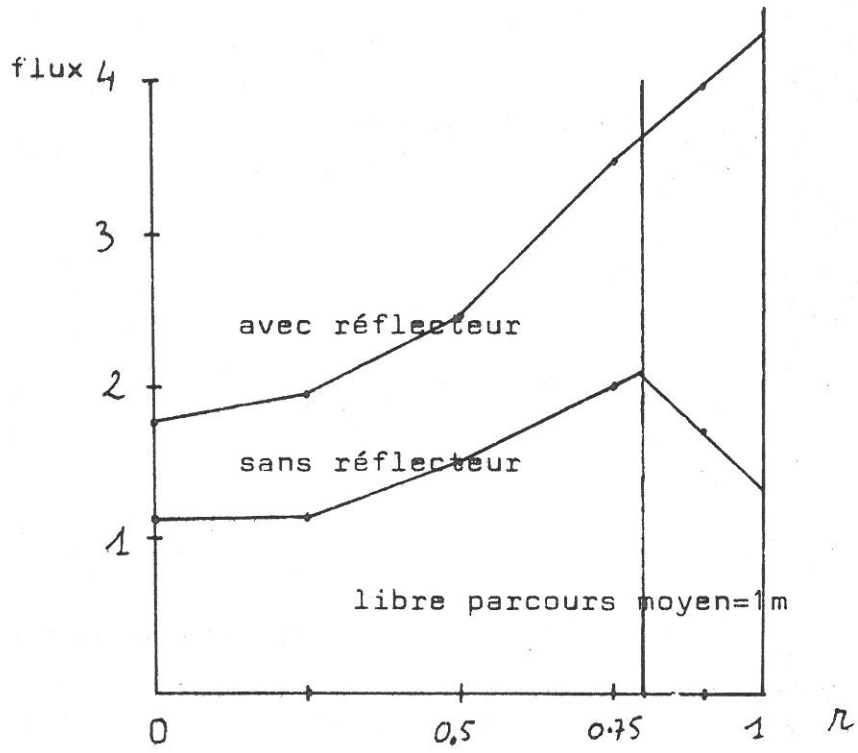
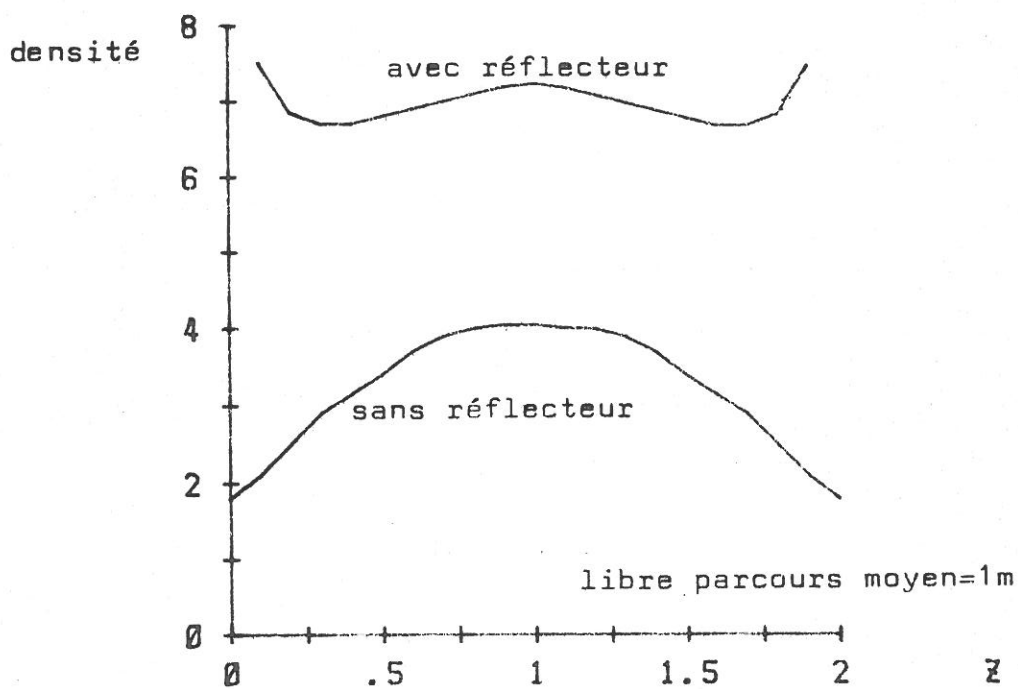
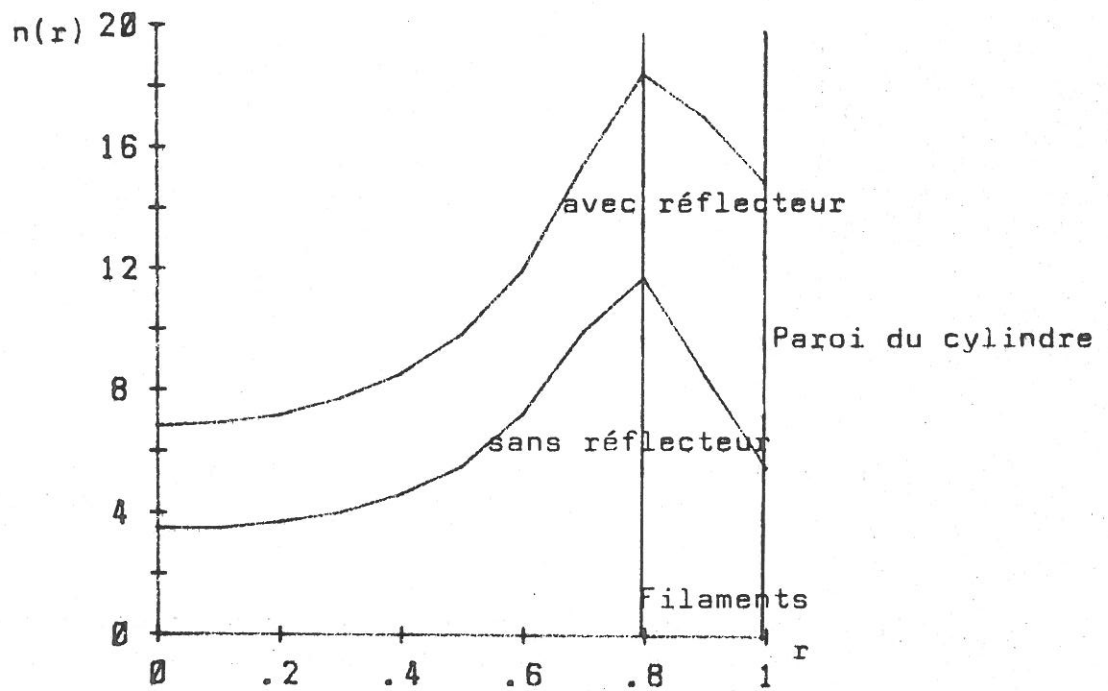


Figure IV-5: Flux arrivant sur le couvercle.



FigureIV-6:Variation de la densité des primaires le long de l'axe (unités arbitraires)



FigureIV-7:Variation radiale de la densité en $z=0,5$.

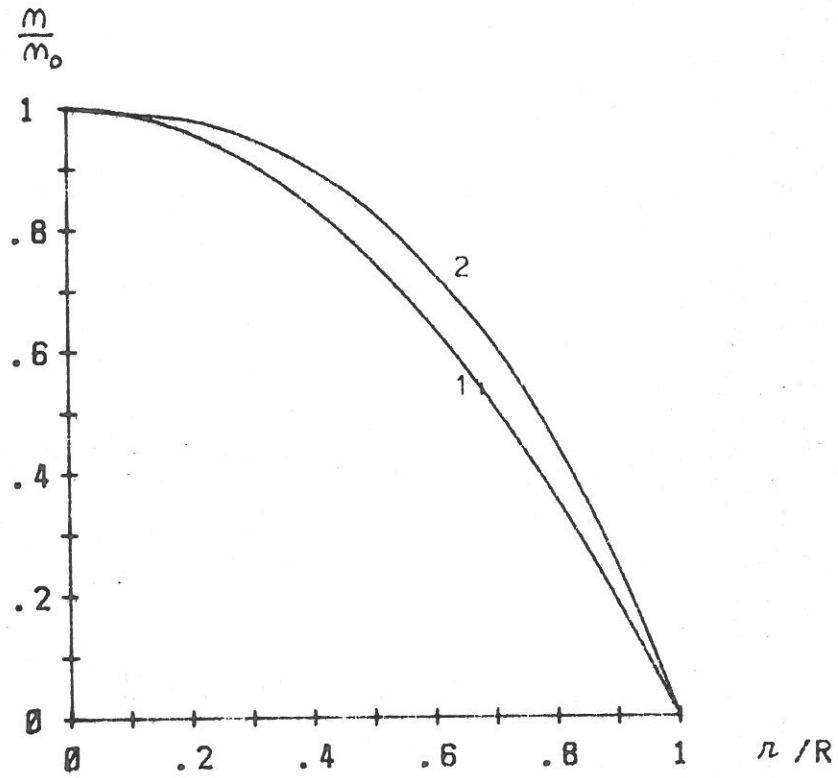


Figure IV-8: Profil de densité du plasma; régime collisionnel et diffusion des primaires par les parois.
courbe 1: terme source uniforme.
courbe 2: terme source: figure IV-7, avec réflecteur.

IV.4. CALCUL DE LA DENSITE DES ELECTRONS SECONDAIRES

Nous connaissons maintenant la variation radiale de la densité des électrons primaires. Nous pouvons donc résoudre l'équation d'équilibre du plasma avec un terme source plus réaliste que le terme source uniforme du chapitre II.

La figure IV-8 montre la solution de l'équation [II.6] (régime collisionnel), avec un terme source variant comme sur la figure IV-7. On constate que la présence du mur diffuseur rend le plasma légèrement plus uniforme, mais cet effet est sans commune mesure avec ce qui est observé dans les plasmas multipolaires.

IV.5. CONCLUSION

L'effet du confinement magnétique ne se réduit pas à une simple réflexion des électrons primaires vers l'intérieur de l'enceinte. L'augmentation de leur densité au voisinage de la paroi que l'on déduit de cette hypothèse ne suffit pas pour expliquer l'uniformité des plasmas multipolaires. Nous allons donc devoir prendre en compte complètement le champ magnétique. C'est l'objet du chapitre suivant.

* *
*

PLAN DU CHAPITRE V

CALCUL DE LA DENSITE DES ELECTRONS PRIMAIRES DANS L'ENCEINTE MULTIPOLAIRE ; PRISE EN COMPTE DU CHAMP MAGNETIQUE

V.1. <u>INTRODUCTION</u>	114
V.2. <u>EQUATION DE LIOUVILLE</u>	115
V.3. <u>SIMULATION PARTICULAIRE</u>	116
V.3.A. Principe du calcul.....	116
V.3.B. Conditions initiales.....	116
V.4. <u>TESTS DE VALIDITE</u>	122
V.4.A. Champ magnétique nul.....	122
V.4.B. Convergence numérique.....	122
V.5. <u>RESULTATS</u>	126
V.5.A. Densité des électrons primaires.....	126
V.5.B. Nombre d'électrons primaires au voisinage des parois.....	131
V.6. <u>CONCLUSION</u>	131

* *
*

CHAPITRE V

CALCUL DE LA DENSITE DES ELECTRONS PRIMAIRES DANS L'ENCEINTE MULTIPOLAIRE : PRISE EN COMPTE DU CHAMP MAGNETIQUE

V.1. INTRODUCTION

Au chapitre précédent, nous avons pu nous convaincre que l'effet du champ magnétique ne se réduisait pas à une simple réflexion des électrons primaires vers l'intérieur de l'enceinte. Le modèle du mur diffuseur ne tient pas compte des trajectoires très enroulées comme celles de la figure III-18. On peut penser que ces trajectoires contribuent à accroître la densité au voisinage des aimants, avec pour conséquence un taux d'ionisation élevé dans cette région. Reprenons la géométrie du chapitre III et voyons ce qu'il en est.

V.2. EQUATION DE LIOUVILLE

La densité des électrons primaires est si faible qu'ils n'interagissent pas. On pourrait donc, en principe, calculer leur fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{v})$ à l'aide de l'équation de Liouville :

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} f - \frac{e}{m} \left(\vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}) \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad [\text{V.1}]$$

où nous avons exclu les champs électriques de charge d'espace pour les raisons précisées au § III.1. [V.1] est une équation aux dérivées partielles linéaire à quatre variables : deux coordonnées pour le champ magnétique et deux angles pour le vecteur vitesse (l'énergie est conservée). Lorsque l'on s'éloigne des aimants, $f(\vec{r}, \vec{v})$ doit tendre vers une fonction de distribution uniforme et isotrope. Par définition, le nombre dn de particules dont le vecteur vitesse a pour angles (en coordonnées sphériques habituelles) θ et φ à $d\theta$ et $d\varphi$ près, s'écrit :

$$dn \equiv f(\theta, \varphi) d\theta d\varphi$$

La forme asymptotique de la fonction de distribution est donc :

$$f_{\infty}(x, y, \theta, \varphi) \equiv \frac{\sin \theta}{4\pi} \quad [\text{V.2}]$$

Le problème ainsi posé est difficile à résoudre numériquement et nous avons préféré procéder par simulation particulière. Cependant, au chapitre suivant nous en donnerons la solution analytique dans le cadre de l'approximation adiabatique.

V.3. SIMULATION PARTICULAIRE

V.3.A. PRINCIPE DU CALCUL

Imaginons un plan fictif parallèle aux barreaux aimantés et assez éloigné de ceux-ci pour que le champ magnétique puisse être considéré comme nul. Divisons le domaine délimité par ce plan et par les aimants en cellules de volume fini (figure V-1). Toute particule qui pénètre dans ce domaine et qui vient de l'intérieur de l'enceinte contribue à la densité. Dans chaque cellule, cette contribution est inversement proportionnelle au temps que la particule y a passé au cours de son mouvement. On trouvera la démonstration de cette proposition dans le cas où le champ magnétique est nul dans l'appendice D. Nous supposerons le résultat vrai dans le cas général.

Nous allons tirer un grand nombre de particules à partir du plan défini ci-dessus avec des conditions initiales convenables. Nous obtiendrons la densité dans chaque cellule en cumulant les temps passés par toutes les particules dans les cellules et en divisant par le volume de celles-ci :

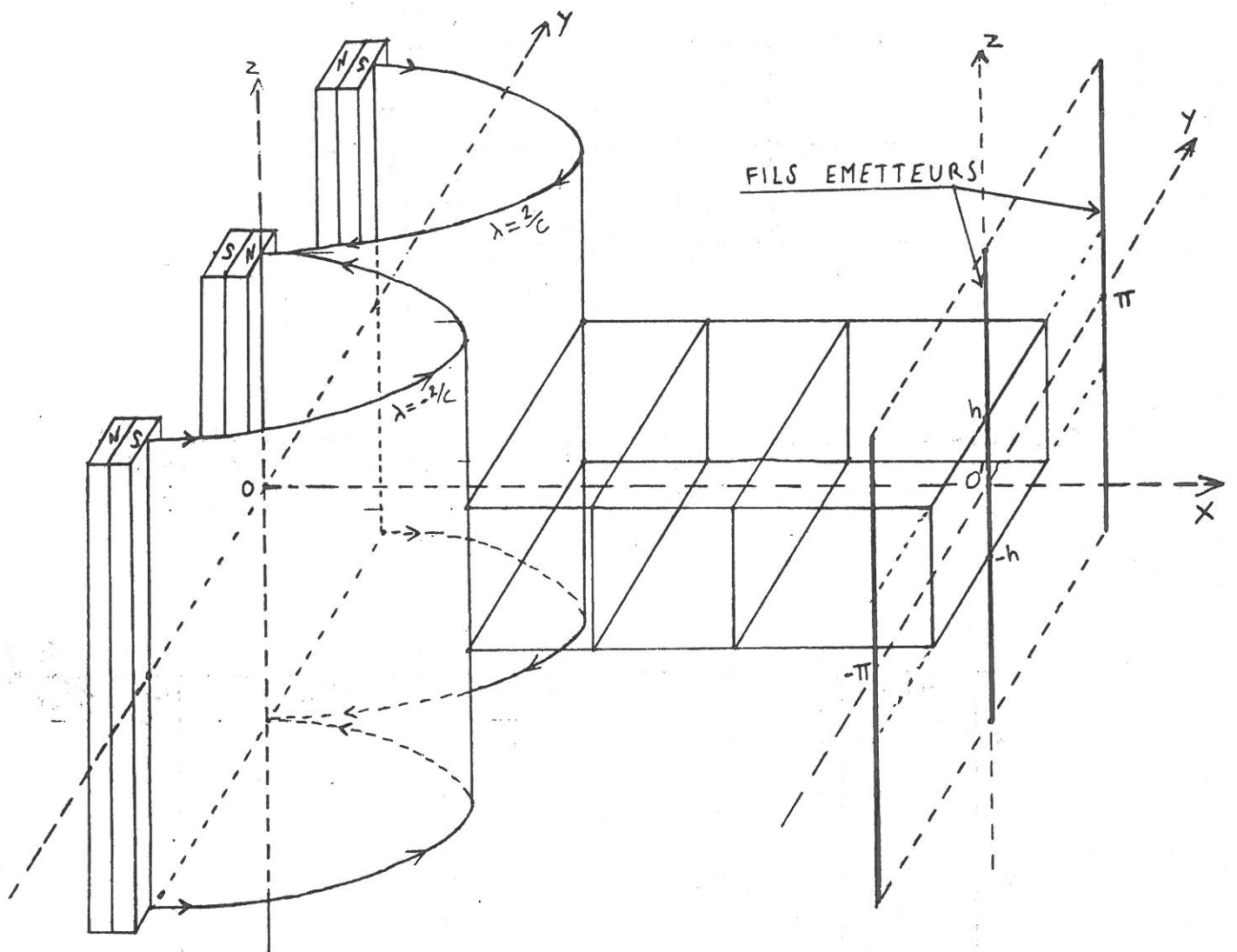
$$n_i = \frac{A}{V_i} \sum_{k=1}^N \tau_k^i \quad [V.3]$$

où N est le nombre de particules tirées, τ_k^i le temps passé par la $k^{\text{ième}}$ particule dans la $i^{\text{ème}}$ cellule, V_i le volume de celle-ci et n_i la densité. A est une constante de normalisation.

V.3.B. CONDITIONS INITIALES

a) Plan émetteur

Nous devons simuler une distribution uniforme et isotrope dans les régions où le champ est faible, c'est-à-dire le long du



FigureV-I: Division du domaine de calcul en cellules de volume fini. Les parallélépipèdes de cette figure sont destinés à donner une idée de la géométrie utilisée. En fait, les cellules utilisées pour le calcul sont des prismes de hauteur $2h$ construits à partir de la figure III-8. La paroi située en $X=0,5$ n'a pas été représentée.

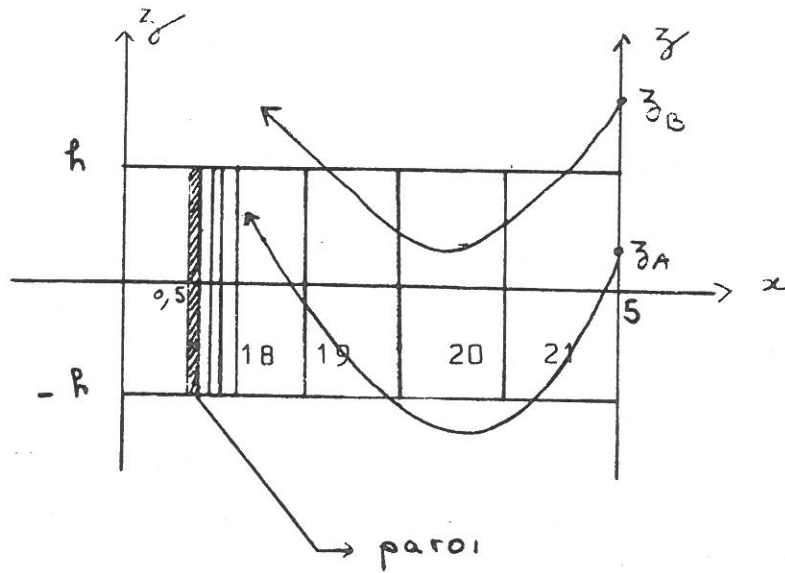


Figure V-2: Trajectoires issues des points Z_A et Z_B . Elles sont identiques, mais leur contribution à la densité dans les cellules est différente.

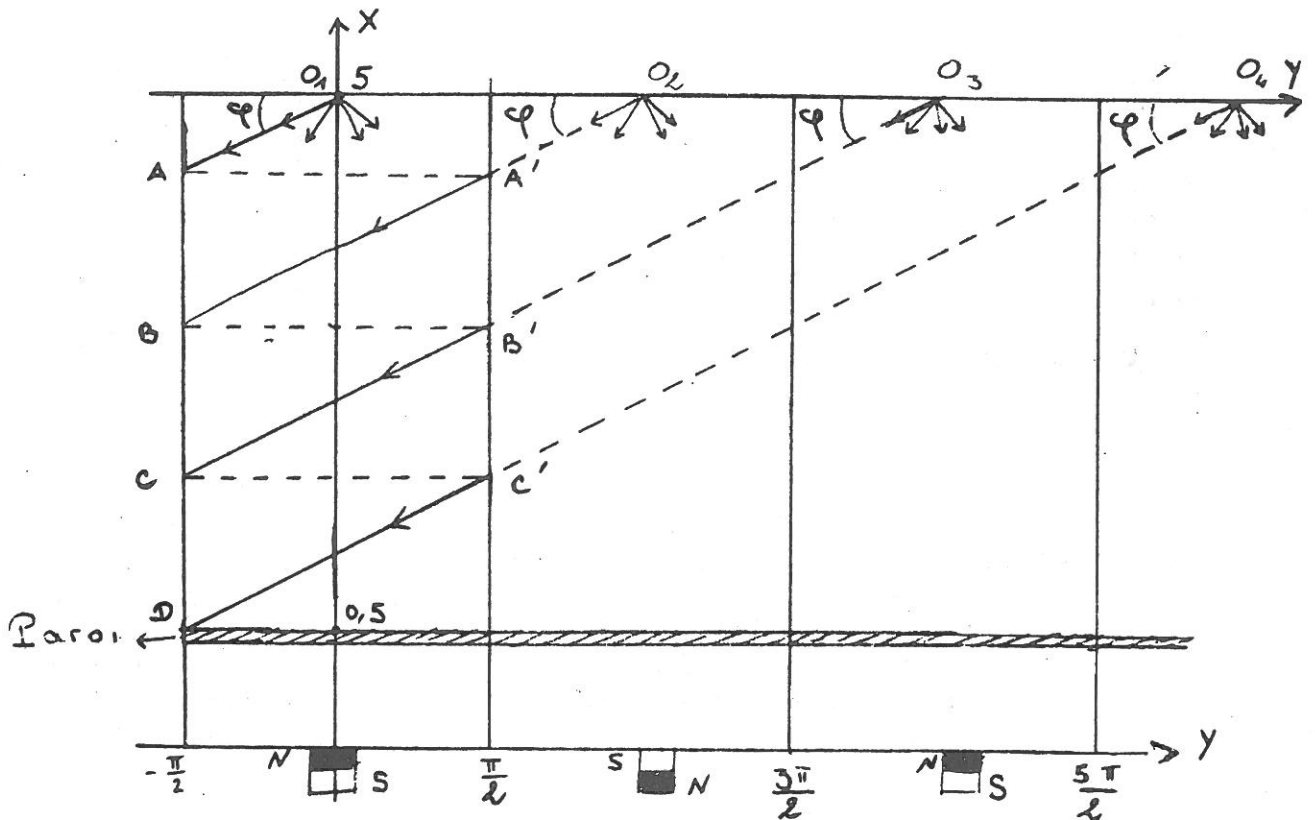


Figure V-3: Grille émettrice. La périodicité du système le long de OY permet de prendre en compte tous les fils de la grille (O_1, O_2, O_3, \dots) en ne calculant qu'une trajectoire.

plan frontière (YO'Z de la figure V-1). Il y a quatre degrés de liberté : Y, Z, θ , φ .

Z doit être choisi dans l'intervalle $[-L, L]$, où L désigne le libre parcours moyen. Le problème étant invariant par translation le long de OZ, on pourrait croire que Z n'intervient pas pour le calcul de la densité. En fait, bien que les trajectoires de deux particules de mêmes conditions initiales, mais de Z différents, soient les mêmes à une translation près, leur contribution à la densité dans une cellule donnée est différente (figure V-2). Les particules issues de points tels que $|Z| > L$ ne peuvent parvenir jusqu'aux cellules. Il n'y a donc pas lieu de les considérer.

Y devrait aussi être choisi dans l'intervalle $[-L, L]$. Cependant, grâce à la procédure de réinjection des particules qui franchissent les frontières $Y = \frac{\pi}{2}$ (§ III.4.B), à chaque valeur de $Y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ correspond en fait une classe de trajectoires issues des points $Y_n = Y \pm n\pi$ avec $n = 0, 1, 2, \dots$ (figure V-3). On se limitera donc à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

θ et φ doivent être choisis dans l'intervalle $[0, \pi]$ pour ne tenir compte que des particules qui s'approchent des aimants.

L'uniformité est assurée par une distribution uniforme de Y et Z sur leurs intervalles de définition. Il y a isotropie si le nombre de particules dont le vecteur vitesse pointe dans la direction $\vec{\Omega}$ (à l'élément d'angle solide $d\vec{\Omega}$ près), est proportionnel à $d\vec{\Omega}$. Or $d\vec{\Omega} = d(\cos \theta)d\varphi$. Il faut donc que φ et $\cos \theta$ (et non pas θ) soient distribués uniformément sur leur domaine de définition respectif.

Il y a deux façons de choisir les conditions initiales :

On peut diviser les intervalles en N points équidistants et tirer les particules une par une avec ces valeurs. Le désavantage de cette méthode est que la distribution ne devient uniforme qu'à la fin du tir et s'il s'avère que N est insuffisant, il faut tout recommencer.

On peut aussi (et c'est ce que nous ferons) tirer au sort N valeurs dans les intervalles de définition, à l'aide d'une fonction aléatoire. Pour N suffisamment grand, les distributions seront uniformes. Cette méthode nous permet de procéder séquentiellement. On choisit N très grand et on tire successivement les particules. La distribution étant automatiquement uniforme à partir de quelques centaines de tirs, on arrête le calcul dès que le résultat a convergé.

L'histogramme de la figure III-21 a été obtenu de cette façon, avec des particules issues de $Z = 0$ (il y avait donc trois degrés de liberté). La convergence du calcul était assurée à partir de $N = 600$ (au sens du § V.4.B).

Nous avons réalisé un programme à quatre degrés de liberté et nous avons malheureusement constaté que la solution ne convergerait pas malgré des temps de calcul assez longs (plus de 20 minutes avec un Univac 1110). Il a donc fallu restreindre la généralité du problème.

b) Grille émettrice d'électrons

Les particules sont issues d'une grille constituée de fils parallèles aux aimants et de coordonnées ($X = 5, Y = n\pi$), avec $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (figure V-1). On suppose de plus l'émission perpendiculaire aux fils : $\theta = \frac{\pi}{2}$. Il ne reste donc plus que deux degrés de liberté, Z et φ , car chaque trajectoire calculée à partir de $Y = 0$ prend en compte une classe de particules issues de tous les fils qui peuvent contribuer à la densité : comme on réinjecte la particule chaque fois qu'elle traverse la frontière $|Y| = \frac{\pi}{2}$, tout se passe comme si on procédait successivement au tir d'une particule d'angle φ à partir de chaque fil en ne gardant que la portion de trajectoire utile (figure V-3). La procédure peut être résumée comme suit :

- tirage au sort d'une valeur de φ
- calcul de la trajectoire correspondante

- tirage au sort de N valeurs de Z
- translation de la trajectoire calculée N fois le long de OZ.

Ensuite,

- on compte le nombre de points des trajectoires situés dans chaque cellule
- on déduit le temps passé dans chaque cellule en multipliant par le pas de temps
- on recommence avec une autre valeur de φ .

Nous ne pouvons plus prétendre simuler une distribution uniforme et isotrope loin des aimants, mais si l'effet d'accumulation des électrons primaires dans les régions de champ fort existe, nous devrions l'observer.

V.4. TESTS DE VALIDITE

V.4.A. CHAMP MAGNETIQUE NUL

Nous avons calculé analytiquement le nombre de particules présentes dans les cellules 16 à 21, en l'absence de champ magnétique (appendice D).

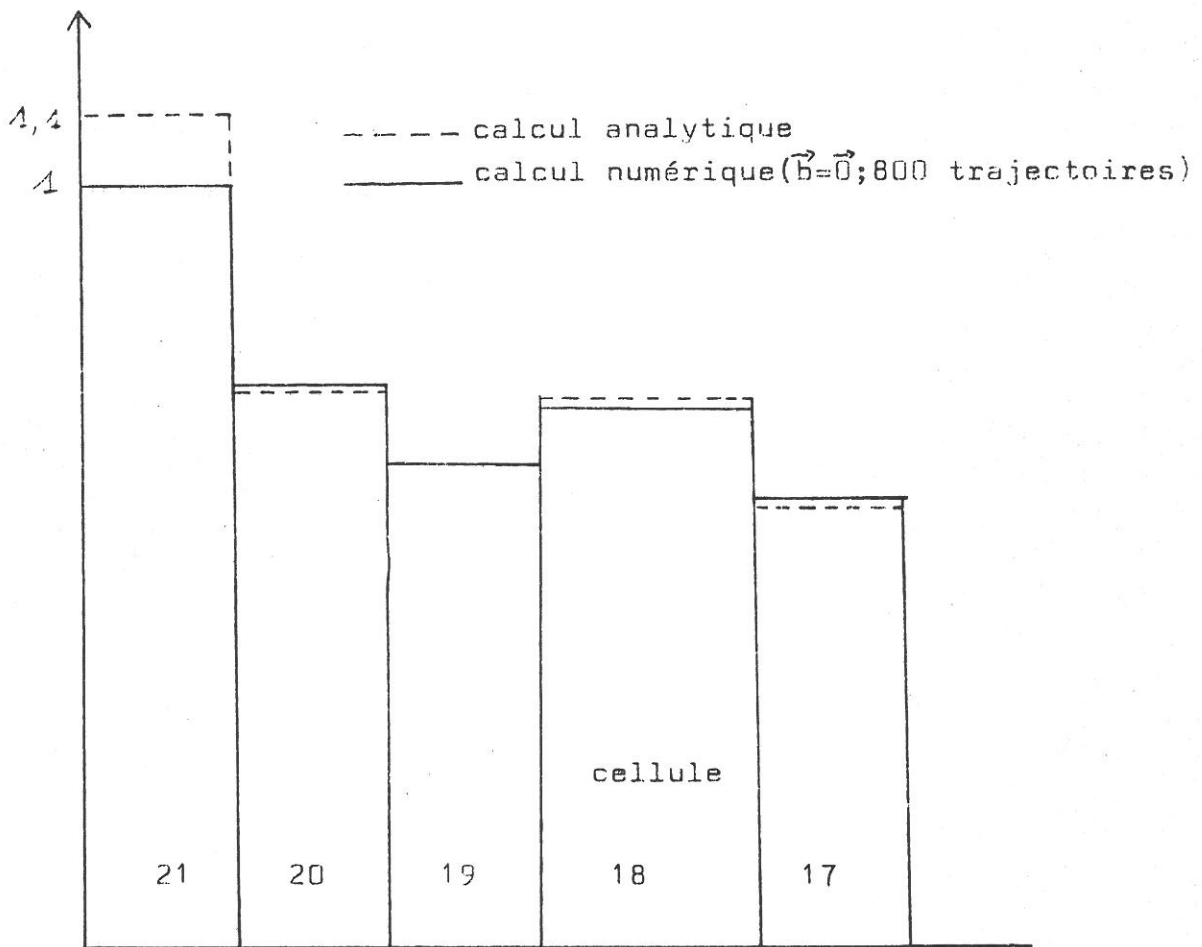
La figure V-4 permet de comparer le résultat analytique (équation [D-12]) au résultat du calcul numérique. L'histogramme présente un maximum pour la cellule 18. En effet, la densité décroît quand on s'éloigne de la grille émettrice, mais le volume de la cellule 18 est nettement plus grand que celui de la cellule 19, ce qui fait que le nombre de particules y est aussi plus grand.

L'accord entre le calcul numérique et le calcul analytique est excellent, sauf pour la cellule 21. Ceci est dû au fait que, dans le calcul numérique, certaines particules issues de fils lointains disparaissent sans avoir eu le temps de ressortir de la cellule 21. Dans le calcul analytique, par contre, cet effet est inexistant. On doit donc s'attendre à un nombre de particules plus élevé dans la cellule 21 dans ce dernier cas.

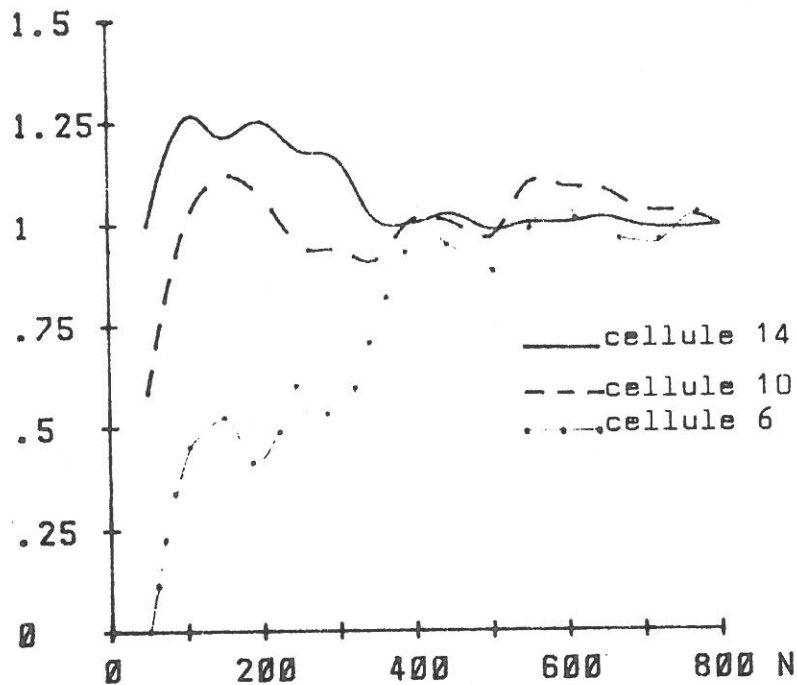
V.4.B. CONVERGENCE NUMERIQUE

Les figures V-5 et V-6 montrent la variation de la densité en fonction du nombre N de particules tirées, dans plusieurs cellules. Les courbes sont normées à leur valeur finale ($N = 800$ si $\vec{B} = \vec{0}$ et $N = 500$ si $\vec{B} \neq \vec{0}$). Le résultat fluctue d'autant plus que le numéro de la cellule est petit.

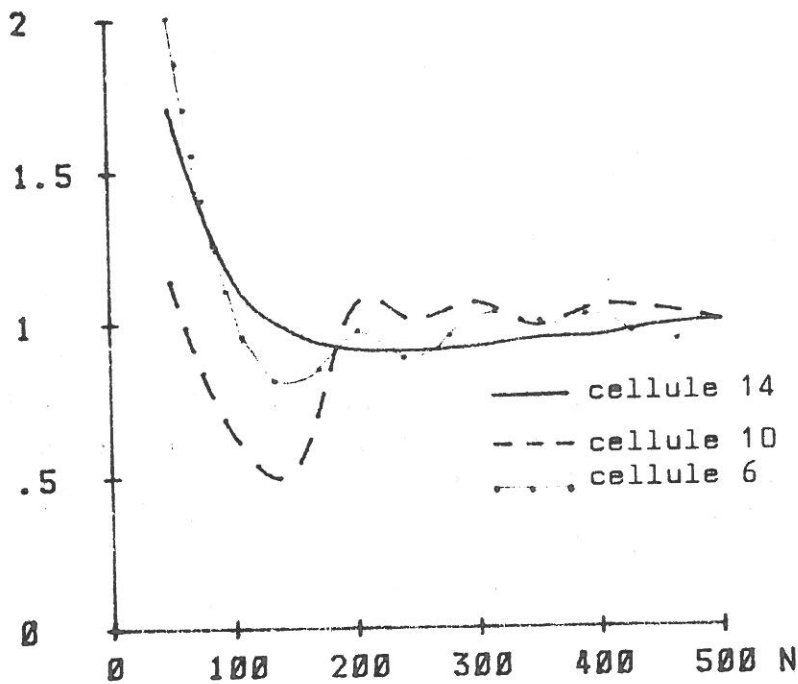
En l'absence de champ magnétique, pour $N > 500$, les fluctuations du résultat sont inférieures à 1 % dans les cellules 14 à 20 et inférieures à 10 % dans les cellules 6 à 14.



FigureV-4: Comparaison du nombre de particules obtenues dans les cellules 17 à 21 par le calcul analytique et par le calcul numérique (800 trajectoires en champ nul). La largeur des rectangles est proportionnelle à la surface des cellules.



FigureV-5: Champ magnétique nul: fluctuations du résultat du calcul numérique en fonction du nombre N de particules tirées. En ordonnées, nombre de particules présentes dans une cellule donnée divisé par le nombre de particules présentes dans la cellule 21. Les courbes sont normées à leur valeur finale.



FigureV-6: Champ magnétique non nul. Fluctuations du résultat du calcul numérique en fonction du nombre N de particules tirées. En ordonnées, nombre de particules présentes dans une cellule donnée divisé par le nombre de particules présentes dans la cellule 21. Les courbes sont normées à leur valeur finale.

En présence du champ magnétique les fluctuations sont inférieures à 10 % dans toutes les cellules de numéro supérieur à 6 pour $N > 300$.

Il faut 40 minutes pour calculer 500 trajectoires en champ magnétique non nul avec un Univac 1110.

V.5. RESULTATS

Nous présentons ici les résultats du calcul numérique sans les interpréter. Nous discuterons leur signification physique au chapitre VI.

V.5.A. DENSITE DES ELECTRONS PRIMAIRES

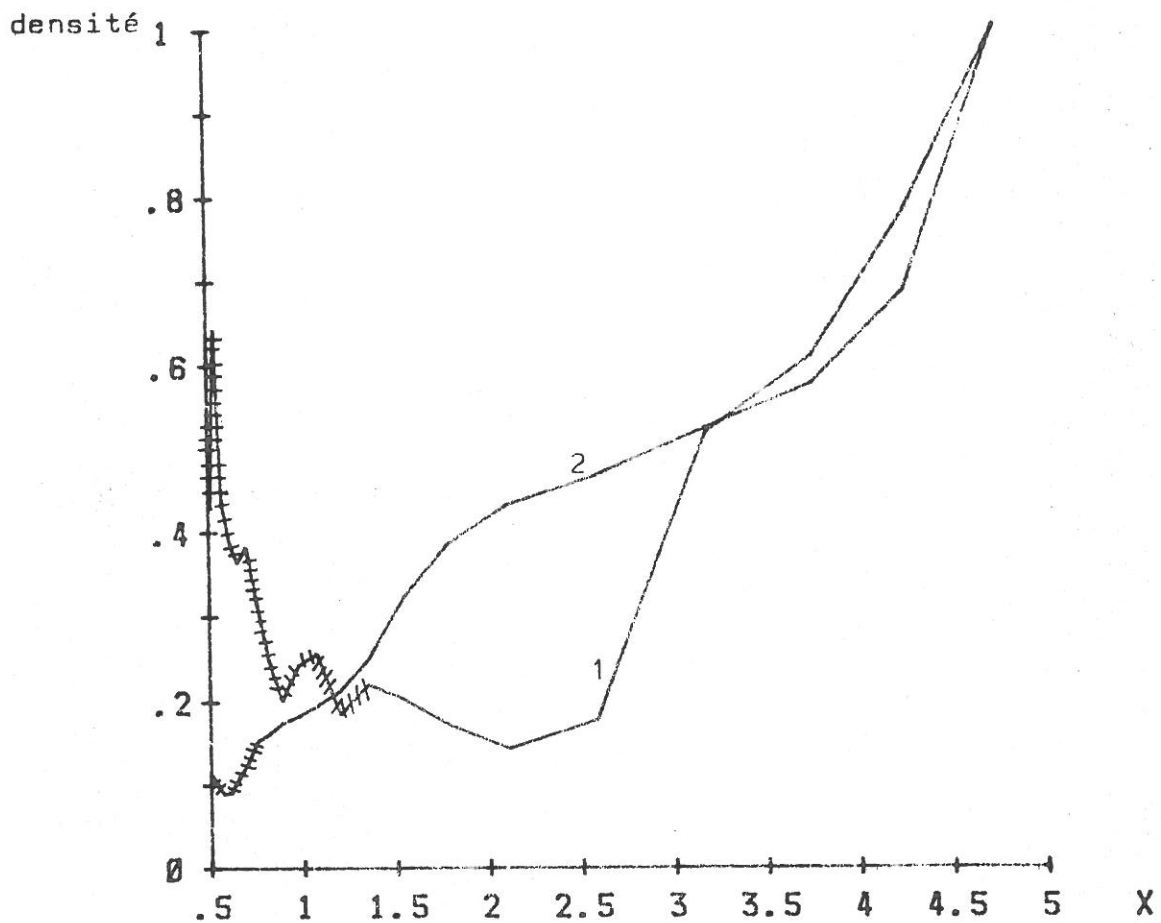
En divisant le nombre de particules présentes dans chaque cellule par le volume de celle-ci, on obtient une valeur moyenne de la densité qui correspond grossièrement à la densité des électrons primaires le long d'un axe passant par un aimant.

La figure V-7 montre la variation de cette densité avec X. La courbe 1 a été calculée avec le champ magnétique et la courbe 2 sans le champ.

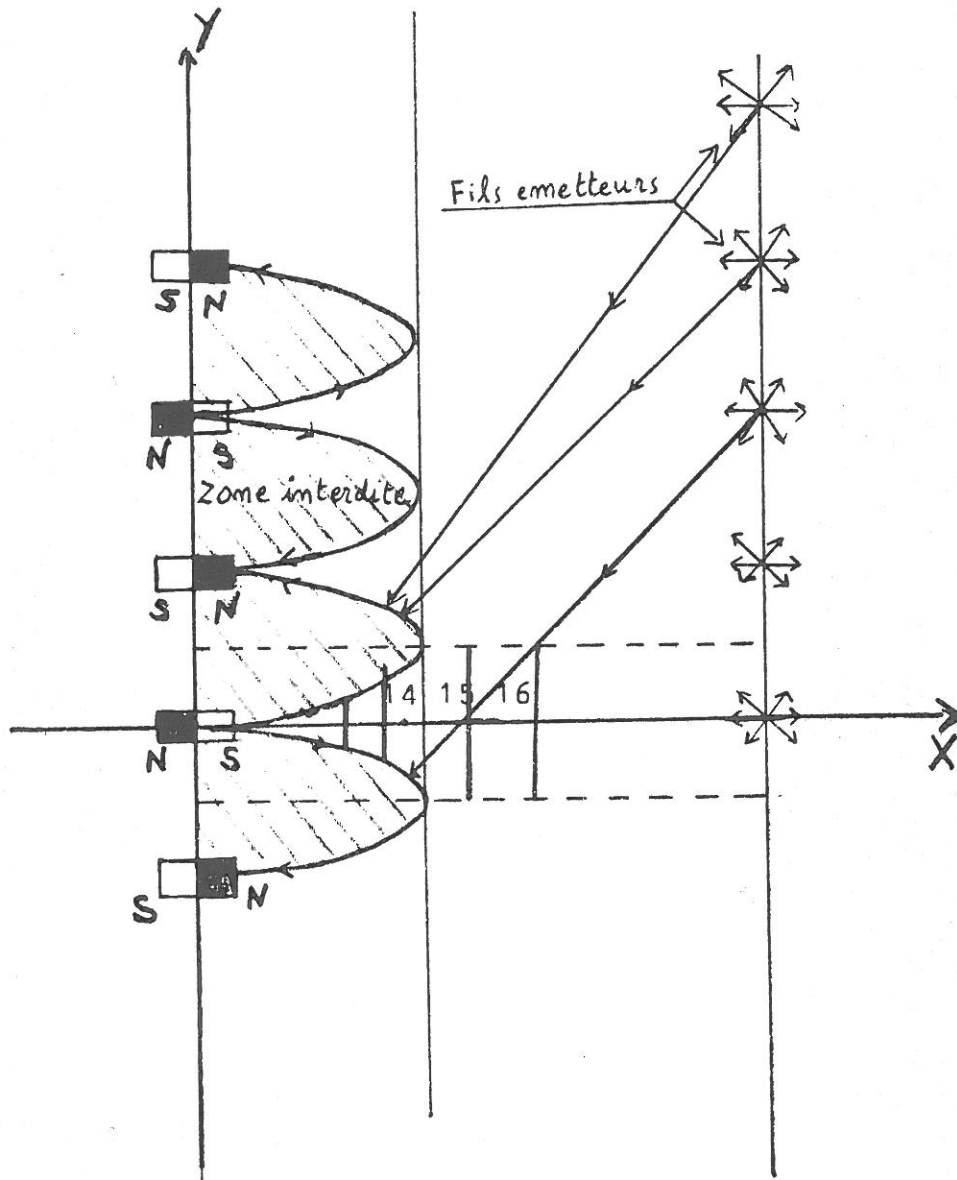
Les courbes sont normées à leur valeur en un point situé au voisinage de la grille émettrice.

Considérons d'abord la courbe 2 ($\vec{B} = \vec{0}$) : la densité décroît quand on s'éloigne de la grille. La décroissance s'accroît dès que X devient inférieur à 2. Il s'agit là d'un artefact dû au calcul numérique. En effet, la courbe 2 a été calculée pour tester le programme de calcul en champ magnétique non nul. Celui-ci avait donc subi le moins de modifications possibles et, en particulier, le calcul cessait dès qu'une particule franchissait les lignes $\lambda = \pm \frac{2}{C}$ (effet d'"ombre"). Les particules issues de fils éloignés ne pouvaient pas parvenir aux cellules 1 à 15 (figure V-8).

En présence du champ magnétique (courbe 1), on observe aussi une décroissance à partir de la source, mais cette décroissance devient très rapide entre $X = 2,5$ et $X \approx 3$. C'est une conséquence de l'effet miroir : la figure V-9 montre que la plupart des trajectoires n'atteignent pas la cellule 17 et ne franchissent donc pas l'abscisse $X = 3$ (figure III-8).



FigureV-7:Variation de la densité des électrons primaires dans un cusp:en présence du champ magnétique(courbe 1),et en champ nul(courbe 2). Les hachures indiquent les régions où le calcul numérique n'avait pas convergé.



FigureV-8: Effet d'ombre d_0 à la prise en compte des zones interdites dans le cas où $B=0$.

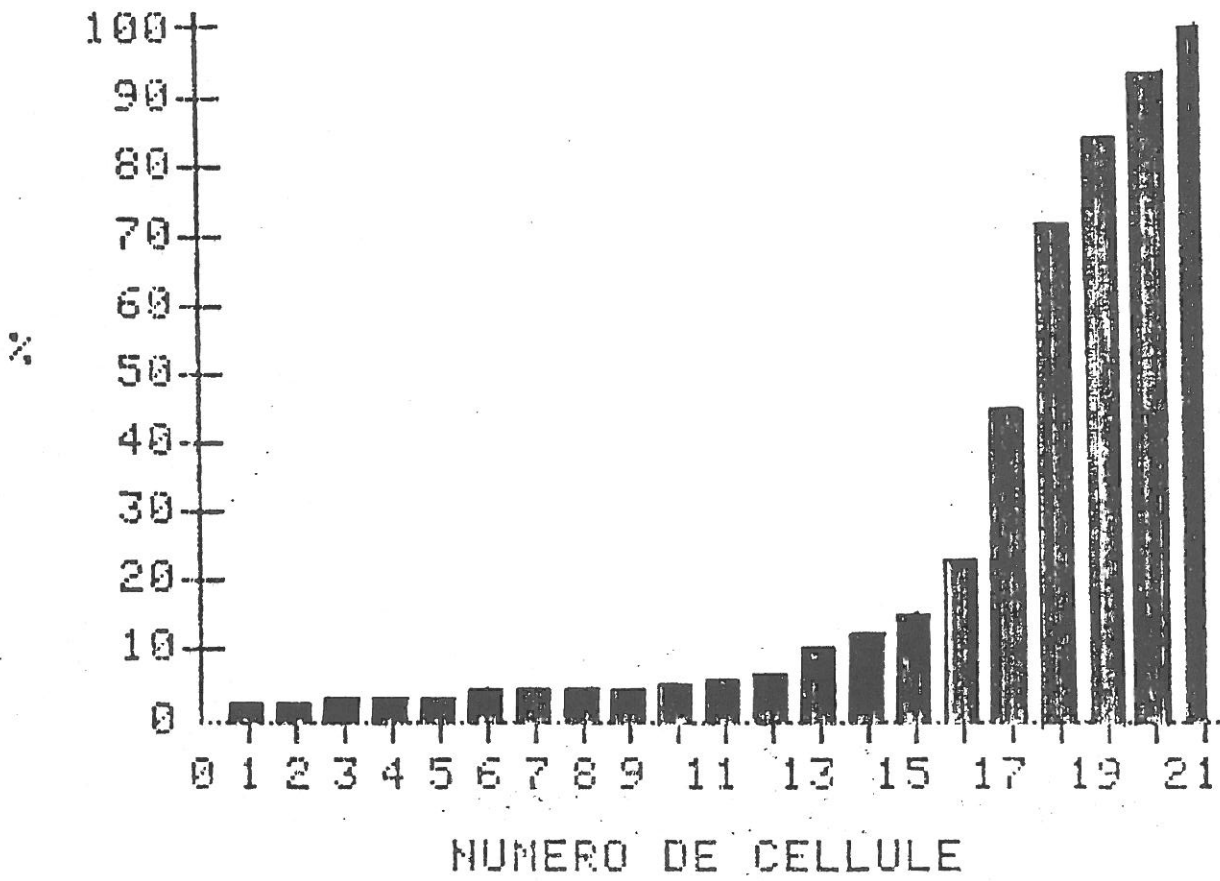
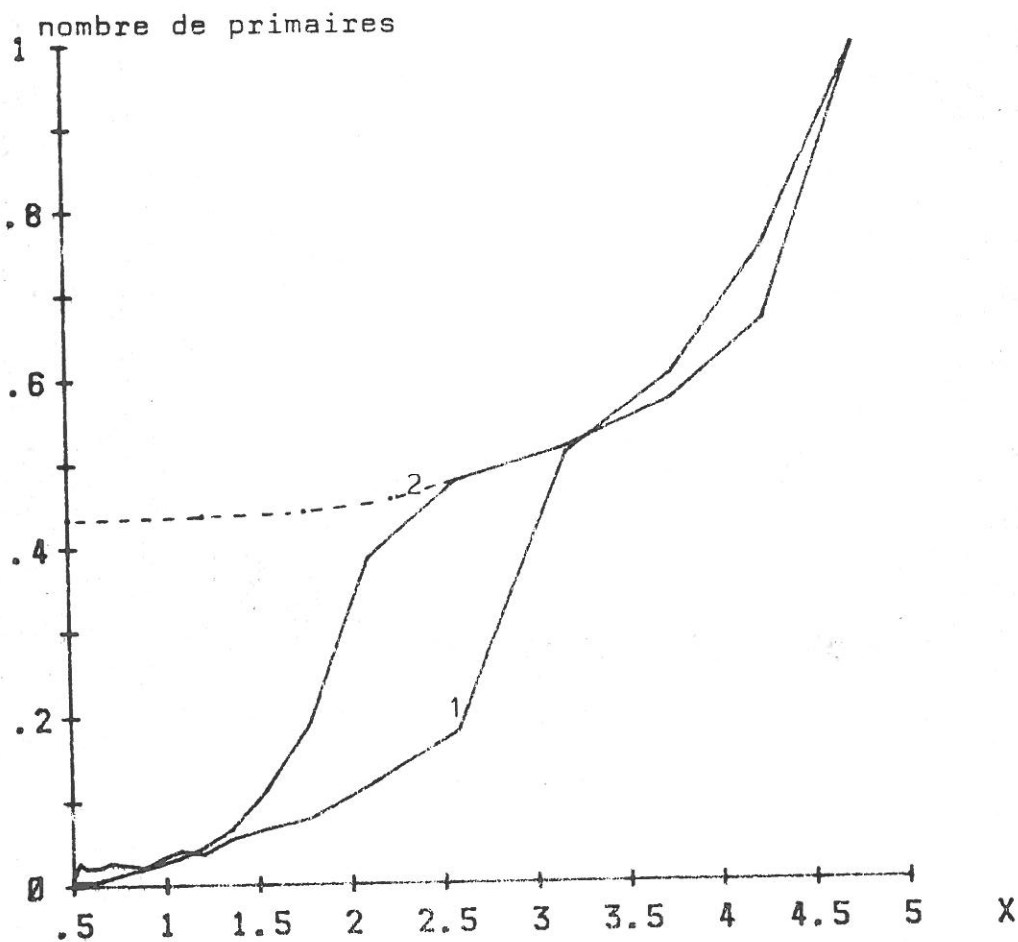


Figure V-9: Nombre de trajectoires ayant atteint une cellule donnée.



FigureV-10: Nombre d'électrons primaires présents au voisinage de la paroi.

Courbe 1: champ magnétique non nul.

Courbe 2: pas de champ. La courbe en pointillés a été calculée par [D-12]. Elle ne présente pas d'effet d'ombre.

Pour X inférieur à 2,5, la densité devient constante et il semble même qu'elle ait tendance à augmenter.

V.5.B. NOMBRE D'ELECTRONS PRIMAIRES AU VOISINAGE DE LA PAROI

La figure V-10 montre la moyenne de la densité parallèlement à OY et OZ (c'est-à-dire le nombre de particules dans une tranche d'épaisseur dX parallèle à la paroi).

La partie en pointillés de la courbe 2 ($\vec{B} = 0$) a été calculée à l'aide de la formule [D-12] de l'appendice D. Contrairement à la courbe en traits pleins (résultat du calcul numérique), elle ne présente pas l'effet d'ombre dont il est question ci-dessus.

La courbe 1 ($\vec{B} \neq \vec{0}$) décroît beaucoup plus vite que la courbe 2. Le champ magnétique diminue donc considérablement (en valeur relative) le nombre d'électrons primaires au voisinage des parois.

V.6. CONCLUSION

Les résultats du paragraphe précédent ont été obtenus avec une grille émettrice d'électrons. La distribution de ceux-ci n'est donc pas uniforme et isotrope quand on s'éloigne de la paroi. Cependant nous pouvons dès maintenant conclure qu'il n'y a pas accumulation, dans les régions de champ fort, de populations d'électrons primaires issus de l'intérieur de l'enceinte. Nous tirerons les conclusions qui s'imposent au chapitre suivant, après avoir interprété les résultats précédents dans le cadre de l'hypothèse adiabatique.

* *
*

PLAN DU CHAPITRE VI

EVALUATION DE LA DENSITE DES PRIMAIRES DANS UN CUSP : THEORIE ADIABATIQUE

VI.1. <u>INTRODUCTION</u>	133
VI.2. <u>CALCUL DU TEMPS PASSE DANS LA GAINÉ MAGNETIQUE</u>	134
VI.3. <u>RESOLUTION DE L'EQUATION DE LIOUVILLE : APPROXIMATION</u> <u>ADIABATIQUE</u>	138
VI.3.A. Changement de variables.....	138
VI.3.B. Solution asymptotique.....	139
VI.3.C. Fonction de distribution des primaires.....	140
VI.3.D. Domaine de définition.....	141
VI.3.E. Normalisation de la fonction de distribution..	145
VI.4. <u>EVALUATION DE LA VARIATION DE LA DENSITE DES</u> <u>ELECTRONS PRIMAIRES DANS UN CUSP</u>	146
VI.5. <u>CONCLUSION</u>	150

* *
*

C H A P I T R E VI

EVALUATION DE LA DENSITE DES ELECTRONS PRIMAIRES DANS UN CUSP : THEORIE ADIABATIQUE

VI.1. INTRODUCTION

Afin de mieux comprendre les principaux résultats obtenus au chapitre précédent, nous allons nous placer dans le seul cas où l'on peut résoudre les équations du mouvement : l'approximation adiabatique.

Nous allons retrouver les résultats suivants :

- La densité des électrons primaires reste pratiquement constante dans un cusp.
- Le nombre de particules présentes dans une tranche d'épaisseur dX parallèle aux aimants décroît lorsqu'on s'en approche.

Le calcul du chapitre précédent était motivé par le fait que le modèle de diffusion des particules par le mur magnétique (chapitre IV) ne prenait pas en compte les trajectoires analogues à celles de la figure III-18. Nous espérions que les particules de ce type resteraient suffisamment longtemps dans la gaine magnétique pour que leur densité y soit plus élevée que dans les régions de champ faible. Cet espoir a été déçu. Voyons pourquoi.

VI.2. CALCUL DU TEMPS PASSE DANS LA GAINE MAGNETIQUE

Au § III.6.D nous avons donné l'expression du temps passé par une particule adiabatique entre deux points de sa trajectoire. L'équation [III.50] peut être exprimée en intégrant sur la variable X :

$$T = C \int_{X_1}^{X_2} \frac{\sqrt{1 + \left[\frac{b_Y(X, Y(X))}{b_X(X, Y(X))} \right]^2}}{\sqrt{1 - Mb(X, Y(X))}} dX \quad [VI.1]$$

L'équation de la ligne de champ λ suivie par le centre guide est ([III.10])

$$Y(X) = \text{arc sin} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\text{Ch } X}{\lambda} - \sqrt{\frac{\text{Ch}^2(X)}{\lambda^2} - 4 \text{ sh}^2 X} \right] \right\} \quad [VI.2]$$

Intéressons nous aux particules qui suivent la ligne de champ $\lambda = 0$ (c'est le cas des figures III-17 et III-18).

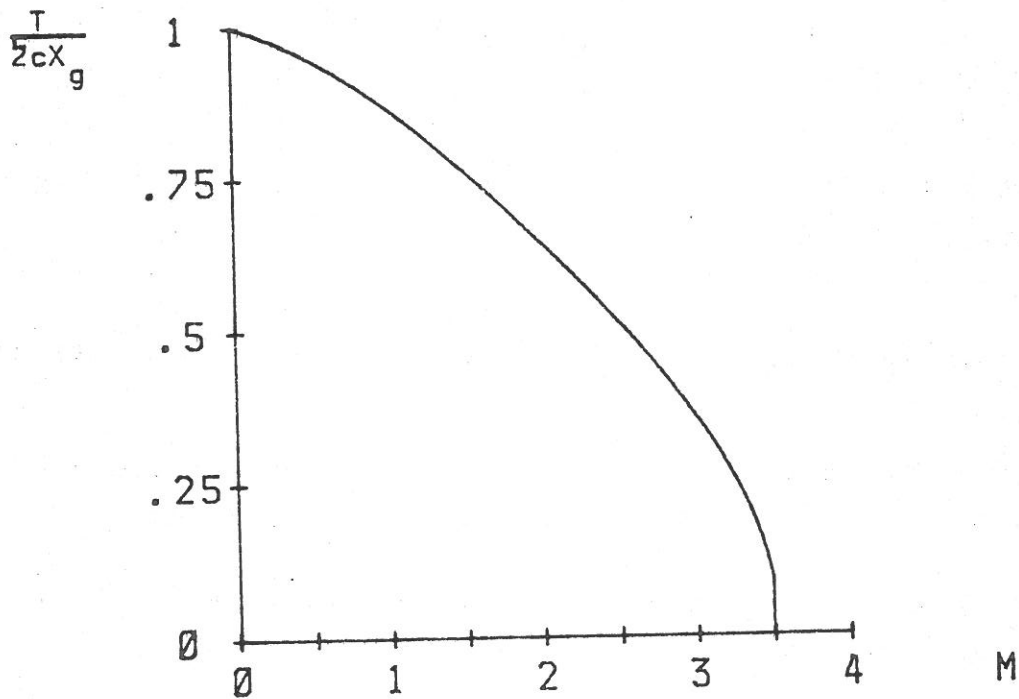
Pour ces particules, b_Y est petit devant b_X et le module du champ magnétique est donné par [III.19] :

$$b(X, Y(X)) \approx b(X) = \frac{\text{Ch } X}{\text{sh}^2 X} \quad [III.19]$$

Fixons arbitrairement le début de la gaine magnétique en X_G et appelons X_M l'abscisse du point miroir (solution de [III.46]). Le temps mis par la particule pour effectuer l'aller-retour entre X_G et X_M est alors :

$$T \approx 2C \int_{X_M}^{X_G} \frac{dX}{\sqrt{1 - Mb(X)}} \quad [VI.3]$$

Cette intégrale se calcule sans difficulté et l'on obtient :



FigureVI-1: Temps passé dans la gaine magnétique par une particule issue de $X_g=2$, en fonction du moment magnétique.

$$T \approx 2C \operatorname{arg} \operatorname{Ch} \left\{ \frac{\operatorname{Ch} X_G - M/2}{\sqrt{1 + (M/2)^2}} \right\} \quad [\text{VI.4}]$$

La figure VI-1 montre la variation du temps passé par la particule dans la gaine magnétique en fonction de M. C'est une fonction décroissante de M.

En l'absence de champ magnétique, le temps passé dans la gaine par une particule de vitesse parallèle à OX serait (il n'y a pas de trajet retour) :

$$T = CX_G \quad [\text{VI.5}]$$

Par conséquent, contrairement à ce que suggérait l'intuition, les particules ne restent pas beaucoup plus longtemps dans la gaine magnétique, malgré leurs trajectoires hélicoïdales. Au maximum, la durée de leur séjour est multipliée par deux, grâce à l'effet miroir.

Le séjour des particules est d'autant plus court que le moment magnétique est élevé car le point miroir s'éloigne des aimants lorsque M croît ([III.46]).

Appliquons [VI.4] à la trajectoire $\theta = 7^\circ$ de la figure III-17 avec $X_G = 1,9$:

- Le moment magnétique est (tableau III.5) : $M = 0,3$
- Le temps passé dans la gaine magnétique calculé par l'ordinateur est : $T = 30,3$
- L'équation [VI.4] nous donne : $T = 30,4$.

L'accord est donc excellent. S'il n'y avait pas de champ magnétique (mais seulement un miroir en $X = 0$) on aurait trouvé :

$$T = 2CX_G = 31,35$$

Contrairement aux apparences, les particules aux trajectoires très enroulées ne contribuent donc pas à augmenter globalement l'ionisation dans la gaine magnétique. Cependant bien que

l'intégrale converge, l'intégrant de [VI.3] devient infini au voisinage du point miroir ; les particules ont donc tendance à passer plus de temps au voisinage de celui-ci que dans le reste de leur trajectoire. Cet effet explique pourquoi la densité des électrons primaires ne décroît pas malgré la diminution de leur nombre par réflexion.

VI.3. RESOLUTION DE L'EQUATION DE LIOUVILLE : APPROXIMATION ADIABATIQUE

Les électrons primaires n'interagissent pas, leur fonction de distribution vérifie l'équation de Liouville que l'on peut écrire :

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad [V.1]$$

ce qui signifie que la fonction de distribution ne varie pas le long des trajectoires de l'espace des phases.

Nous nous intéressons aux particules qui viennent de l'infini, et par conséquent, elles ne sont pas piégées. Il nous faut donc trouver la solution de [V.1] qui devient isotrope et uniforme lorsque le champ magnétique tend vers zéro. La forme asymptotique de $f(\vec{x}, \vec{v})$ est donnée par [V.2] :

$$f_{\infty}(\vec{x}, \vec{v}) \equiv \delta\left(v - \sqrt{\frac{2E}{m}}\right) \frac{\sin \theta}{4\pi} \quad [V.2]$$

où θ désigne l'angle $(\widehat{Ox, \vec{v}})$.

VI.3.A. CHANGEMENT DE VARIABLES

La fonction de distribution dépend des variables x, y, v_x, v_y, v_z . Effectuons le changement de variables suivant :

$$\left. \begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ P_z &= mv_z - eA(x, y) \equiv P_z(x, y, v_z) \\ E &= \frac{1}{2}mv^2 \equiv E(v_x, v_y, v_z) \\ \mu &= \frac{v_z^2 + v_y^2}{B(x, y)} \equiv \mu(x, y, v_z, v_y,) \end{aligned} \right\} \quad [VI.5]$$

$$f(\vec{x}, \vec{v}) \equiv F(x, y, P_z, E, \mu)$$

L'équation [V.1] s'écrit alors (15) :

$$\dot{x} \frac{\partial F}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial F}{\partial y} + \dot{p}_z \frac{\partial F}{\partial p_z} + \dot{E} \frac{\partial F}{\partial E} + \dot{\mu} \frac{\partial F}{\partial \mu} = 0 \quad [\text{VI.6}]$$

E et P_z sont des invariants du mouvement. \dot{E} et \dot{P}_z sont donc nuls. Supposons l'approximation adiabatique vérifiée. $\dot{\mu}$ est alors nul et toute fonction $F(\mu, P_z, E)$ qui ne dépend pas explicitement de x et y est solution de [VI.6]. Parmi toutes ces fonctions il y en a une et une seule qui décrit la distribution des électrons primaires : celle qui tend vers f_∞ lorsque x devient suffisamment grand.

VI.3.B. SOLUTION ASYMPTOTIQUE DE L'EQUATION DE LIOUVILLE

Exprimons $f_\infty(\vec{x}, \vec{v})$ dans les nouvelles variables :

$$f_\infty(v, \theta, \varphi) = \delta\left(v - \sqrt{\frac{2E}{m}}\right) \frac{\sin \theta}{4\pi} \quad [\text{V.2}]$$

Les composantes de la vitesse s'écrivent, en coordonnées sphériques :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x \equiv v \cos \theta \\ v_y \equiv v \sin \varphi \sin \theta \\ v_z \equiv v \cos \varphi \sin \theta \end{array} \right. \quad [\text{VI.7}]$$

Le passage des variables (θ, φ) aux variables (μ, P_z) est alors ([VI.5])

$$\left\{ \begin{array}{l} P_z = mv \cos \varphi \sin \theta - eA(x, y) \\ \mu B(x, y) = v^2 \sin^2 \theta \end{array} \right. \quad [\text{VI.8}]$$

Le nombre de particules contenues dans un volume élémentaire de l'espace des phases est :

$$dN = f_{\infty}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi \equiv F_{\infty}(\mu, P_z) d\mu dP_z$$

On a donc
$$f_{\infty}(\theta, \varphi) = \frac{\partial(\mu, P_z)}{\partial(\theta, \varphi)} F_{\infty}(\mu, P_z) \quad [\text{VI.9}]$$

où $\frac{\partial(\mu, P_z)}{\partial(\theta, \varphi)}$ désigne le Jacobien de la transformation [VI.8] :

$$\frac{\partial(\mu, P_z)}{\partial(\theta, \varphi)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{v^2}{B} 2 \sin \theta \cos \theta & 0 \\ v \cos \varphi \cos \theta & -mv \sin \theta \sin \varphi \end{vmatrix} = \frac{2mv^3}{B(x, y)} \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi$$

On en déduit ([VI.9] et [V.2])

$$F_{\infty}(\mu, P_z) = \frac{B(x, y)}{4\pi m v^3} \delta(v - \sqrt{\frac{2E}{m}}) \frac{1}{\sin 2\theta \sin \varphi}$$

et finalement, en utilisant la transformation inverse de [VI.8] :

$$F_{\infty}(\mu, P_z) = \frac{B(x, y)}{4\pi m v} \frac{\delta(v - \sqrt{2E/m})}{\sqrt{v^2 - \mu B(x, y)} \sqrt{\mu B(x, y) - [P_z/m + \frac{eA(x, y)}{m}]^2}} \quad [\text{VI.10}]$$

Malgré les apparences, F_{∞} est uniforme et isotrope en tout point du plan (x, y) . Nous avons seulement exprimé $f_{\infty}(\theta, \varphi)$ en coordonnées (μ, P_z) .

VI.3.C. FONCTION DE DISTRIBUTION DES ELECTRONS PRIMAIRES

Plaçons nous en un point d'abscisse x_G , assez grand pour que le module du champ ne dépende pas de y . La figure III-4 montre en effet que les lignes $|\vec{B}| = C^{te}$ tendent vers des droites parallèles à Oy pour x suffisamment grand. Considérons la fonction suivante :

$$F(\mu, P_z) \equiv \frac{B(x_G)}{4\pi m v} \frac{\delta(v - \sqrt{2E/m})}{\sqrt{v^2 - \mu B(x_G)} \sqrt{\mu B(x_G) - (P_z/m)^2}} \quad [\text{VI.11}]$$

$F(\mu, P_z)$ coïncide avec $F_\infty(\mu, P_z)$ sur la droite $x = x_G$ car $A(x_G, y) \approx 0$, si x_G est assez grand. La fonction $F(\mu, P_z)$ devient donc uniforme et isotrope quand on s'éloigne des aimants. De plus, si le moment magnétique est conservé, elle vérifie l'équation de Liouville ([VI.6]) car elle ne dépend pas explicitement de (x, y) . [VI.11] est donc la fonction de distribution des électrons primaires dans les régions où ceux-ci sont adiabatiques.

Remarque : L'existence d'un champ électrique qui dérive du potentiel $\phi(x, y)$ ne change rien à la démonstration qui précède. La fonction de distribution est toujours donnée par [VI.11]. Seule l'expression de l'énergie dans [VI.5] diffère :

$$E = \frac{1}{2} mv^2 - e\phi(x, y)$$

VI.3.D. DOMAINE DE DEFINITION

Il est plus commode d'effectuer les calculs en coordonnées réduites ([III.9]) : la fonction de distribution s'écrit alors :

$$F(M, P) = \frac{b(X_G)}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - Mb(X_G)} \sqrt{Mb(X_G) - P^2}} \quad [\text{VI.12}]$$

Pour les particules libres, $|P| \leq 1$ (cf. § III.5). P est défini par [III.15] :

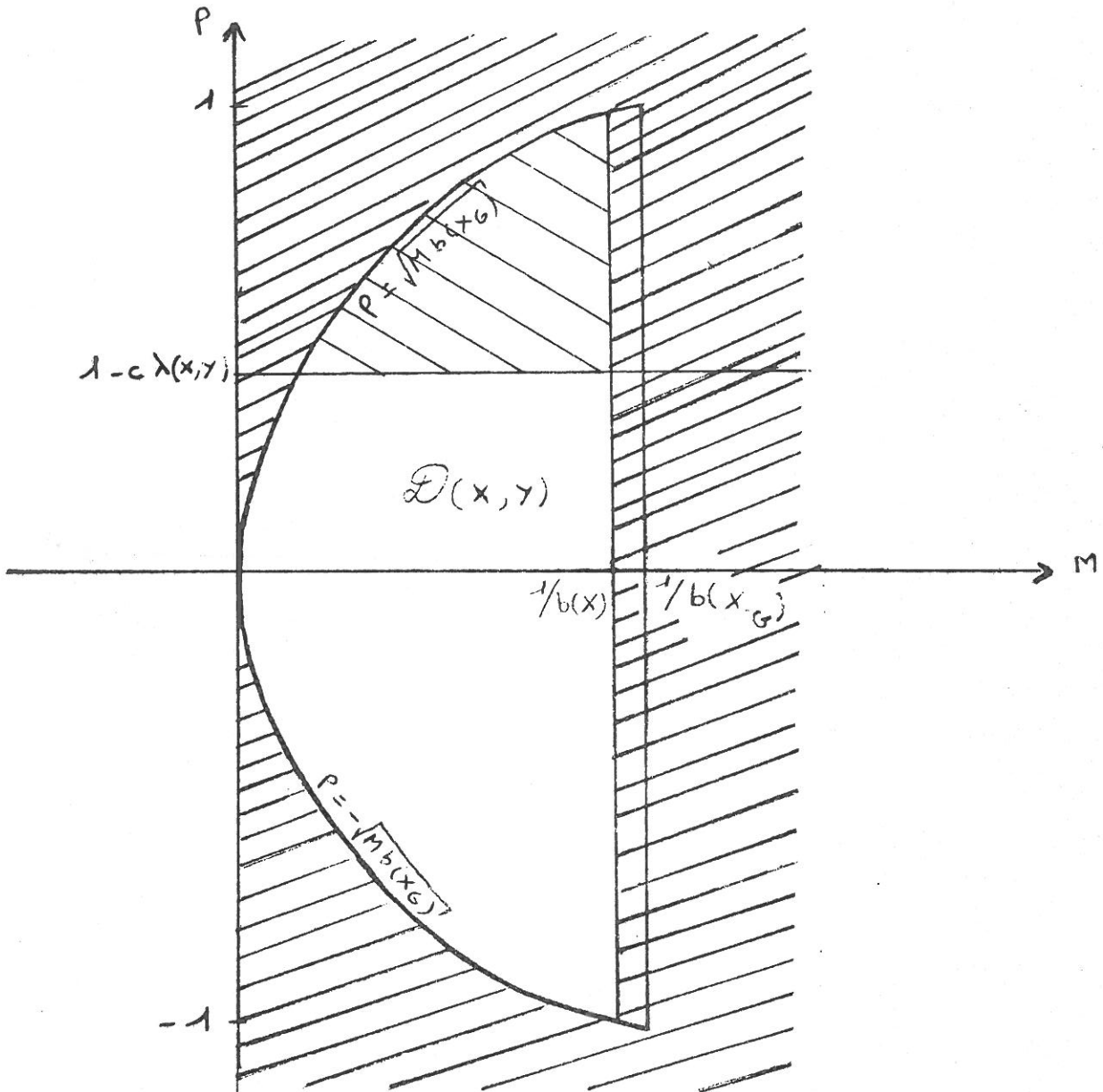
$$P \equiv V_Z - C\lambda(X, Y) \quad [\text{III.15}]$$

Comme V_Z est compris entre -1 et 1 , si $\lambda(X, Y) < 0$, on doit avoir :

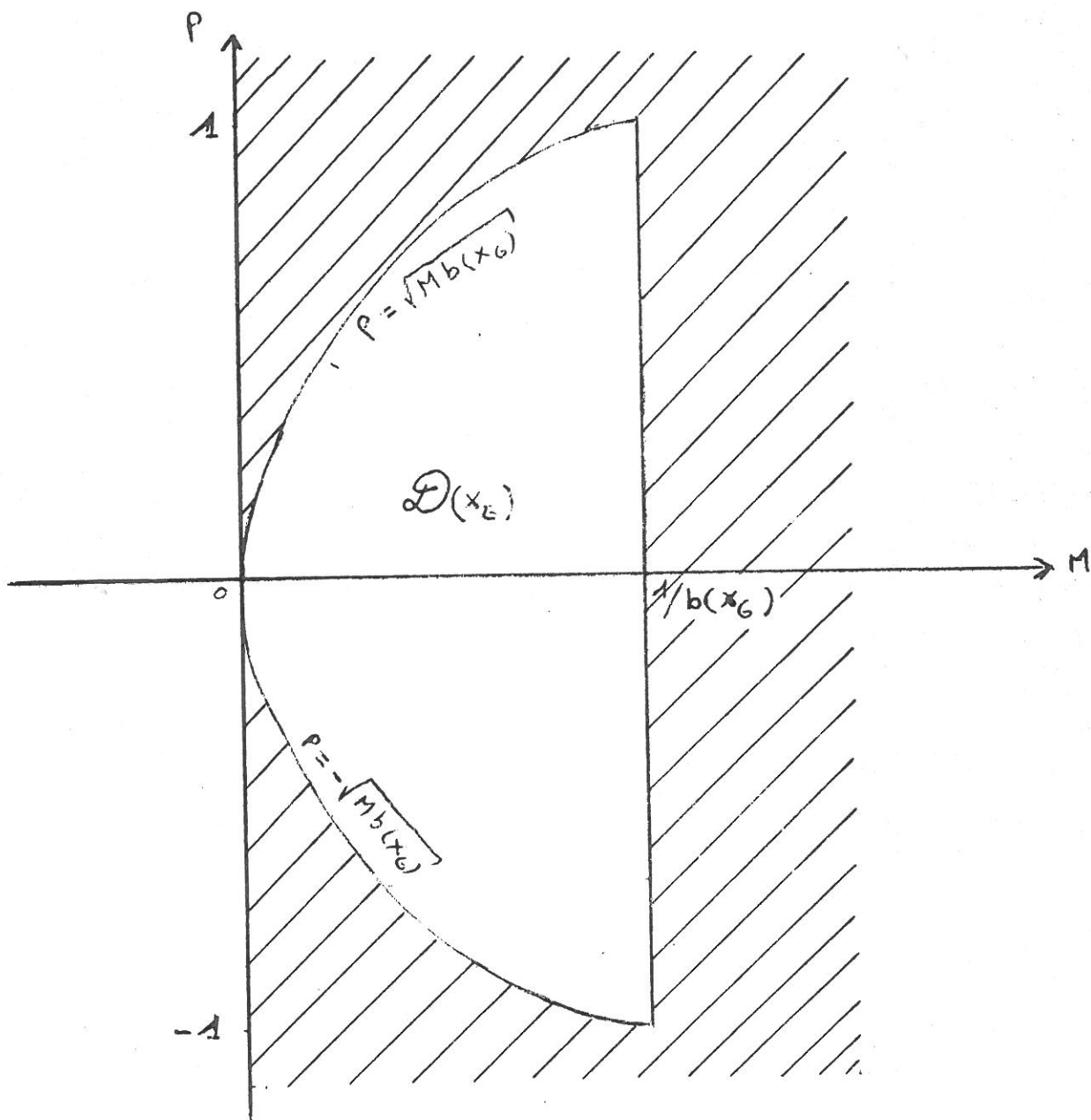
$$-1 - C\lambda(X, Y) \leq P \leq 1$$

Si $\lambda(X, Y) > 0$, la condition à vérifier est :

$$-1 \leq P \leq 1 - C\lambda(X, Y)$$



FigureVI-2:Domaine de définition de la fonction de distribution



FigureVI-3:Domaine de définition loin des aimants.

Pour que l'expression [VI.12] ait un sens, il faut aussi que $|P| \leq \sqrt{Mb(x_G)}$.

La figure VI-2 présente le domaine de définition $\mathcal{D}(x,y)$ pour $\lambda(X,Y) > 0$. Il est borné par les quatre courbes :

$$P = \pm \sqrt{Mb(X_G)}$$

$$P = 1 - C\lambda(X,Y)$$

$$M = 1/b(X)$$

En $X = X_G$ (c'est-à-dire loin des aimants) le domaine ($\mathcal{D}(x_G)$) est celui de la figure VI-3. Lorsque X diminue, la frontière $M = 1/b(X)$ se rapproche de l'axe OP . Le domaine de définition se rétrécit et l'intégrale de la fonction de distribution (le nombre total de particules) diminue. Ce phénomène est dû à la réflexion des particules de moment magnétique M appartenant à $[1/b(X), 1/b(X_G)]$.

Lorsque λ augmente, le domaine se rétrécit et finit par disparaître complètement pour $\lambda \geq 2/C$: il y a de moins en moins de particules lorsque l'on approche des zones interdites.

VI.3.E. NORMALISATION DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION

En $X = X_G$, $F(M,P)$ coïncide avec $f_\infty(\theta, \varphi)$. Les intégrales de ces deux fonctions sur leurs domaines de définition respectifs doivent être les mêmes. Vérifions le :

$$\int f_\infty(\theta, \varphi) = \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{4\pi} d\theta = 1/2$$

L'angle φ varie entre 0 et π car on ne s'intéresse qu'aux particules qui se dirigent vers les aimants.

$$\int_{\mathcal{D}(x_G)} F(M,P) dM dP = \frac{b(x_G)}{4\pi} \int_0^{1/b(x_G)} \frac{dM}{\sqrt{1-b(x_G)M}} \int_{-\sqrt{Mb(x_G)}}^{\sqrt{Mb(x_G)}} \frac{dP}{\sqrt{Mb(x_G)-P^2}}$$

Avec le changement de variable $u \equiv Mb(x_G)$ l'intégrale devient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}(x_G)} F(M,P) dM dP &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}} \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} \frac{dP}{\sqrt{u-P^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}} \times \pi = \frac{1}{4\pi} \times 2\pi \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\int_{\mathcal{D}(x_G)} F(M,P) dM dP = \int f_\infty(\theta, \varphi) d\theta d\varphi = \frac{1}{2} .$$

VI.4. EVALUATION DE LA VARIATION DE LA DENSITE DES ELECTRONS PRIMAIRES DANS UN CUSP

Connaissant la fonction de distribution $F(M,P)$, on obtient la densité en repassant en variables (\vec{x}, \vec{v}) et en intégrant dans l'espace des vitesses. Il y a cependant une façon plus simple de procéder :

Considérons un tube de champ magnétique (figure VI-4), borné par les lignes de champ $\lambda(x,y) = \pm\lambda_0$, telles que $C\lambda_0 \ll 1$. La densité n y dépend pratiquement pas de Y . A l'abscisse x_1 , le nombre $dn(x_1)$ de particules dont le moment magnétique et la composante de l'impulsion le long de Z valent respectivement M et P (à dM et dP près), peut s'écrire :

$$dn(x_1) = n_1 F(M,P) dM dP$$

Comme les centres guides suivent les lignes du champ magnétique, le flux de ces particules se conserve dans le tube de force jusqu'au point miroir :

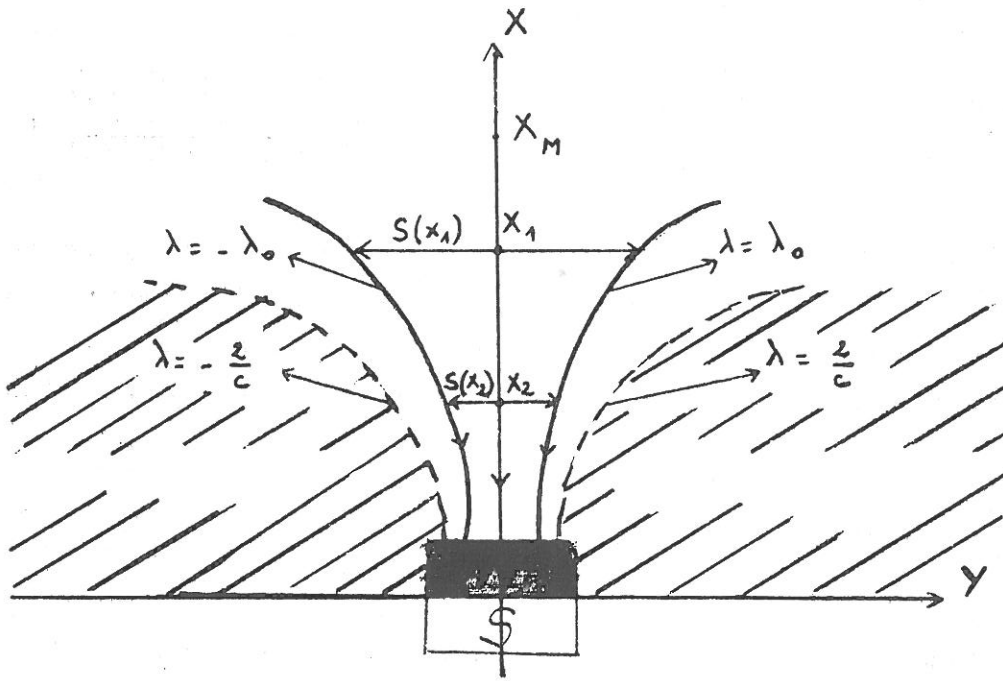
$$dn(x_1) v_{\parallel}(x_1) S(x_1) = dn(x_2) v_{\parallel}(x_2) S(x_2)$$

où S désigne la section du tube de force à l'abscisse x . La densité en x_2 s'écrit donc :

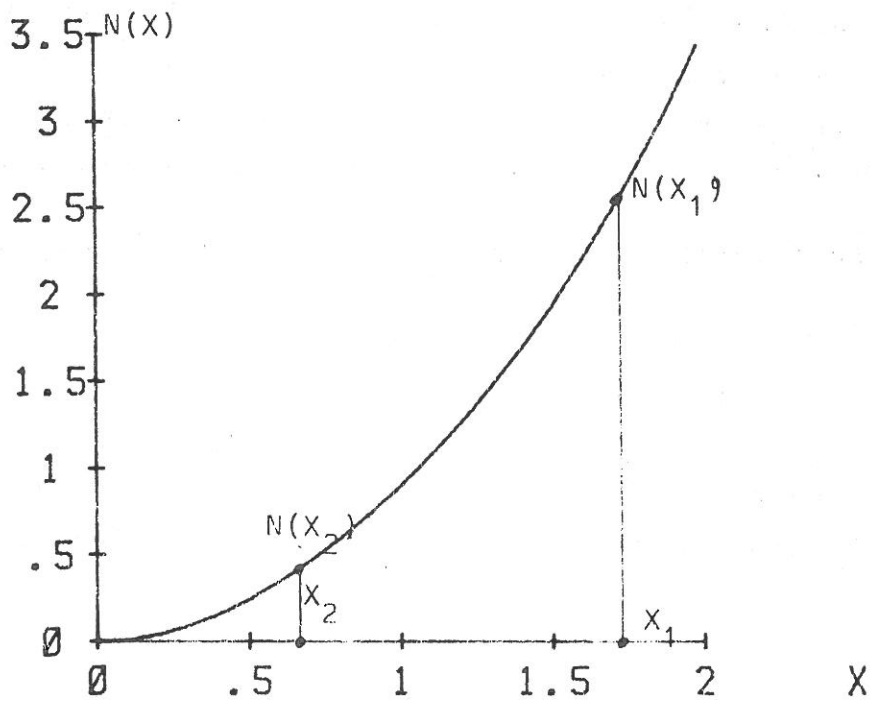
$$n(x_2) = \int_{\mathcal{D}(x_2)} n_1 F(M,P) \frac{v_{\parallel}(x_1)}{v_{\parallel}(x_2)} \frac{S(x_1)}{S(x_2)} dM dP \quad [\text{VI.13}]$$

Le domaine d'intégration contient toutes les particules qui peuvent parvenir jusqu'à l'abscisse x_2 (figure VI-2)*. Expliquons l'intégrale :

*Remarquons l'analogie existant entre [VI.13] et [V.3] : la contribution d'une particule à la densité en x_2 est proportionnelle au temps passé au voisinage de x_2 .



FigureVI-4: Tube de force utilisé pour le calcul de la densité.



FigureVI-5: Variation du nombre de primaires présents à l'abscisse X

$$n(x_2) = n_1 \frac{S(x_1)}{S(x_2)} \frac{b(X_G)}{4} \int_0^{1/b(x_2)} \frac{dM}{\sqrt{1-Mb(X_G)}} \frac{\sqrt{1-Mb(X_1)}}{\sqrt{1-Mb(X_2)}} \quad [\text{VI.14}]$$

Pour simplifier, nous allons supposer X_1 et X_G confondus : cela revient à supposer que le point 1 est suffisamment éloigné des aimants pour que la distribution des particules y soit isotrope et uniforme. L'intégration est alors élémentaire et l'on obtient :

$$n(x_2) = \frac{n_1}{2} \frac{S(X_1)}{S(X_2)} \frac{b(X_1)}{b(X_2)}$$

Comme la fonction de distribution a été supposée isotrope et uniforme en X_1 , $\frac{n_1}{2}$ est la densité des particules qui se dirigent vers les aimants, en X_1 . Finalement

$$\frac{n(x_2)}{n(x_1)} = \frac{S(X_1)}{S(X_2)} \frac{b(X_1)}{b(X_2)} \quad [\text{VI.15}]$$

Le deuxième membre comporte deux termes : le premier traduit la diminution du volume accessible aux particules et conduit à une augmentation de la densité. Le deuxième traduit la perte des particules par réflexion dans le champ magnétique. Il conduit à une diminution de la densité. Evaluons l'expression [VI.15] :

La frontière du tube de force a pour équation :

$$\frac{\text{Ch } X \sin Y}{\text{Ch}^2 X - \cos^2 Y} = \lambda_0 \quad [\text{VI.16}]$$

Développons $\sin Y$ et $\cos Y$ à l'ordre 1 au voisinage de $Y = 0$. L'équation approchée de la ligne de champ λ_0 est alors :

$$Y \approx \lambda_0 \frac{\text{sh}^2 X}{\text{Ch } X} \quad [\text{VI.17}]$$

$$\text{or } b(X) \approx \frac{\text{ch } X}{\text{sh}^2 X} \quad [\text{III.19}]$$

A l'ordre 1, et compte tenu des approximations effectuées, les variations du volume accessible et du module du champ se

compensent pour donner :

$$\frac{n(x_2)}{n(x_1)} \sim 1 . \quad [\text{VI.18}]$$

On aboutit donc au résultat suivant : si l'approximation adiabatique est vérifiée, la densité des électrons primaires est pratiquement constante dans un cusp*. La perte des particules par réflexion est compensée par la diminution du volume accessible.

Nous pouvons nous faire l'image suivante : les particules suivent les lignes de champ. Comme celles-ci se resserrent, la densité devrait augmenter. En fait, elle reste constante à cause de l'effet miroir.

Par contre, le nombre N de particules qui se trouvent dans une tranche d'abscisse x diminue de façon monotone (figure VI-5).

$$\frac{N(x_2)}{N(x_1)} = \frac{n(x_2)S(x_2)}{n(x_1)S(x_1)} \sim \frac{b(x_1)}{b(x_2)} \quad [\text{VI.19}]$$

*En fait la démonstration qui aboutit à [VI.18] est inutile : [VI.15] est le rapport des flux du champ magnétique dans un tube de force en x_1 et en x_2 . Ce rapport est évidemment égal à 1.

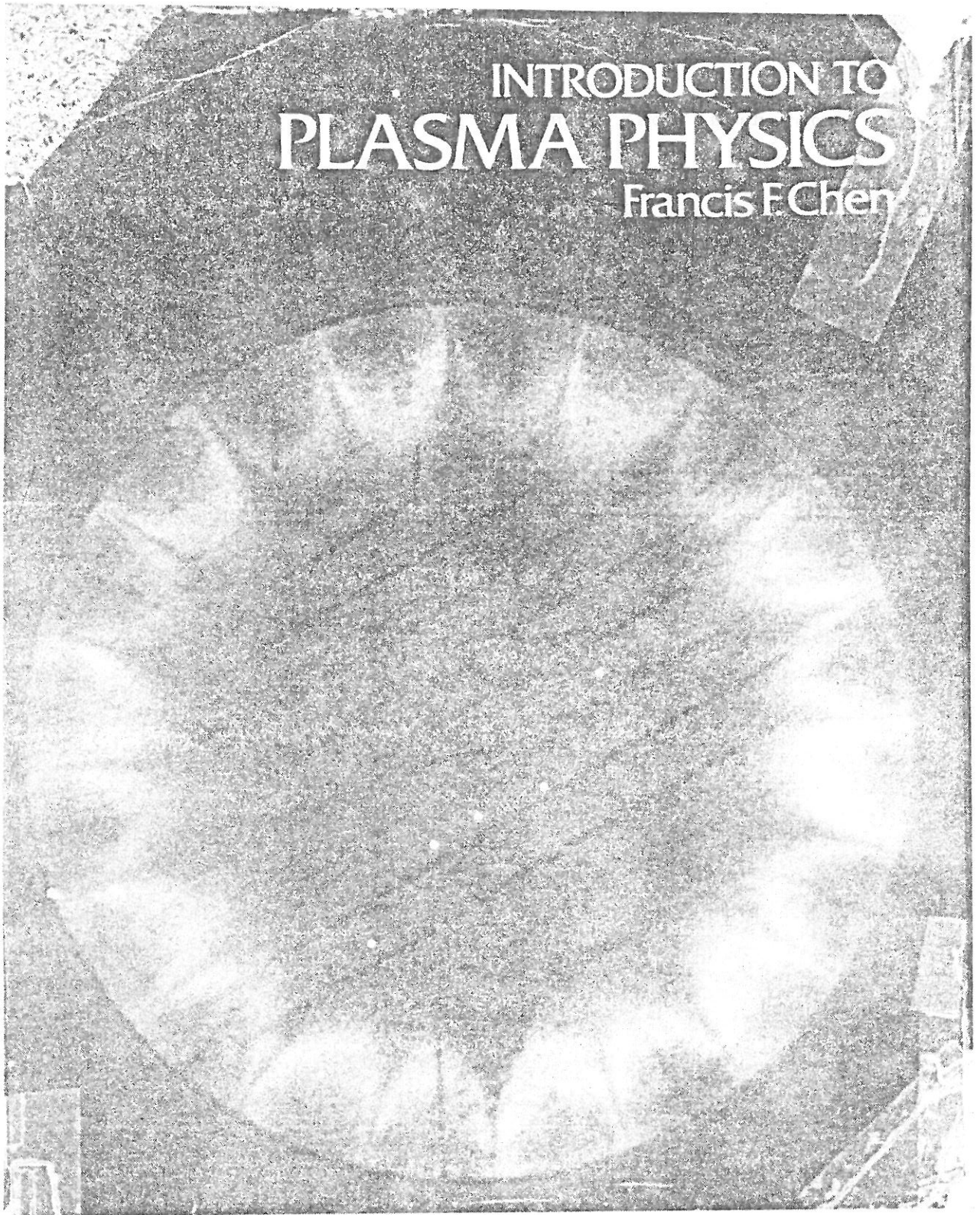


Figure VI-6: Photographie d'une décharge multipolaire (coupe transverse). Couverture du livre: "Introduction to plasma physics", Chen, Plenum (1974).

VI.5. CONCLUSION

Au chapitre II nous avons montré que les profils de densité des plasmas multipolaires pouvaient être expliqués à condition d'admettre que les électrons primaires se concentrent au voisinage de parois. Or nous avons abouti au résultat inverse : il y a moins d'électrons primaires près des parois à cause de l'effet miroir (figure V-10). Comment surmonter cette difficulté ?

Remarquons tout d'abord que les chapitres IV, V et VI concernent exclusivement les particules libres d'atteindre les régions de champ magnétique faible. Il n'y a jamais été fait mention des électrons piégés. Par conséquent, les fortes populations d'électrons primaires que nous cherchons sont composées de particules piégées. Cette affirmation est corroborée par la figure V-6. On y voit l'émission par une décharge multipolaire, d'une raie de l'azote qui ne peut être excitée que par des électrons primaires. On y voit nettement que l'émission est plus intense au voisinage des parois, dans des régions en forme de croissant qui coïncident avec les zones permises aux particules piégées (figure III-7).

Dans la suite de ce travail, nous nous proposons d'étudier d'une part les différents facteurs qui conduisent à des populations d'électrons élevées dans les pièges et d'autre part les mécanismes de piégeage possibles.

* *
*

PLAN DU CHAPITRE VII

ETUDE DU PIEGEAGE DES ELECTRONS PRIMAIRES DANS LE CHAMP MULTIPOLAIRE

VII.1.	<u>INTRODUCTION</u>	152
VII.2.	<u>MECANISME DE LIBERATION DES PARTICULES</u>	153
VII.3.	<u>EFFET DES COLLISIONS SUR LES PARTICULES PRESENTES</u> <u>DANS LE MILIEU</u>	155
VII.4.	<u>EFFETS DE BORDS DU CHAMP MAGNETIQUE</u>	157
VII.5.	<u>EVALUATION DE LA DENSITE DES PARTICULES PIEGEES</u>	158
VII.6.	<u>FREINAGE COULOMBIEN</u>	159
VII.7.	<u>UNE SOLUTION POSSIBLE</u>	165
VII.8.	<u>ETUDE THEORIQUE DE L'INSTABILITE ACOUSTIQUE IONIQUE</u> <u>PRESENTE DANS LA GAINÉ MAGNETIQUE</u>	169
	VII.8.A. Etude qualitative.....	169
	VII.8.B. Etude quantitative.....	171
VII.9.	<u>CONCLUSION</u>	179
	LISTE DES SYMBOLES UTILISES DANS LE CHAPITRE VII.....	180

CHAPITRE VII

PIEGEAGE DES ELECTRONS PRIMAIRES DANS LE CHAMP MULTIPOLAIRE

VII.1. INTRODUCTION

Pour qu'une particule issue du plasma se trouve piégée dans les régions de fort champ magnétique, il faut qu'il y ait violation des invariants du mouvement P_z et E (§ III.5).

Le problème de l'origine des ceintures de radiations présentes au voisinage de la terre se pose dans les mêmes termes : les ceintures de Van Allen sont constituées de particules émises par le soleil et piégées par le champ du dipôle terrestre. On n'a pas encore trouvé de solution satisfaisante à ce problème.

Dans le présent chapitre, nous envisageons successivement deux types de processus conduisant à une violation des invariants et au piégeage des électrons primaires dans le champ multipolaire

D'abord des variations stochastiques de P_z et E dues à des phénomènes collisionnels ; ensuite une variation continue de ces grandeurs due aux champs électriques présents dans le plasma.

La population des particules du piège multipolaire résulte d'un bilan entre un mécanisme d'alimentation et un mécanisme de disparition. Commençons par ce dernier.

VII.2. MECANISME DE LIBERATION DES PARTICULES

Rodionov (16) a étudié expérimentalement la durée de vie de particules chargées dans un piège adiabatique. A très basse pression, ses particules effectuaient plusieurs milliers d'allers-retours entre les miroirs magnétiques avant que les invariants adiabatiques aient suffisamment changé pour les libérer. A plus haute pression, la durée de vie des particules dans le piège était inversement proportionnelle à la densité des atomes neutres présents.

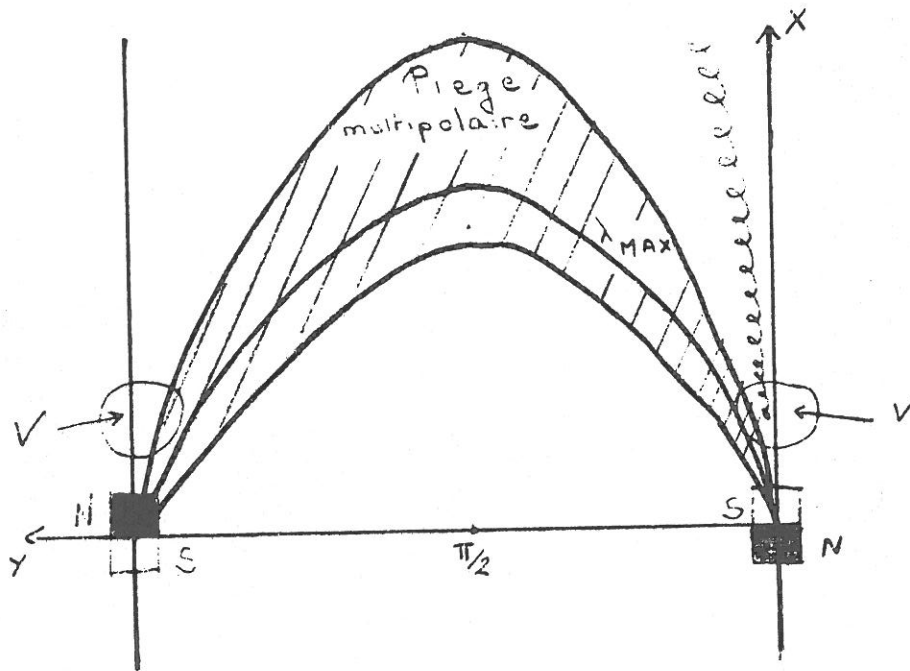
Dans notre cas, le piégeage est lié aux invariants du mouvement et non pas aux invariants adiabatiques, mais la situation est analogue à celle décrite par Rodionov à haute pression. Nous pensons donc que la population des électrons primaires dans le piège multipolaire est limitée par les collisions sur les neutres.

L'Appendice A montre que la fréquence des collisions élastiques est supérieure à celle des collisions ionisantes :

$$\frac{\nu_{el}}{\nu_{in}} \approx 3$$

Cependant, si chaque collision ionisante entraîne la disparition d'une particule du piège, le dépiégeage par collision élastique n'est pas aussi efficace. Les évaluations de l'appendice E montrent qu'environ une collision élastique sur 6 au plus conduit à la libération d'une particule.

Dans la suite, nous négligerons cette libération par collisions élastiques pour ne considérer que la disparition des électrons primaires par ionisation d'un atome neutre.



FigureVII-1: Piégeage d'un électron primaire par collisions élastiques.

VII.3. EFFET DES COLLISIONS SUR LES PARTICULES PRESENTES DANS LE MILIEU

L'examen des libres parcours moyens (appendice A) montre que les collisions élastiques primaires-neutres dominent les autres phénomènes de transfert de quantité de mouvement.

Revenons aux coordonnées réduites du § III.3. Une particule est piégée lorsque

$$|P| \equiv |V_Z - C\lambda(X,Y)| > 1 \quad [\text{III.23}]$$

Les collisions élastiques conduisent à une variation brutale de V_Z et donc à une variation de P . Après un choc élastique, toutes les valeurs de V_Z comprises entre -1 et 1 sont équiprobables. L'inégalité [III.23] sera d'autant mieux satisfaite que $|\lambda(X,Y)|$ sera grand. La probabilité de piégeage est donc maximale lorsque le choc a lieu près de la zone interdite. Ce type de piégeage se produit donc surtout dans les cusps.

Nous allons chercher à obtenir une borne supérieure pour la population des particules du piège avec les hypothèses suivantes :

- Le piégeage a lieu dans un petit volume V intérieur au cusp
- Toute collision élastique conduit au piégeage d'une particule (ce qui est manifestement excessif !)
- Les particules restent dans le piège jusqu'à leur disparition par collision sur un atome neutre (cf. § VII.2).

Dans ces conditions, l'évolution de la population N des particules du piège s'écrit :

$$\frac{dN}{dt} \approx v^{el} n_p (2V) - v^{in} N \quad [\text{VII.1}]$$

où n_p désigne la densité moyenne des électrons primaires hors des

pièges. Le facteur 2 vient de ce qu'il existe deux régions où les particules sont susceptibles d'être piégées (figure VII-1).

Nous attirons l'attention sur le fait que la population des particules du piège n'est pas décrite par une équation de diffusion où le flux de particules serait proportionnel au gradient de densité. En effet, le libre parcours moyen des collisions élastiques est supérieur aux dimensions du piège. A l'équilibre, l'équation [VII.1] devient :

$$N \approx n_p \frac{v^{el}}{v^{in}} 2V$$

En divisant les deux membres par \mathcal{V} , le volume du piège, nous obtenons la densité n des particules piégées :

$$n \approx n_p \frac{v^{el}}{v^{in}} \frac{2V}{\mathcal{V}} \quad \text{[VII.2]}$$

Nous avons vu que $v^{el}/v^{in} \approx 3$. Comme le volume où a lieu le piégeage est nettement plus petit que le volume du piège, [VII.2] montre que n ne peut en aucun cas dépasser n_p . Les collisions élastiques entraînent au plus une égalisation de la densité des primaires de part et d'autre de la frontière de la zone interdite.

VII.4. EFFETS DE BORDS DU CHAMP MAGNETIQUE

Tout au long de ce travail, nous avons supposé que le champ magnétique est invariant par translation le long de Oz. Dans la réalité, l'enceinte est un cylindre de hauteur finie et cette hypothèse est inexacte au voisinage des extrémités. On peut donc imaginer que les pièges multipolaires sont alimentés par les extrémités, là où l'invariance de P_z n'est pas assurée.

Cependant, il n'en est rien car l'examen des figures III-10 et III-12 montre que la dérive des particules le long de OZ est limitée : la distance parcourue le long des barreaux aimantés est d'environ 10 cm sur ces figures, pour une distance totale de 1 m, équivalente au libre parcours moyen des collisions ionisantes à 10^{-3} Torr pour de l'argon. A 10^{-4} Torr, la distance parcourue le long de OZ par ces particules serait donc d'environ 1 m. Certains auteurs ont travaillé avec des multipôles très allongés (la longueur de l'enceinte de Wong (17), par exemple, est de 4 m). Dans ces dispositifs les particules piégées aux extrémités n'auraient donc pas le temps d'arriver jusqu'au milieu de l'enceinte. Or aucun auteur n'a rapporté un manque d'uniformité du plasma au milieu du dispositif.

De plus, pour limiter les pertes d'électrons primaires, on s'arrange pour que le champ magnétique se referme aux extrémités sans discontinuité, avec un rayon de courbure que l'on peut estimer supérieur au rayon de Larmor des primaires. Par conséquent, les raisonnements du § III.5 concernant les zones interdites restent qualitativement valables.

VII.5. EVALUATION DE LA DENSITE DES PARTICULES PIEGEES

Au § VII.3 nous avons montré qu'aucun mécanisme d'alimentation des pièges proportionnel à la densité des particules, (c'est-à-dire aucun mécanisme collisionnel), ne pouvait conduire à une augmentation de la densité des électrons primaires dans les zones interdites.

Supposons maintenant l'existence d'un mécanisme unidirectionnel qui entraîne le piégeage d'une fraction f du flux des électrons primaires incidents. L'équation d'équilibre de la population N du piège est alors :

$$\frac{dN}{dt} \approx - Nv^{in} + f4\pi R^2 n_p v \quad [\text{VII.3}]$$

où v désigne le module de la vitesse des primaires et $4\pi R^2$ la surface d'une enceinte cylindrique de hauteur égale au rayon (il s'agit d'une évaluation, seuls les ordres de grandeur nous intéressent).

A l'équilibre, on obtient :

$$N \approx f \frac{n_p v}{v^{in}} \cdot 4\pi R^2 \quad [\text{VII.4}]$$

Soit ΔR l'épaisseur du piège multipolaire (son volume est alors $4\pi R^2 \Delta R$). La densité des particules piégées est alors :

$$n = n_p f \frac{\lambda}{\Delta R} \quad [\text{VII.5}]$$

où λ désigne le libre parcours moyen des collisions ionisantes. A basse pression ($P_0 \lesssim 10^{-4}$ Torr), λ est supérieur à 10 m (Appendice A). Comme ΔR n'excède pas quelques centimètres on conçoit que le rapport n/n_p puisse être supérieur à un si f atteint quelques pour cent.

VII.6. FREINAGE COULOMBIEN DES ELECTRONS PRIMAIRES

Isolons par la pensée un électron primaire et suivons le au cours de son mouvement à travers le plasma multipolaire. Le champ de cet électron induit des déplacements de charges au sein du plasma et l'on observe l'apparition d'un champ électrique induit qui va freiner notre électron primaire :

$$v \cdot \frac{dE}{dS} = - e \vec{E}_{\text{ind}}(\vec{v}t, t) \cdot \vec{v} \quad [\text{VII.6}]$$

où $\frac{dE}{dS}$ désigne la perte d'énergie par unité de longueur le long de la trajectoire (pouvoir d'arrêt) et \vec{v} la vitesse de l'électron primaire.

Si le champ de celui-ci peut être traité comme une perturbation, on sait calculer le pouvoir d'arrêt en considérant le plasma comme un milieu continu caractérisé par un tenseur diélectrique $\vec{\epsilon}(\vec{k}, \omega)$ (18).

Dans le cas d'un plasma non magnétisé, $\vec{\epsilon}$ est diagonal et peut être décomposé en une partie transverse et une partie longitudinale, $\epsilon_{\ell}(k, \omega)$ et l'expression du pouvoir d'arrêt est alors simplement (19) :

$$\frac{dE}{dS} = \frac{e^2}{4\pi^2 v^2 \epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} \int_{-\vec{k} \cdot \vec{v}}^{\vec{k} \cdot \vec{v}} \omega d\omega \text{Im} \frac{1}{\epsilon_{\ell}(k, \omega)} \quad [\text{VII.7}]$$

Cette expression ne prend pas en compte le freinage par rayonnement transverse (bremse-strahlung) qui est plus faible d'un facteur v^2/c^2 .

Le calcul de l'intégrale de l'équation précédente a fait l'objet de nombreux travaux (19) et fait appel à des techniques sophistiquées. Cependant, si l'on néglige la contribution des ions et des électrons liés, et si l'on ne cherche pas à rendre compte de façon détaillée de l'écrantage du champ

perturbateur à longue distance ainsi que des collisions proches, le calcul du pouvoir d'arrêt est très simple et a pour résultat :

$$\frac{dE}{dS} = - \omega_p^2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\text{Log } \Lambda}{v^2} \quad [\text{VII.8}]$$

où ω_p désigne la fréquence plasma électronique et $\text{Log } \Lambda$, le logarithme coulombien défini dans l'appendice A*. Ce résultat est valable si la vitesse des électrons primaires est supérieure à la vitesse thermique du plasma, il signifie que l'énergie de la particule test est absorbée par un mode collectif : l'onde plasma électronique.

Dans le cas d'un plasma magnétisé, l'équation [VII.7] n'est plus valable car $\vec{\epsilon}$ n'est plus diagonal. Le problème a été résolu par May (20). Il dépend de deux paramètres sans dimension dont l'expression et la valeur dans le cas qui nous intéresse sont :

$$x \equiv \left(\frac{mv^2}{2KT_e} \right)^{1/2} \approx 3 \quad [\text{VII.9}]$$

$$\eta \equiv \frac{\omega_b^0}{\omega_p} \approx 0,3$$

Avec les notations de May, x mesure la vitesse des électrons primaires incidents et η l'intensité du champ magnétique (ω_b^0 est la pulsation de Larmor au col et η a été calculé avec $n_e \approx 10^{11} \text{ cm}^{-3}$).

Pour ces valeurs de x et η , les résultats de May (20) montrent que le pouvoir d'arrêt est donné par [VII.8] avec une bonne approximation et que la perte d'énergie se fait de manière sensiblement isotrope. Evaluons son ordre de grandeur. Pour des électrons primaires de 50 eV, le logarithme coulombien vaut :

$$\text{Log } \Lambda \approx 15$$

Et l'on obtient, avec $n_e \approx 10^{11} \text{ cm}^{-3}$:

$$\frac{dE}{dS} \equiv A \approx 0,4 \text{ eV/m} \quad [\text{VII.10}]$$

*il s'agit du logarithme coulombien des électrons primaires

Comme la gaine magnétique ne s'étend que sur quelques centimètres, l'effet du freinage coulombien y est extrêmement faible. Cependant, à des densités plus élevées la perte d'énergie devient plus importante (pour $n_e = 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ on obtient $A \approx 4 \text{ eV/m}$). Nous allons donc poursuivre et calculer la fraction des électrons primaires incidents qui sont piégés par ce processus. Reprenons les coordonnées réduites habituelles : [VII.10] s'écrit alors, en tenant compte du fait que le module de la vitesse varie peu et en écrivant $S \approx v_0 t$:

$$\frac{dV^2}{dT} = \frac{A}{\frac{1}{2}mV_0^2} \frac{\ell}{\pi} \times \frac{\pi}{\ell} \frac{v_0}{\omega_b} V \quad [\text{VII.11}]$$

où v_0 désigne la vitesse initiale de la particule (lorsqu'elle atteint une région où le champ magnétique est non négligeable), ℓ est l'écartement des aimants et $V \equiv v/v_0$. [VII.11] s'écrit simplement :

$$\frac{dV^2}{dT} = - \frac{\alpha}{C} \quad [\text{VII.12}]$$

où C est donné par [III.12] et α est une constante sans dimensions qui a pour expression ($n_e \approx 10^{11} \text{ cm}^{-3}$) :

$$\alpha \equiv \frac{A}{\frac{1}{2}mV_0^2} \frac{\ell}{\pi} = 1,5 \cdot 10^{-4} \quad [\text{VII.13}]$$

Un électron primaire est piégé lorsque le critère [III.24] est satisfait :

$$\beta \equiv \frac{P^2}{V^2} > 1 \quad [\text{VII.14}]$$

Evaluons la variation de β sous l'influence du freinage coulombien entre le moment où la particule pénètre dans la gaine magnétique et le moment où elle en sort. Nous nous plaçons dans les conditions de la théorie adiabatique. Il existe alors deux échelles de temps : une échelle lente qui décrit les variations de la composante de \vec{v} parallèle à \vec{B} (cette composante est prati-

quement confondue avec V_X dans le cusp), et une échelle rapide qui décrit le mouvement de rotation de la particule autour de la ligne de champ suivie par le centre guide.

L'impulsion P n'est plus un invariant : en effet, d'une part il existe une force de freinage le long de OZ et d'autre part, la trajectoire est perturbée. Si nous négligeons cette perturbation, il vient :

$$\frac{d}{dT} P^2 \approx \left(\frac{d}{dT} V_Z^2 \right)_{\text{Coulomb}} - 2C\lambda(X,Y) \left(\frac{d}{dT} V_Z \right)_{\text{Coulomb}} \quad [\text{VII.15}]$$

Moyennons cette expression sur l'échelle de temps rapide :

$$\left\langle \frac{d}{dT} P^2 \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dT} V_Z^2 \right\rangle \quad [\text{VII.16}]$$

Le freinage coulombien étant pratiquement isotrope dans les conditions qui nous intéressent (cf. ci-dessus la discussion des résultats de May), de [VII.12] nous déduisons :

$$\left\langle \frac{d}{dT} P^2 \right\rangle \approx - \frac{\alpha}{3C} \quad [\text{VII.17}]$$

La variation du critère de piégeage [VII.14] s'écrit (le point désigne une différentiation par rapport au temps) :

$$\dot{\beta} = \beta \left[\frac{1}{P^2} \left\langle \frac{d}{dT} P^2 \right\rangle - \frac{1}{V^2} \frac{dV^2}{dT} \right] \quad [\text{VII.18}]$$

En utilisant [VII.17] on obtient :

$$\dot{\beta} = \beta \frac{\alpha}{C} \left[\frac{1}{V^2} - \frac{1}{3P^2} \right] \quad [\text{VII.19}]$$

L'effet du freinage coulombien étant très faible, $V \approx 1$ et seules les particules d'impulsion initiale (P_0^2) voisine de 1 pourront être piégées. Intégrons [VII.19] en ne gardant que les termes linéaires en T :

$$\beta(T) - \beta_0 \approx \frac{2}{3} \alpha \frac{T - T_0}{C} \quad [\text{VII.20}]$$

où l'indice "o" indique le moment où la particule pénètre dans la gaine magnétique, c'est-à-dire le moment où la décomposition du mouvement sur les deux échelles de temps devient possible. Les particules piégées à l'instant T sont celles qui à l'instant initial vérifiaient la condition :

$$1 - \Delta P < |P^o| < 1 \quad \text{[VII.21]}$$

avec :

$$\Delta P \approx \frac{2}{3} \alpha \frac{T - T_o}{C} \quad \text{[VII.22]}$$

Il nous reste à évaluer la fraction des particules incidentes qui remplissent cette condition. On trouvera dans l'appendice F le problème posé à l'aide de la fonction de distribution. Nous nous contenterons ici d'une évaluation grossière : nous supposerons les particules distribuées uniformément entre -l et l dans l'espace des P. Dans ces conditions, la fraction du flux piégé est alors simplement :

$$f \approx \Delta P \approx \frac{2}{3} \alpha \frac{T - T_o}{C}$$

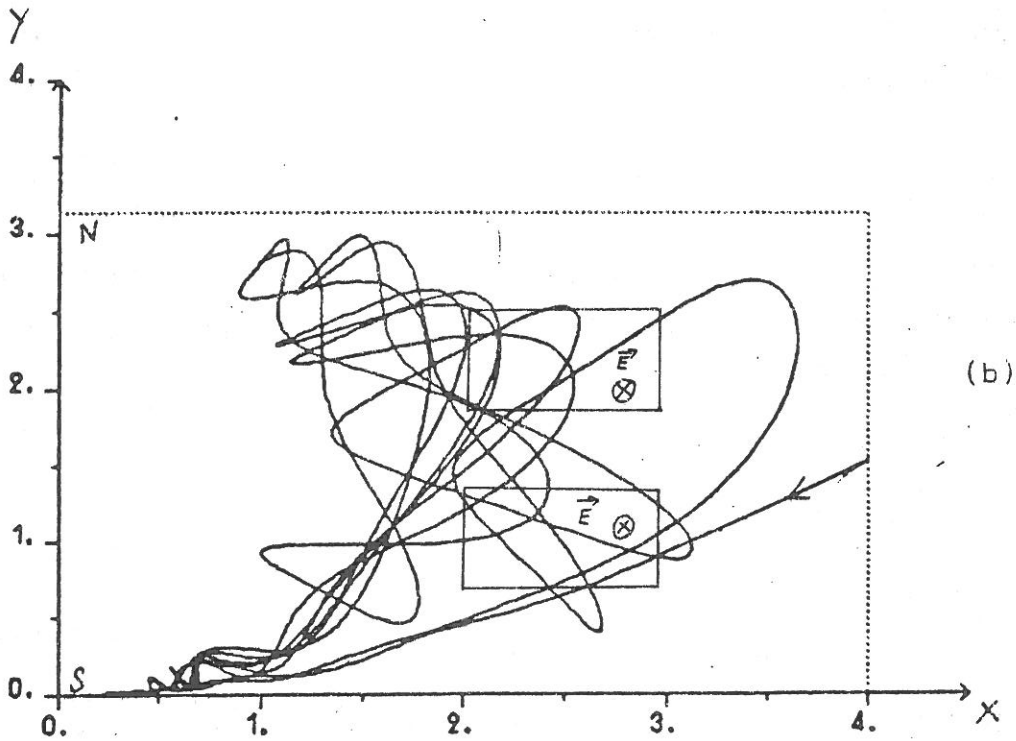
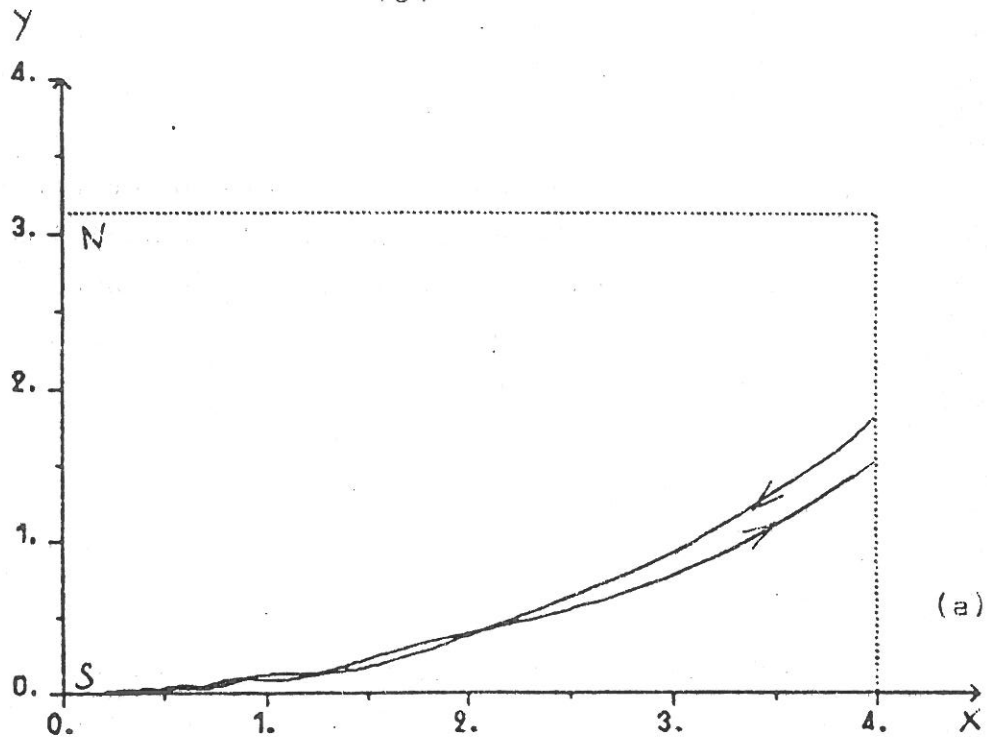
L'approximation adiabatique commence à être vérifiée pour $X \gtrsim 2$. Le temps passé par une particule dans cette région peut être évalué comme au § VI.2 :

$$T - T_o \approx 2C$$

Par conséquent :

$$f \approx \frac{4}{3} \alpha \quad \text{[VII.23]}$$

Pour $n_e \approx 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ le freinage coulombien entraîne le piégeage d'environ une particule incidente sur mille. Ce phénomène ne conduit donc pas à une augmentation de la densité des électrons primaires au voisinage des parois (§ VII.5).



FigureVII-2:(a) Trajectoire d'un électron primaire en absence de champ électrique.
(b) Piégeage du même électron par un champ E_z présent dans les rectangles de la figure.

III.7. UNE SOLUTION POSSIBLE

Jusqu'à présent, nous avons négligé les champs électriques de charge d'espace du plasma. Ceux-ci sont situés dans le plan xOy et, mise à part une dérive supplémentaire le long de Oz , leur prise en compte ne change pas la nature des trajectoires. En particulier P_z reste un invariant et les particules ne peuvent donc pas être piégées.

Considérons maintenant l'effet d'un champ électrique constant parallèle à Oz , localisé dans une petite région au voisinage des parois ; pendant l'interaction avec ce champ, la particule va dériver vers la région initialement interdite et, éventuellement, y restera piégée.

Un tel évènement est montré sur les figures VII-2 a) et b). Sur la première de ces figures, il n'y a pas de champ électrique. On y voit une particule arriver de l'infini, s'enrouler autour d'une ligne de champ, rebrousser chemin par effet miroir et repartir à l'infini. Sur la deuxième figure, on voit la même particule (mêmes conditions initiales) arriver de l'infini. Mais cette fois nous avons inclus dans le calcul un champ électrique localisé dans un rectangle, dirigé le long de Oz et de faible amplitude :

$$E_z \sim 10^{-2} vB_0$$

où v est la vitesse de la particule et B_0 la valeur du champ magnétique au col. Cette fois, la particule ne retourne pas à l'infini.

Nous avons là un mécanisme susceptible de piéger une fraction f du flux des particules incidentes. Evaluons l'intensité du champ électrique nécessaire pour que f soit de l'ordre de un pour cent :

Le champ électrique entraîne une variation ΔP_z de l'impulsion. Après l'interaction les particules piégées sont celles qui vérifient :

$$\frac{|P_z + P_z|}{mv} > 1 . \quad [\text{VII.24}]$$

Appelons ℓ l'extension caractéristique du champ électrique dans le plan (x,y). ΔP_z peut être estimé comme :

$$\Delta P_z \approx e \frac{E_z \ell}{v} \quad [\text{VII.25}]$$

L'énergie cinétique (et donc le module de la vitesse v) est inchangée car le travail moyen effectué par le champ électrique pendant une période de Larmor, est nul. Ainsi les particules qui sont piégées sous l'effet du champ électrique sont celles qui vérifient la condition :

$$\left| 1 - \frac{eE_z \ell}{mv^2} \right| < \frac{|P_z|}{mv} < 1 \quad [\text{VII.26}]$$

Il reste à évaluer la fraction des particules incidentes qui vérifient cette condition. Le problème est posé en termes plus rigoureux dans l'appendice F ; nous supposons ici les particules distribuées uniformément entre $-mv$ et mv dans l'espace des impulsions. Si l'on admet, de plus, que toutes les particules atteignent la région où règne le champ électrique, la fraction du flux piégée est alors simplement :

$$f \approx \frac{eE_z \ell}{mv^2} \quad [\text{VII.27}]$$

Ainsi pour des électrons de 30 eV, $\ell \approx 2$ cm et $E_z = 30$ V/m on obtient une fraction de l'ordre de 1 %, suffisante pour que la densité des particules piégées soit supérieure à celle des particules libres (§ VII.5).

Les calculs précédents ont été effectués en supposant le champ électrique constant. Cependant, il ne peut pas y avoir de champs électriques de charge d'espace le long de l'axe z car le plasma est invariant par translation le long de cet axe. Les seuls

champs qui peuvent exister dans cette direction sont produits par des ondes. Soit ν la fréquence caractéristique de ces ondes et leur extension dans le plan (x,y). La condition pour qu'une particule de vitesse v subisse un effet cumulatif est :

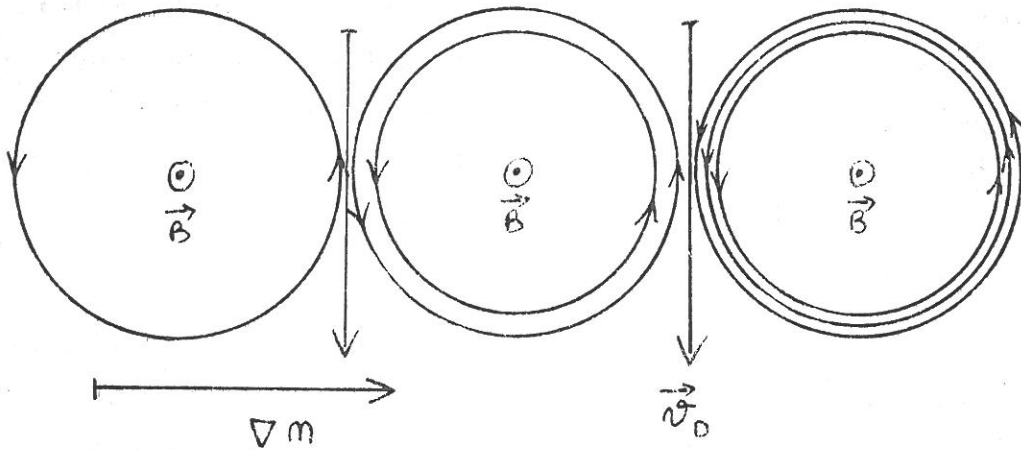
$$\frac{\ell}{v} \ll \nu^{-1} \quad [\text{VII.28}]$$

ce qui implique, avec $\ell \approx 1$ cm que la fréquence soit inférieure à $4 \cdot 10^8$ Hz. Ceci est nettement plus grand que les fréquences plasma ioniques typiques des plasmas multipolaires (Appendice A).

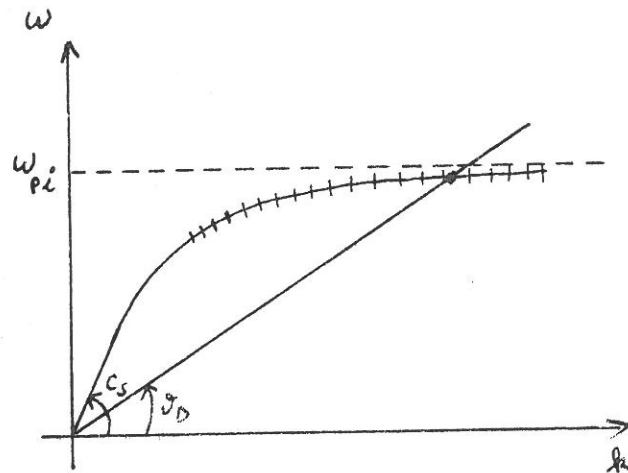
Ainsi, l'existence d'électrons primaires piégés entraînant une augmentation de l'ionisation dans la gaine magnétique semble possible s'il existe une instabilité de fréquence inférieure à la fréquence plasma ionique et dont le champ électrique est dirigé le long de Oz avec une intensité de l'ordre de 30 V/m, au voisinage des parois.

Remarque

Le mécanisme de piégeage envisagé ici ne permet pas d'obtenir des particules de P très supérieur à 1. Par conséquent, les trajectoires de ces particules sont non adiabatiques et analogues à celles des figures III-14 à III-16. Cependant, pendant leur séjour dans le piège, les électrons subissent quelques collisions élastiques. Dans l'appendice E, nous montrons d'une part que la variation de P au cours d'un tel choc peut être très importante (elle peut atteindre $|\Delta P| = 2$) et d'autre part qu'une particule initialement piégée a plus de chance de rester piégée après le choc que d'être libérée. On peut donc envisager que les collisions élastiques entraînent une dérive des particules vers les grandes valeurs de P et permettent l'établissement de trajectoires adiabatiques analogues aux trajectoires des figures III-10 à III-13.



FigureVII-3: La vitesse de dérive diamagnétique. Le nombre de particules augmente de la gauche vers la droite.



FigureVII-4: Diagramme de dispersion des ondes acoustiques ioniques. La partie hachurée de la courbe correspond aux régions où les ondes sont fortement amorties par effet Landau.

VII.8. ETUDE THEORIQUE DE L'INSTABILITE ACOUSTIQUE IONIQUE PRESENTE DANS LA GAINE MAGNETIQUE

Nous avons exploré la gaine magnétique, à la recherche de champs électriques satisfaisant les conditions du § VII.7 et nous y avons trouvé une instabilité acoustique ionique. Nous décrirons les résultats expérimentaux au chapitre suivant. Dans ce paragraphe, nous nous proposons de montrer l'origine de cette instabilité.

VII.8.A. ETUDE QUALITATIVE

L'instabilité peut être identifiée comme une instabilité acoustique ionique engendrée par la vitesse de dérive diamagnétique des électrons du plasma (v_D) :

L'équation de conservation de la quantité de mouvement des électrons s'écrit (9) :

$$m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = - n_e e (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) - K T_e \nabla n_e$$

En régime permanent et en l'absence de champ électrique on obtient (on suppose \vec{B} orthogonal à ∇n) :

$$\vec{v}_e = \vec{v}_D \equiv - \frac{K T_e}{e B^2} \frac{\vec{B} \times \nabla n_e}{n_e} \quad [\text{VII.29}]$$

L'interprétation physique de cette dérive est très simple : lorsqu'il y a un gradient de densité, la contribution à la vitesse macroscopique des orbites cyclotroniques du côté haute densité n'est pas compensée par la contribution du côté basse densité (figure VII-3). Il en résulte une vitesse de dérive macroscopique des électrons et donc un courant.

Cette dérive des électrons par rapport aux ions est susceptible de déclencher une instabilité de type acoustique ionique. En effet, la dérive diamagnétique entraîne une perturbation

électrostatique qui se déplace avec la vitesse \vec{v}_D et dont le spectre contient des composantes de Fourier de vitesse de phase $\omega/k = v_D$. Cette perturbation est source d'ondes acoustiques ioniques. Adoptons la définition suivante :

$$c_s \equiv \sqrt{\frac{KT_e}{M}} \quad \text{[VII.30]}$$

Tant que v_D est inférieur à c_s , les ondes acoustiques ioniques sont fortement amorties par effet Landau (figure VII-4) mais dès que v_D devient égal ou supérieur à c_s , il y a transfert d'énergie du mouvement d'ensemble des électrons du plasma vers le mode acoustique ionique et l'instabilité peut croître. Ce phénomène est tout à fait analogue au freinage coulombien décrit au § VII.6, qui conduit au transfert de l'énergie cinétique des particules tests vers le mode plasma électronique lorsque la vitesse de celles-ci est supérieure à la vitesse thermique.

VII.8.B. ETUDE QUANTITATIVE

VII.8.B.a. Position du problème

Nous redonnons ici la théorie de Kadomtsev (21), en précisant les hypothèses et les intermédiaires du calcul.

Considérons un plasma inhomogène plongé dans un champ magnétique uniforme (figure VII-5). Nous cherchons des ondes qui se propagent perpendiculairement au champ magnétique et au gradient de densité.

Le problème est trop complexe pour être abordé par un calcul de physique statistique, nous allons donc faire des hypothèses simplificatrices.

Nous supposons d'abord les ions froids et non magnétisés. On peut donc les décrire par les équations macroscopiques (9) en champ magnétique nul :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n^i}{\partial t} + \nabla \cdot n^i \vec{v}^i = 0 \\ M \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}^i \cdot \nabla \right) \vec{v}^i = e \vec{E} \end{array} \right. \quad \text{[VII.31]}$$

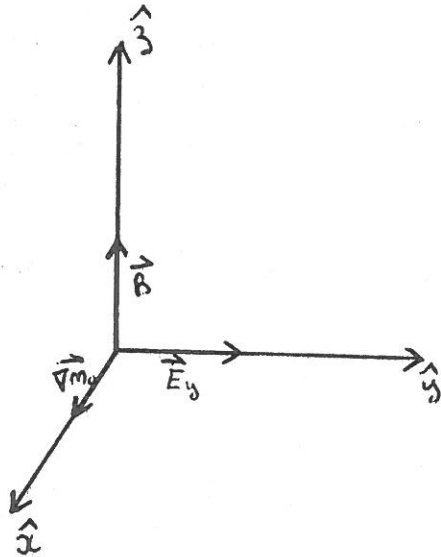
où n^i , M , e désignent respectivement la densité, la masse et la charge des ions. \vec{E} est le champ électrique de l'instabilité que nous cherchons.

Les électrons sont décrits par l'équation de Vlassof :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} - \frac{e}{m_e} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad \text{[VII.32]}$$

où f désigne la fonction de distribution électronique. Notre deuxième hypothèse est que les électrons sont fortement magnétisés : le mouvement thermique est seulement possible le long de Oz (figure VII-5).

Pour pouvoir linéariser les équations nous supposons que l'on peut décomposer toutes les grandeurs en un terme d'équilibre



FigureVII-5: Configuration utilisée pour le calcul de l'équation de dispersion de l'instabilité acoustique ionique.

d'ordre zéro (ou éventuellement nul) et un terme associé à la perturbation, d'ordre 1.

Nous allons travailler avec des composantes de Fourier de la forme :

$$e^{-j\omega t} e^{j\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad [\text{VII.33}]$$

où ω et \vec{k} désignent respectivement la pulsation et le vecteur d'onde de l'instabilité. La propagation étant perpendiculaire à ∇n et à \vec{B} , celui-ci a pour composantes :

$$\vec{k} \equiv (0, k_y, k_z)$$

avec :

$$k_z \ll k_y \quad [\text{VII.34}]$$

VII.8.B.b. Calcul de la perturbation de densité ionique

La densité et la vitesse des ions se mettent sous la forme :

$$n^i \equiv n_0 + n_1^i$$

$$\vec{v}^i \equiv \vec{v}_1^i$$

Notons L la longueur de gradient :

$$L^{-1} = \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx} \quad [\text{VII.35}]$$

Les équations [VII.31] sont valables si les ions ne sont pas magnétisés ; c'est-à-dire si :

$$\omega \gg \Omega^i$$

$$r_L^i > L$$

[VII.36]

où Ω^i et r_L^i désignent respectivement la pulsation et le rayon de Larmor ionique.

Linéarisons les équations [VII.31]. Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1^i}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{v}_1^i &= 0 \\ M \frac{\partial \vec{v}_1^i}{\partial t} &= e \vec{E} = -e \nabla \varphi \end{aligned} \quad \text{[VII.37]}$$

où φ désigne le potentiel électrostatique de l'instabilité. La transformée de Fourier de [VII.37] donne alors immédiatement :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1^i &= \frac{e\varphi}{M\omega} \vec{k} \\ n_1^i &= \frac{n_0 e}{M\omega^2} k^2 \varphi \end{aligned} \quad \text{[VII.38]}$$

Pour simplifier nous avons gardé les mêmes notations pour les grandeurs et leur transformée de Fourier.

VII.8.B.c. Calcul de la perturbation de densité électronique

Les électrons sont fortement magnétisés : seul le mouvement le long de Oz est libre et leur rayon de Larmor est petit :

$$r_L^e \ll L \quad \text{[VII.39]}$$

En plus de la vitesse d'agitation thermique, il existe une vitesse de dérive $\vec{E} \times \vec{B}$ due au champ électrique de l'instabilité :

$$\vec{v}_E \equiv \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B} = \frac{E_y}{B} \hat{x} = -jk_y \frac{\varphi}{B} \hat{x} \quad \text{[VII.40]}$$

La variable \vec{v} de la fonction de distribution s'écrit donc :

$$\vec{v} = -jk_y \varphi / B \hat{x} + v_z \hat{z} \quad \text{[VII.41]}$$

Linéarisons [VII.32] en décomposant la fonction de distribution :

$$f(\vec{x}, \vec{v}) \equiv f_0(x, v_z) + f_1(t, x, y, z, v_z) \quad \text{[VII.42]}$$

Avec :

$$f_0(x, v_z) \equiv \frac{n_0(x)}{\sqrt{\pi} v_t} e^{-v_z^2/v_t^2} \quad [\text{VII.43}]$$

où v_t désigne la vitesse d'agitation thermique des électrons. Il vient :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_E \frac{\partial f_0}{\partial x} + v_z \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{e}{m_e} E_z \frac{\partial f_0}{\partial v_z} = 0 \quad [\text{VII.44}]$$

La transformée de Fourier Laplace de cette équation nous donne :

$$(-\omega + k_z v_z) f_1 + \frac{e}{m_e} \varphi k_z \frac{\partial f_0}{\partial v_z} - \frac{\varphi}{B} k_y \frac{\partial f_0}{\partial x} = 0 \quad [\text{VII.45}]$$

Comme dans [VII.38] nous avons gardé les mêmes notations pour les grandeurs associées à l'instabilité (f_1, ω) et leur transformée de Fourier. On en déduit :

$$f_1(\omega, k_y, k_z, x, v_z) = \frac{\varphi}{\omega - k_z v_z} \left[k_z \frac{e}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} - k_y \frac{1}{B} \frac{\partial f_0}{\partial x} \right] \quad [\text{VII.46}]$$

La perturbation de densité électronique associée à l'instabilité, n_1^e , est le premier moment de f_1 :

$$n_1^e \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(v_z) dv_z \quad [\text{VII.47}]$$

Ce qui s'écrit :

$$n_1^e = e\varphi \left[-\frac{1}{m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_0 / \partial v_z}{v_z - \omega/k_z} dv_z + \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx} \frac{k_y}{k_z} \frac{1}{M\Omega_i} \int \frac{f_0}{v_z - \omega/k_z} dv_z \right] [\text{VII.48}]$$

De [VII.43] on déduit :

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_z} = -\frac{m_e}{KT_e} f_0 v_z \quad [\text{VII.49}]$$

Ceci permet de simplifier [VII.48] :

$$n_1^e = \frac{e\varphi}{KT_e} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_z f_0 dv_z}{v_z - \omega/k_z} - \frac{\omega^*}{k_z} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0}{v_z - \omega/k_z} dv_z \right\} \quad [\text{VII.50}]$$

où nous avons posé :

$$\omega^* \equiv -k_y \frac{KT_e}{M\Omega_i} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx} \quad [\text{VII.51}]$$

ou encore ([VII.29]) :

$$\omega^* = k_y v_D \quad [\text{VII.52}]$$

Les intégrales de l'équation [VII.50] s'expriment à l'aide de la fonction tabulée par Fried et Conte (22) :

$$Z(y) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{x - y} \quad [\text{VII.53}]$$

Pour $y \ll 1$, cette fonction admet le développement :

$$Z(y) \approx \frac{4}{3} y^3 - 2y + j\sqrt{2\pi} e^{-y^2} \quad [\text{VII.54}]$$

et elle possède la propriété suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{-x^2}}{x - y} dx = 1 + yZ(y)$$

Ceci permet de simplifier [VII.50] et d'obtenir la perturbation de densité électronique sous la forme :

$$n_1^e = n_0 \frac{e\varphi}{KT_e} \left\{ 1 - \frac{\omega - \omega^*}{k_z v_t} Z\left(\frac{\omega}{k_z v_t}\right) \right\} \quad [\text{VII.55}]$$

VII.8.B.d. Equation de dispersion et taux de croissance de L'instabilité

L'équation de dispersion s'obtient en égalant les perturbations de densité ionique ([VII.38]) et électronique ([VII.55]) :

c'est la condition de quasi neutralité, valable pour des longueurs d'ondes supérieures à la longueur de Debye. Le résultat est :

$$1 - c_S^2 \frac{k^2}{\omega^2} + \frac{\omega - \omega^*}{k_z v_t} Z\left(\frac{\omega}{k_z v_t}\right) = 0 \quad [\text{VII.56}]$$

Nous cherchons une instabilité de type acoustique ionique dans une situation où les électrons sont plus chauds que les ions (Appendice A) :

$$v_{ti} < v_\phi < v_{te} \quad [\text{VII.57}]$$

L'argument de Z vérifie donc :

$$\frac{\omega}{k_z v_{te}} < 1$$

Le développement [VII.54] donne alors avec [VII.56] :

$$1 - \left(\frac{k c_S}{\omega}\right)^2 + j\sqrt{2\pi} \frac{\omega - \omega^*}{k_z v_{te}} e^{-\left(\omega/k_z v_{te}\right)^2} = 0 \quad [\text{VII.58}]$$

Cherchons une solution de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = \omega_0 + j\gamma \\ \gamma \ll \omega_0 \end{array} \right. \quad [\text{VII.59}]$$

On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = k c_S \\ \frac{\gamma}{\omega_0} = -\sqrt{2\pi} \frac{\omega_0 - \omega^*}{k_z v_{te}} e^{-\left(\omega_0/k_z v_{te}\right)^2} \end{array} \right. \quad [\text{VII.60}]$$

Il s'agit donc bien d'une onde de type acoustique ionique. L'instabilité est croissante si γ est positif, c'est-à-dire si :

$$\omega_0 < \omega^*$$

ou encore ([VII.34], [VII.52] et [VII.60]), si :

$$c_s < v_D \quad \text{[VII.61]}$$

L'instabilité est donc déclenchée lorsque la vitesse de dérive diamagnétique du plasma devient supérieure à la vitesse acoustique ionique, conformément au § VII.8.A.

Remarque : les hypothèses du modèle de Kadomtsev ne permettent pas de déterminer entièrement le problème car elles ne fixent pas la valeur de k_z : le taux de croissance γ est d'autant plus grand que k_z est petit ([VII.60]), mais si k_z est trop petit, l'inégalité [VII.57] n'est plus vérifiée. Il y a donc là une défaillance de la théorie. Dans la pratique k_z est fixé par l'inhomogénéité du champ magnétique qui limite la région de l'espace où la condition [VII.61] est remplie.

VII.9. CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons montré qu'un faible champ électrique le long de Oz pouvait entraîner le piégeage des électrons primaires en nombre suffisant pour que leur densité augmente au voisinage des parois et que ce champ électrique pouvait être dû à une instabilité de type acoustique ionique présente dans la gaine magnétique. Une remarque chronologique s'impose :

Nous avons longtemps tâtonné avec des champs E_x et E_y , analogues aux champs électriques de charge d'espace, sans succès, avant de nous résoudre à introduire un champ E_z dans notre programme de calcul des trajectoires. Le succès fut alors immédiat et devant les résultats numériques nous avons exploré la gaine magnétique de notre multipôle avec des sondes, à la recherche des champs réellement existants.

La description de cette expérience fait l'objet du chapitre suivant et c'est seulement ensuite que nous avons pu interpréter les signaux recueillis dans la gaine magnétique comme provenant d'une instabilité acoustique ionique.

* *
*

Liste des principaux symboles utilisés dans les expressions mathématiques du chapitre VII

ν^{el}	fréquence des collisions élastiques primaires-neutres
ν^{in}	fréquence des collisions ionisantes
P_z	composante z de l'impulsion généralisée
P	même grandeur, mais réduite
E	énergie cinétique
v_z	composante z de la vitesse
V_z	même grandeur, mais réduite
C	inverse du rayon de Larmor réduit au col (multiplié par deux)
N	nombre de particules piégées
n_p	densité moyenne des électrons primaires dans l'enceinte multipolaire
V	volume intérieur au cusp où ont lieu les collisions entraînant le piégeage
n	densité des électrons primaires piégés
R	rayon de l'enceinte multipolaire
ΔR	épaisseur du piège multipolaire
v	vitesse des électrons primaires
f	fraction du flux de primaires incidents sur la paroi qui est piégée
λ	libre parcours moyen d'ionisation
dS	élément de longueur le long d'une trajectoire
ω	pulsation
k	vecteur d'onde
$\vec{\epsilon}$ ϵ	tenseur diélectrique

ω_p	fréquence plasma électronique $\times 2\pi$
ω_b^0	double de la pulsation de Larmor au col
A	valeur du pouvoir d'arrêt
α	pouvoir d'arrêt réduit (sans dimensions)
n_e	densité électronique
l	écartement entre les aimants ou extension du champ E_z dans le plan (x,y)
v_0	vitesse initiale d'un électron primaire
V	vitesse réduite
β	critère de piégeage
ΔP	variation de l'impulsion réduite due au freinage coulombien
ΔP_z	variation de l'impulsion due au champ E_z
m	ou masse d'un électron
m_e	
\vec{v}_e	vitesse d'un électron du plasma
\vec{v}_D	vitesse de dérive diamagnétique du plasma
\vec{E}	champ électrique
ϕ	potentiel électrostatique
KT_e	énergie thermique des électrons du plasma
C_S	vitesse acoustique ionique
n^i	densité ionique
\vec{v}^i	vitesse ionique
M	masse d'un ion
L	longueur de gradient du plasma
Ω^i	pulsation de Larmor ionique caractéristique
r_L^i	rayon de Larmor ionique
r_L^e	rayon de Larmor électronique
v_E	vitesse de dérive $\vec{E} \times \vec{B}$
ω^*	pulsation liée à la vitesse de dérive diamagnétique ([VII.52])

v_{te} ou v_t vitesse thermique électronique
 v_{ti} vitesse thermique ionique
 v_φ vitesse de phase
 γ taux de croissance
 c vitesse de la lumière dans le vide

* *
*

PLAN DU CHAPITRE VIII

RESULTATS EXPERIMENTAUX

VIII.1.	<u>CONCENTRATIONS DES ELECTRONS PRIMAIRES AU VOISINAGE DES PAROIS : EVIDENCE EXPERIMENTALE.....</u>	185
VIII.2.	<u>INSTABILITE ACOUSTIQUE IONIQUE PRESENTE DANS LA GAINÉ MAGNETIQUE.....</u>	187
	VIII.2.A. Montage expérimental.....	187
	VIII.2.B. Signaux recueillis.....	189
	VIII.2.C. Topographie de l'instabilité.....	192
	VIII.2.D. Etude de la propagation de l'instabilité.....	196
	VIII.2.E. Interprétation des mesures.....	201
VIII.3.	<u>ETABLISSEMENT D'UN GRADIENT DE DENSITE AJUSTABLE EN REGIME NON COLLISIONNEL.....</u>	211

* *
*

CHAPITRE VIII

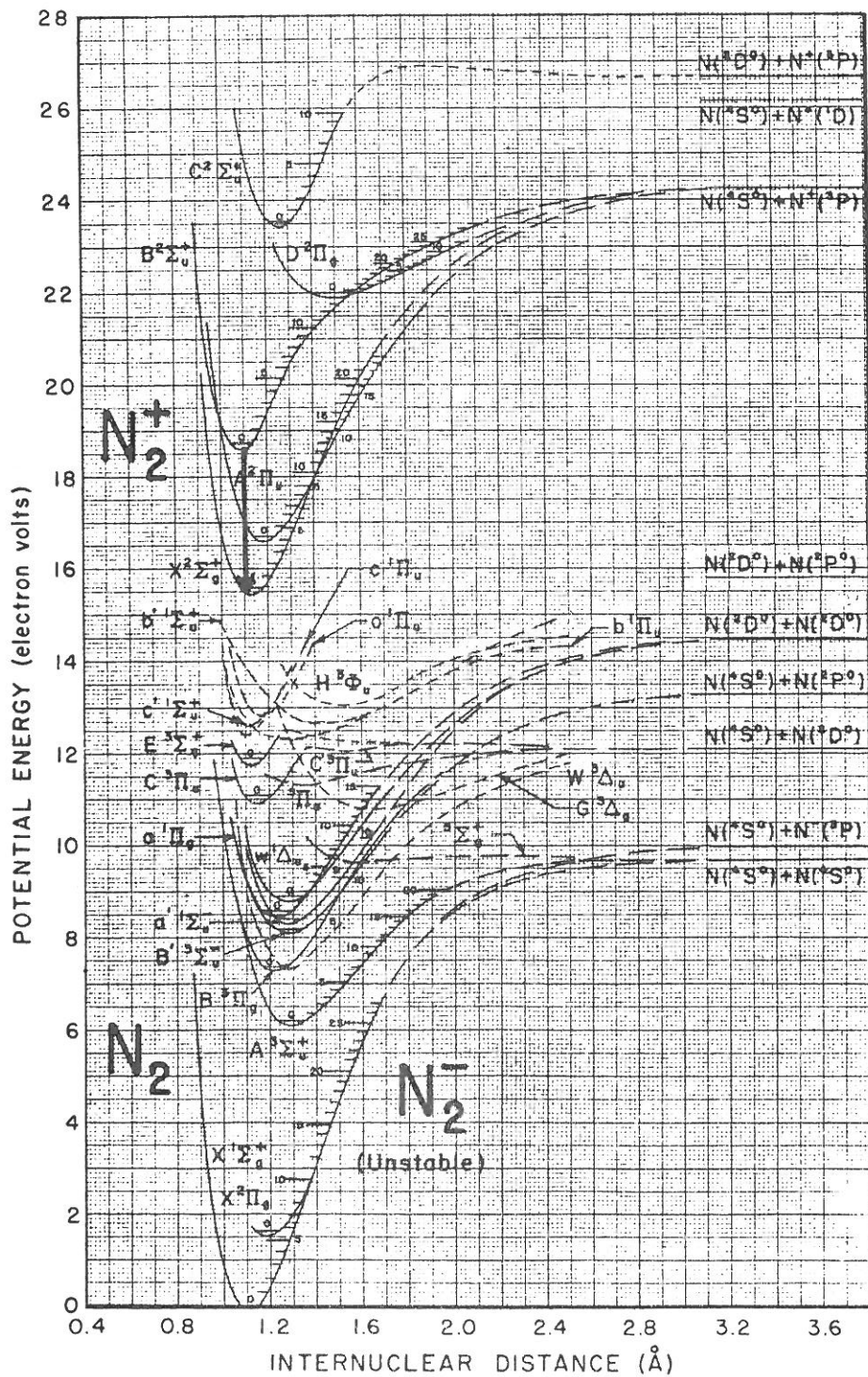
RESULTATS EXPERIMENTAUX

VIII.1. CONCENTRATION DES ELECTRONS PRIMAIRES AU VOISINAGE DES PAROIS : EVIDENCE EXPERIMENTALE

La figure V.6 est une reproduction de la couverture du célèbre livre de Chen (25). Il s'agit de la photographie d'une décharge multipolaire, prise à travers un filtre.

On y voit des arches lumineuses au voisinage des parois de l'enceinte cylindrique. Ces arches attestent une augmentation de la densité des particules responsables de l'émission lumineuse à la longueur d'onde du filtre utilisé. Il ne peut s'agir que des électrons primaires car la densité des électrons secondaires, mesurée par des sondes, décroît lorsqu'on approche des parois. Les arches lumineuses coïncident avec les régions où les particules piégées dans le champ multipolaire peuvent se mouvoir (figure III-7).

La longueur d'onde de l'émission est probablement $\lambda = 3914 \text{ \AA}$, correspondant au premier niveau négatif de l'ion N_2^+ (la transition est représentée par une flèche sur le diagramme des niveaux d'énergie à la page suivante).

FIGURE 1. Potential energy curves for N_2 and N_2^+ .*

* Enlarged copies of figure 1 may be obtained from the authors on request.

Pression	$P_0 = 5.10^{-4}$ Torr
Courant de décharge	$I_D = 130$ A
Tension de décharge	$V_D = 24$ V
Densité électronique	$n_e \approx 10^{11}$ cm ⁻³
Température électronique	$T_e \approx 3,6$ eV

TABLEAU VIII.1 : Conditions de décharge

VIII.2. INSTABILITE ACOUSTIQUE IONIQUE PRESENTE DANS LA GAINÉ MAGNETIQUE

Les plasmas multipolaires sont réputés pour leur calme. Les fluctuations de densité y sont en effet inférieures à 10^{-3} (6), (8). Mais ceci n'est pas vrai dans la gaine magnétique où divers auteurs ont mesuré des fluctuations très au-dessus du bruit thermique (23). Nous avons donc exploré le voisinage des parois, à la recherche de champs électriques susceptibles d'expliquer le piégeage des électrons primaires.

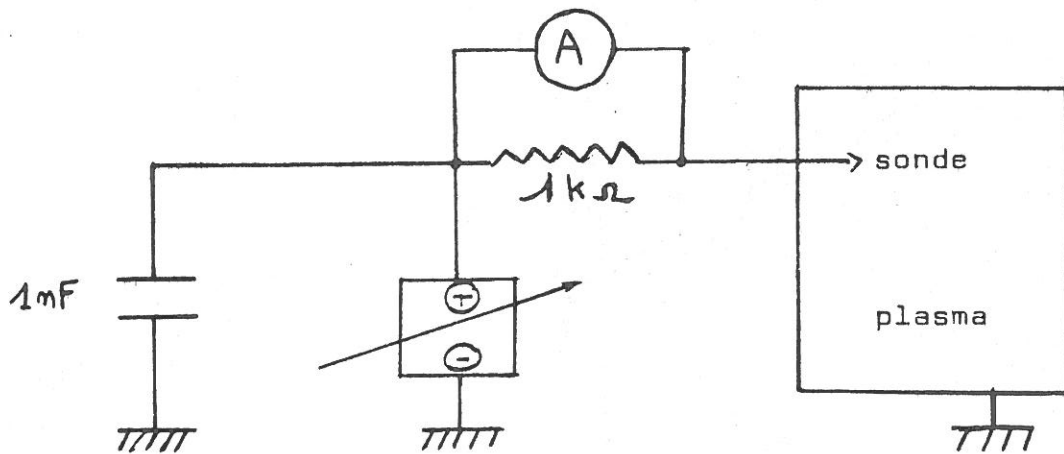
Nous interpréterons les résultats de cette expérience à la fin de ce paragraphe (§ VIII.2.E), après avoir décrit le montage expérimental et les mesures effectuées.

VIII.2.A. MONTAGE EXPERIMENTAL

Nous disposons une petite sonde mobile dans la gaine magnétique. Cette sonde est constituée d'un fil de tungstène de 0,3 mm de diamètre, protégé par un manchon d'alumine. Elle est polarisée positivement à travers une résistance de 1 K Ω . La tension aux bornes de cette résistance est envoyée sur un oscilloscope à mémoire ou sur un analyseur de spectres (le montage est schématisé sur la figure VIII.1).

La sonde étant polarisée positivement, elle attire les électrons du plasma. Le courant recueilli est donc grossièrement proportionnel (ce n'est pas rigoureusement vrai si le champ magnétique est non nul) à la densité du plasma et les variations de la tension aux bornes de la résistance de polarisation sont proportionnelles aux fluctuations de densité.

Nous avons varié la pression d'argon de 10^{-5} à 10^{-3} Torr, avec des densités et des températures électroniques au centre du dispositif allant respectivement de 10^{10} à 10^{11} cm $^{-3}$ et de 8 à 3 eV.



FigureVIII-1:Montage de mesure des fluctuations de densité dans la gaine magnétique.A représente soit un oscilloscope, soit un analyseur de spectres.

VIII.2.B. SIGNAUX RECUEILLIS

En déplaçant la sonde, nous avons d'abord observé du bruit, d'autant plus intense que l'on approchait des cusps. Mais dans certaines régions, que nous préciserons plus loin, et dans toute les gammes de paramètres définies ci-dessus, nous avons mesuré un signal beaucoup plus intense à une fréquence de quelques centaines de KHz.

Les résultats présentés ci-dessous ont été obtenus avec les conditions de décharge précisées au tableau VIII.1.

a) Oscillogrammes

La figure VIII-2-a montre la photographie des oscillogrammes obtenus avec deux sondes. Le déclenchement se faisait sur la trace du bas. On observe distinctement la perte de corrélation du signal après quelques oscillations. La période est d'environ 4 μ s et la fréquence $\nu \approx 250$ KHz.

b) Oscillogrammes moyennés

La figure VIII-2-b montre la moyenne de 64 balayages. On peut vérifier que la fréquence du signal est encore $\nu \approx 250$ KHz. Le temps de cohérence (largeur du paquet d'ondes de l'oscillogramme) est $\tau \approx 15$ μ s. Après cette durée, la différence des phases des signaux successifs devient telle que leur moyenne est nulle.

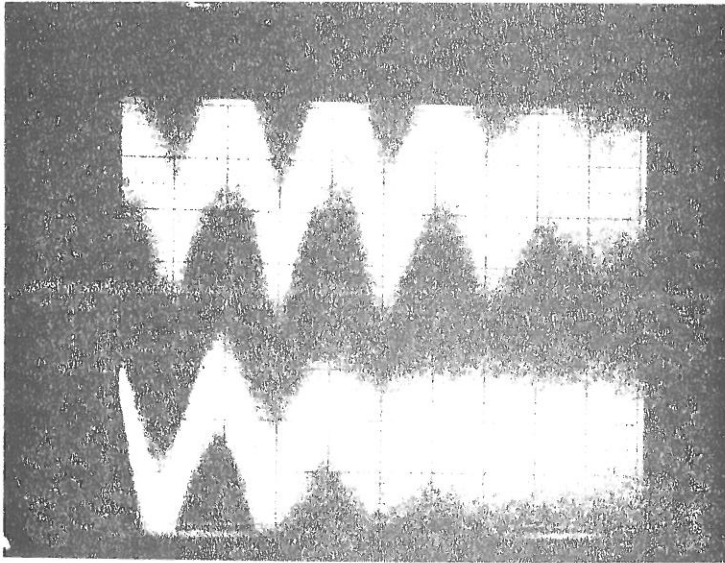
c) Oscillogramme simple trace

La figure VIII-2-c montre un balayage unique. Il s'agit donc de l'instabilité résolue dans le temps. On observe une structure en "paquets", caractéristique d'un phénomène de relaxation.

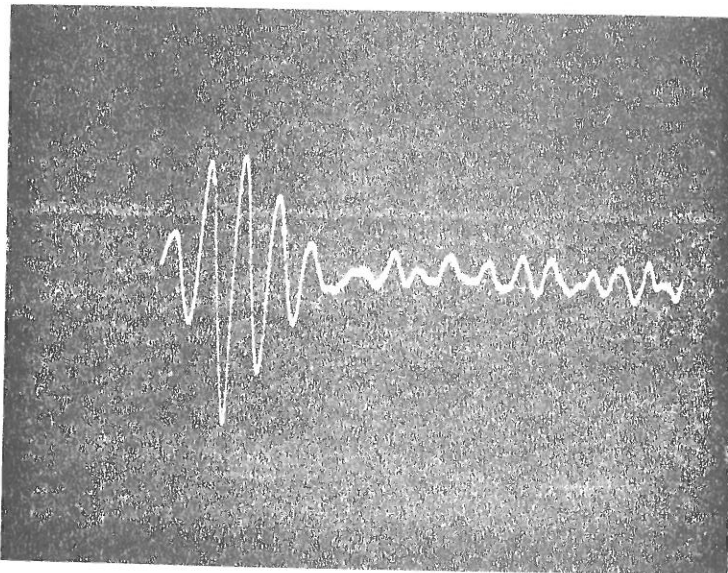
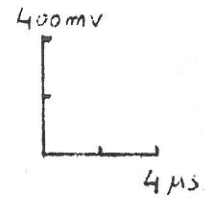
d) Spectres

La figure VIII-3 montre le spectre de l'instabilité en deux endroits différents. On observe que l'intensité et la fréquence du

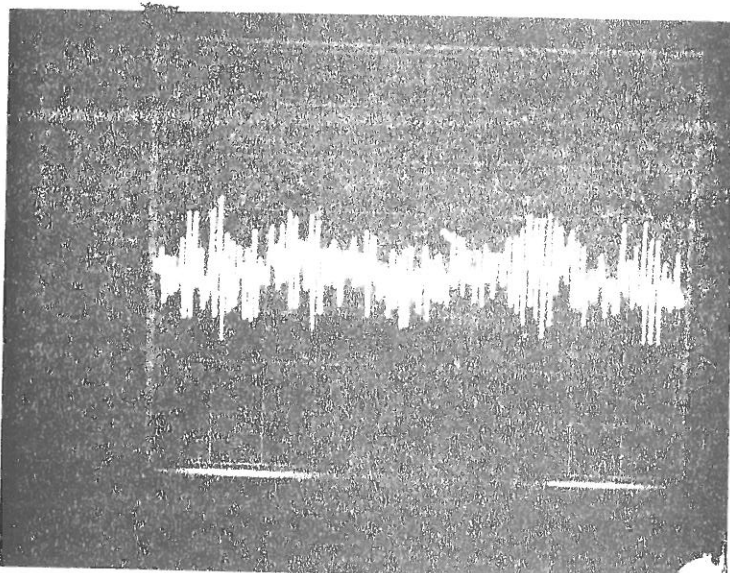
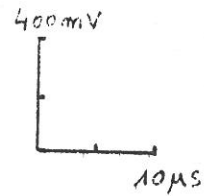
FigureVIII-2:Fluctuations de densité dans la gaine magnétique.



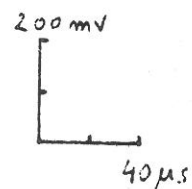
(a) oscillogramme

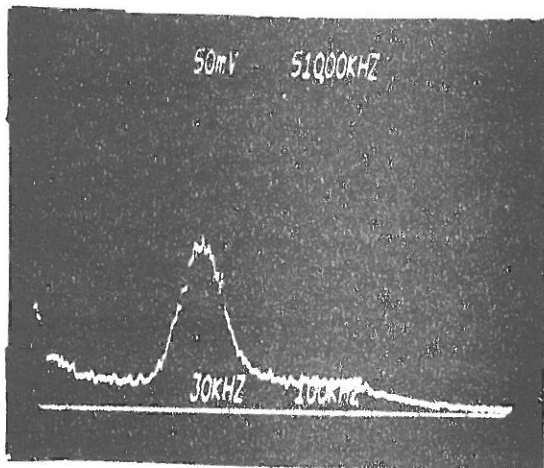


(b) moyenne de 64 balayages

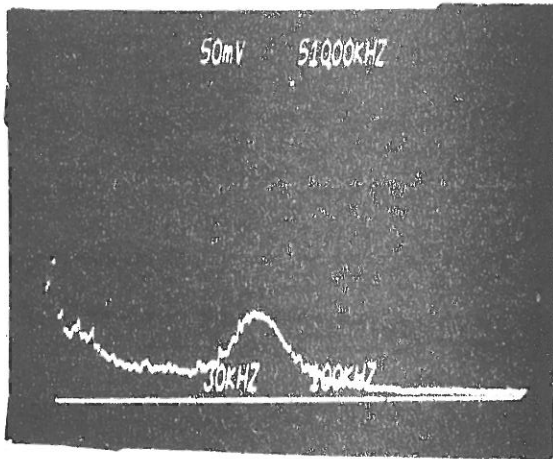


(c) balayage unique





(a) $\nu \approx 340 \text{ KHz}$
 $\Delta\nu \approx 100 \text{ KHz}$



(b) $\nu \approx 420 \text{ KHz}$
 $\Delta\nu \approx 100 \text{ KHz}$

FigureVIII-3: Spectre de l'instabilité: (a) près du maximum du signal
(b) presque entre deux cusps

ν fréquence du maximum du spectre
 $\Delta\nu$ largeur à mi hauteur

maximum du spectre dépendent de la position de la sonde. La fréquence est comprise entre 200 et 600 KHz. Elle dépend aussi du courant de décharge.

e) Amplitude des signaux

Appelons i_S le courant de sonde. L'amplitude des signaux mesurés était :

$$\frac{\Delta i_S}{i_S} \approx 5 \% \quad [\text{VIII.1}]$$

$\frac{\Delta i_S}{i_S}$ était pratiquement constant pour des tensions de polarisation de sonde pas trop élevées (jusqu'à 30 V).

Les fluctuations de densité étaient donc :

$$\frac{\Delta n}{n} \sim 5 \% \quad [\text{VIII.2}]$$

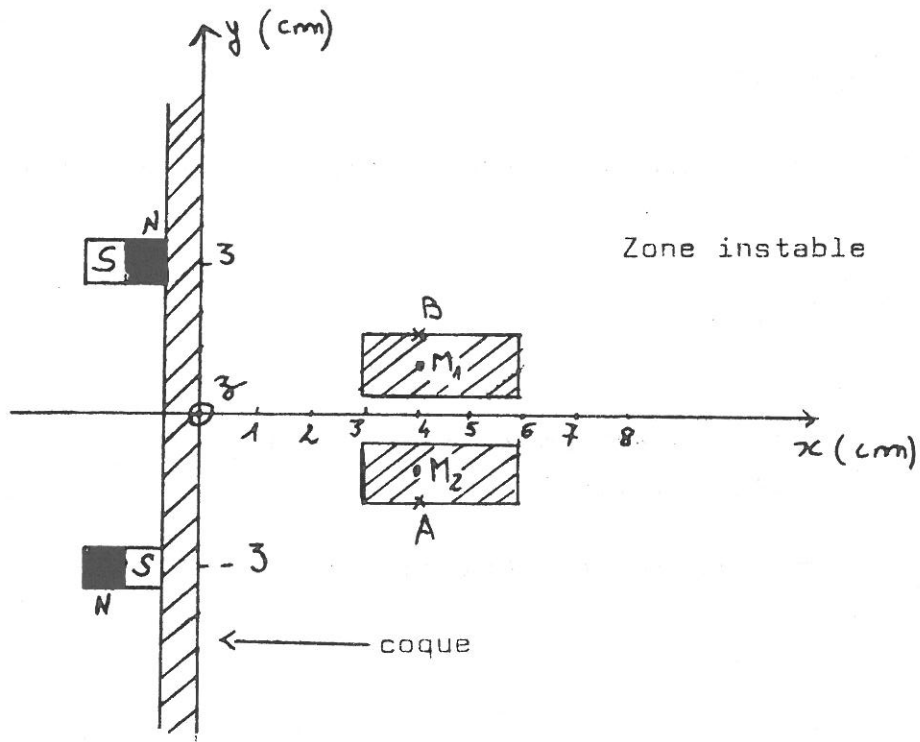
VIII.2.C. TOPOGRAPHIE DE L'INSTABILITE

Adoptons les axes de la figure VIII.4. L'intensité des signaux est maximale aux points M_1 ($x=4, y=1$) et M_2 ($x=4, y=-1$) (les distances sont en centimètres). Les rectangles hachurés sur la figure VIII-4 montrent les régions où l'intensité mesurée reste supérieure à la moitié de l'intensité en M_1 et M_2 .

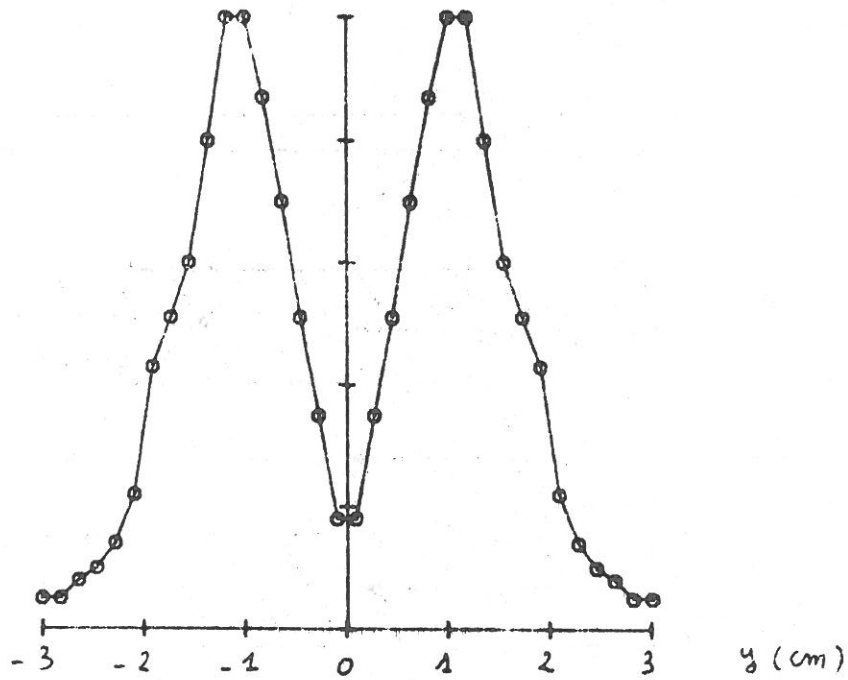
La topographie du champ électrique qui permet de piéger un électron primaire sur la figure VII-2, a été choisie sensiblement identique à celle de la figure VIII-4.

Les figures VIII-5 et VIII-6 montrent la variation de l'intensité de l'instabilité le long de x et y .

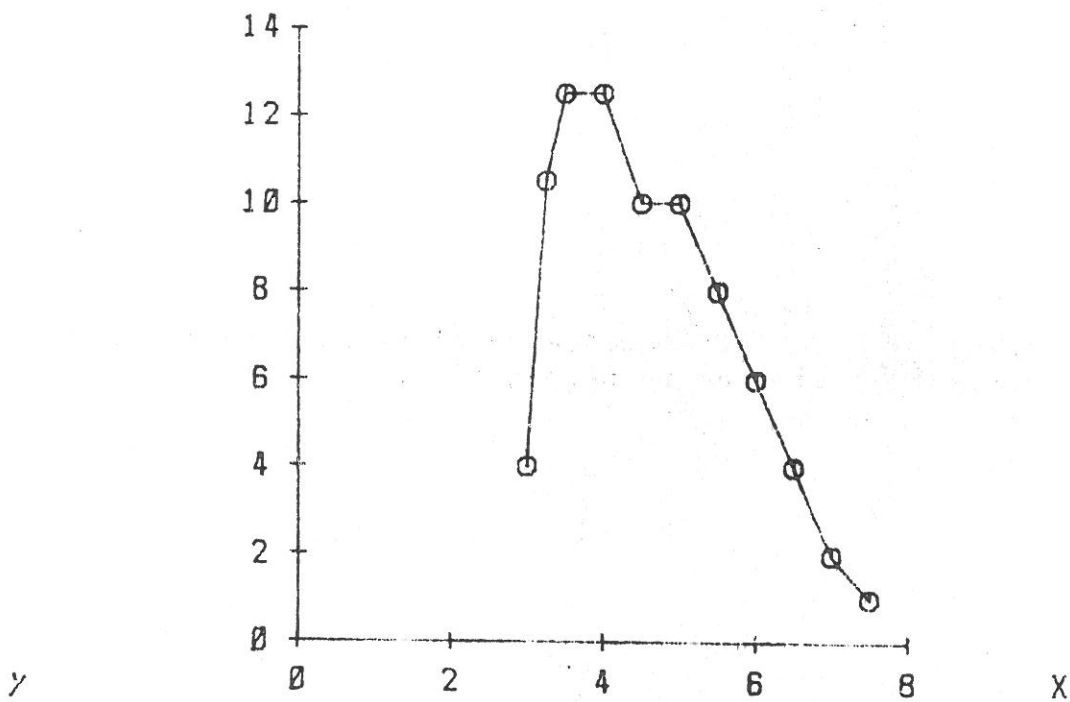
La figure VIII-7 montre la variation de la fréquence du maximum du spectre en différents points.



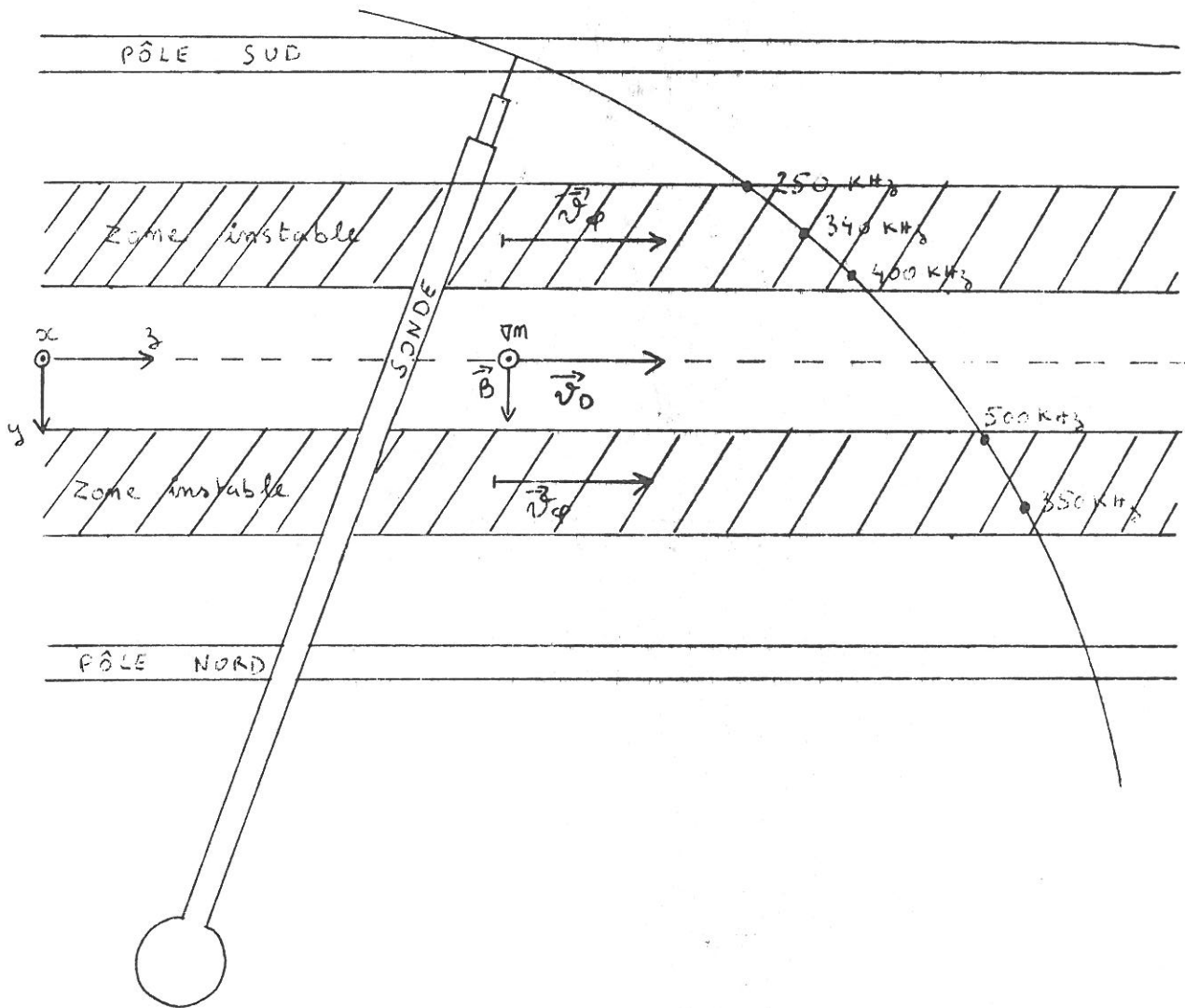
FigureVIII-4: Localisation de l'instabilité. L'intensité est maximale aux points M_1 et M_2 . Les rectangles hachurés indiquent la région où l'intensité est supérieure à la moitié de l'intensité maximale.



FigureVIII-5:Variation de l'intensité du maximum du spectre de l'instabilité le long de y.(x=4cm).



FigureVIII-6:Variation de l'intensité de l'instabilité(oscillogramme)en fonction de x(en y=1).



FigureVIII-7:Variation de la fréquence de l'instabilité en différents points et sens de la propagation.

VIII.2.D. ETUDE DE LA PROPAGATION DE L'INSTABILITE

a) Vitesse de phase

Pour étudier la propagation de l'instabilité nous avons déplacé une sonde mobile par rapport à une sonde de référence et mesuré la différence des phases des signaux sur les deux sondes. Ne disposant pas d'un amplificateur bien adapté, nous n'avons pas pu faire de mesures interférométriques. Nous nous sommes donc contenté de superposer les deux traces d'un oscilloscope pour évaluer cette différence de phase .

La figure VIII-8-a montre les signaux en opposition. Ils sont de nouveau en opposition lorsque la sonde mobile s'est déplacée de 10 mm le long de Oz (figure VIII-8-b). La longueur d'onde le long des barreaux aimantés est donc d'environ :

$$\lambda_z \approx 1 \text{ cm} \quad [\text{VIII.3}]$$

La figure VIII-9 montre la même mesure effectuée en moyennant les signaux des deux sondes. Le résultat est le même.

Il n'y a pratiquement pas de variation de phase le long de Oy. La longueur d'onde dans cette direction est donc beaucoup plus grande. Par conséquent la vitesse de propagation est parallèle à Oz, c'est-à-dire aux barreaux aimantés. La direction de la propagation se déduit du sens de déplacement des deux traces des oscillogrammes des figures VIII-8 ou VIII-9. Le résultat est schématisé sur la figure VIII-7.

La fréquence du maximum du spectre de ces signaux était :

$$\nu \approx 250 \text{ KHz}$$

La vitesse de phase était donc :

$$v_{\phi} \approx \lambda_z \nu = 2500 \text{ m/s} \quad [\text{VIII.4}]$$

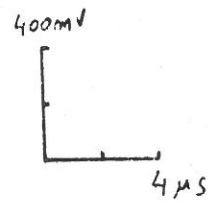
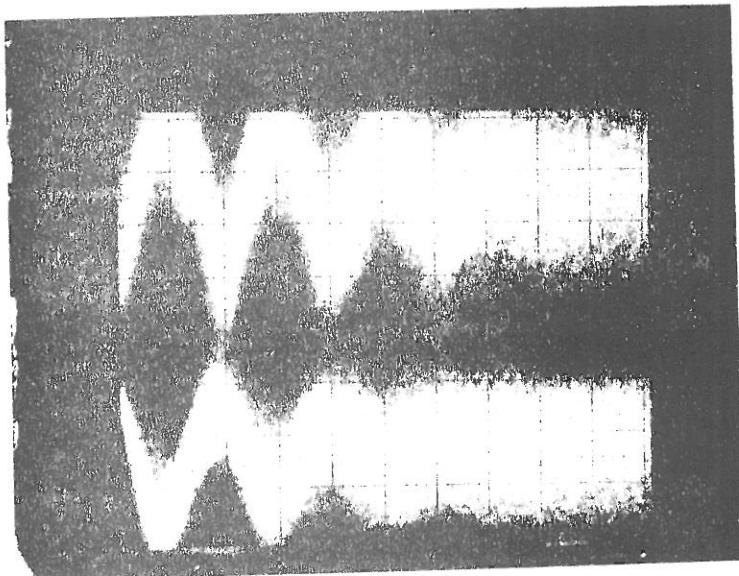
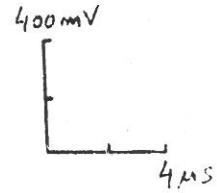
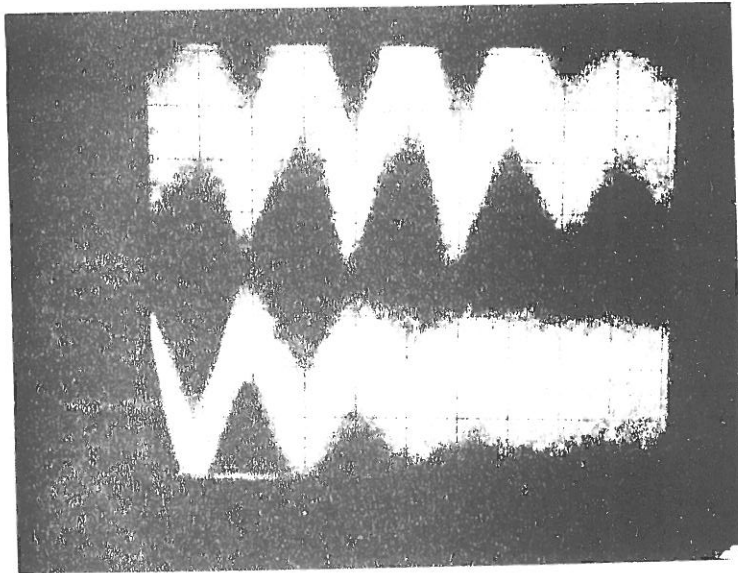
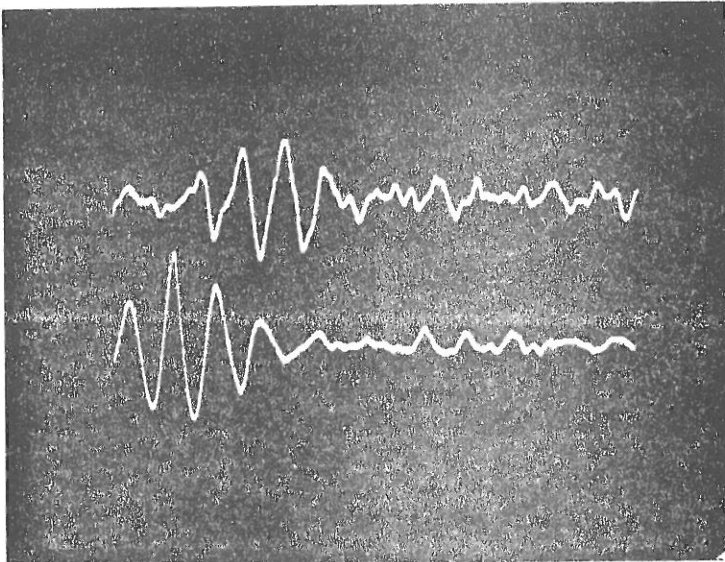
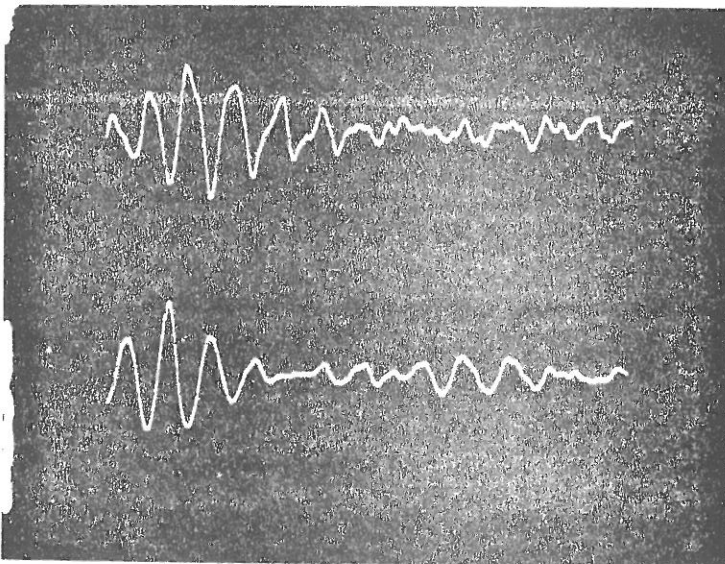


Figure VIII-8: Mesure de la différence de phase des signaux recueillis sur deux sondes, en fonction de la distance qui les sépare.
Trace du haut: sonde fixe.
Trace du bas: sonde mobile.
Le déclenchement se fait sur la trace du bas.

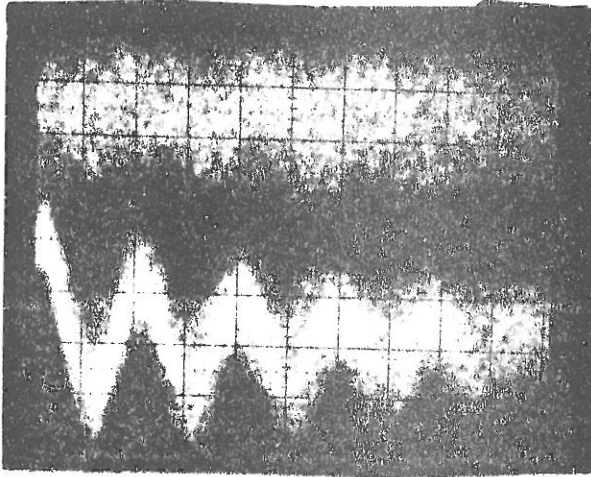


10 μ s



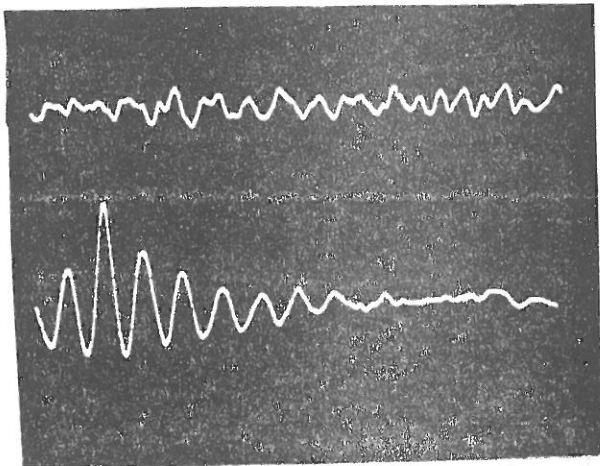
10 μ s

FigureVIII-9: Mesure de la différence de phase des signaux recueillis sur deux sondes, en fonction de la distance qui les sépare.
Trace du haut: sonde mobile.
Trace du bas: sonde fixe.
Moyenne de 32 balayages.



(a)

0 4μs



(b)

0 10μs

FigureVIII-10: Mesure de la corrélation des signaux de part et d'autre d'un cusp.
(a): Signal brut; déclenchement: trace du bas.
(b): moyenne de 64 balayages; déclenchement, trace du bas.

b) Mesures de corrélation

La phase de l'instabilité ne varie pratiquement pas le long de Oy : elle reste constante le long du segment AB de la figure VIII-4. Mais de part et d'autre d'un cusp, les signaux sont totalement décorrélés : la figure VIII-10 montre les signaux recueillis par deux sondes placées de part et d'autre d'un barreau aimanté. Le balayage de l'oscilloscope était déclenché lorsque le signal atteignait un certain seuil sur la trace du bas. La valeur du signal de la trace du haut était alors totalement aléatoire et par conséquent sa valeur moyenne était nulle (figure VIII-10-b).

VII.2.E. INTERPRETATION DES MESURES

a) Nature de l'instabilité

Rappelons le résultat de la mesure de la vitesse de propagation le long des barreaux aimantés (Oz) :

$$v_{\varphi} \approx 2500 \text{ m/s} \quad [\text{VIII.4}]$$

La vitesse acoustique ionique est, dans les conditions du tableau VIII.1 :

$$c_s = \sqrt{\frac{KT_e}{M}} = 2860 \text{ m/s} \quad [\text{VIII.5}]$$

Compte tenu des incertitudes de mesure (la distance entre les sondes était difficile à évaluer), on peut admettre que

$$v_{\varphi} \approx c_s.$$

Le champ magnétique est dans le plan xOy (figure VIII-4). Le gradient de densité est pratiquement dirigé vers la paroi, le long de Ox. Par conséquent, nous sommes en présence d'une instabilité qui se propage perpendiculairement au champ magnétique et au gradient de densité, à une vitesse voisine de c_s . C'est aussi le cas de la théorie de Kadomtsev, développée au § VII.8. Vérifions que les conditions de validité de cette théorie sont remplies :

La vitesse de dérive diamagnétique des électrons du plasma s'écrit ([VII.29]) :

$$v_D = \frac{1}{L} \frac{KT_e}{eB} \quad [\text{VIII.6}]$$

où L désigne la longueur du gradient de densité. Avec $L \sim 2 \text{ cm}$ et $B \sim 100 \text{ G}$, on obtient :

$$v_D \approx 17\,000 \text{ m/s} \quad [\text{VIII.7}]$$

Par conséquent :

$$v_D \gg c_s \quad [\text{VII.61}]$$

Si l'instabilité résulte du transfert de l'énergie associée à la dérive diamagnétique vers le mode collectif ionique, il est raisonnable de penser que \vec{v}_D et \vec{v}_ρ ont même direction et même sens. On peut vérifier sur la figure VIII-7 que c'est bien le cas.

Nous avons vu que la phase de l'instabilité ne varie pas dans le plan xOy. Le vecteur d'onde parallèle au champ magnétique est donc bien plus grand que le vecteur d'onde perpendiculaire au champ et au gradient de densité. La condition [VII.34] est remplie.

Les ions sont-ils magnétisés ? Nous avons calculé la pulsation et le rayon de Larmor ionique dans l'appendice A :

$$\Omega_i \approx 2,4 \cdot 10^4 \text{ rd/s}$$

$$r_L^i \approx 4 \text{ cm}$$

La pulsation de l'instabilité est ($\nu = 300 \text{ KHz}$) : $\omega = 1,8 \cdot 10^6 \text{ rd/s}$.
On a donc bien :

$$\omega \gg \Omega^i$$

[VII.36]

$$r_L^i > L$$

Par conséquent, les ions ne sont pas magnétisés. Qu'en est-il des électrons ? Le rayon de Larmor électronique est (Appendice A) :

$$r_L^e = 0,06 \text{ cm}$$

$$\text{On a donc } r_L^e \ll L$$

[VII.35]

Les électrons sont donc attachés aux lignes de champ magnétique et nous sommes dans le domaine de validité de la théorie de Kadomtsev.

Il nous reste cependant à vérifier que le développement [VII.54] de la fonction de Fried et Conte est licite et que les ions peuvent être considérés comme froids. La condition à remplir est :

$$v_{ti} < \frac{\omega}{k_{\parallel}} < v_{te} \quad [\text{VII.57}]$$

où v_{ti} et v_{te} désignent respectivement la vitesse thermique ionique et électronique et k_{\parallel} , le vecteur d'onde parallèle au champ magnétique. La longueur d'onde parallèle à \vec{B} peut être estimée voisine de l'extension de la zone instable dans le plan xOy : la figure VIII-4 donne $\lambda_{\parallel} \approx 3$ cm. On a donc

$$\frac{\omega}{k_{\parallel}} \approx \lambda_{\parallel} \nu \approx 9000 \text{ m/s}$$

Les vitesses thermiques sont (Appendice A) :

$$v_{te} \approx 10^6 \text{ m/s}$$

$$v_{ti} \approx 680 \text{ m/s}$$

La condition précédente est donc remplie.

b) Topographie de l'instabilité

Nous avons identifié les fluctuations de densité observées dans la gaine magnétique : elles résultent d'une instabilité acoustique ionique entretenue par la vitesse de dérive diamagnétique des électrons du plasma. Cette hypothèse permet d'expliquer la localisation des signaux dans les régions montrées sur les figures VIII-4 à 6 :

Redonnons l'expression de \vec{v}_D :

$$v_D = \frac{KT_e}{eB} \left| \frac{\sin \theta}{L} \right| \quad [\text{VII.29}]$$

où θ désigne l'angle entre $\vec{\nabla}n$ et \vec{B} (figure VIII-11) et L , la longueur d'inhomogénéité de la densité électronique.

Dans un cusp, $\vec{\nabla}n$ et \vec{B} sont parallèles et v_D y est nul. Les variations de L peuvent être estimées grâce au calcul de diffusion ambipolaire en champ magnétique (8) dont nous avons parlé au

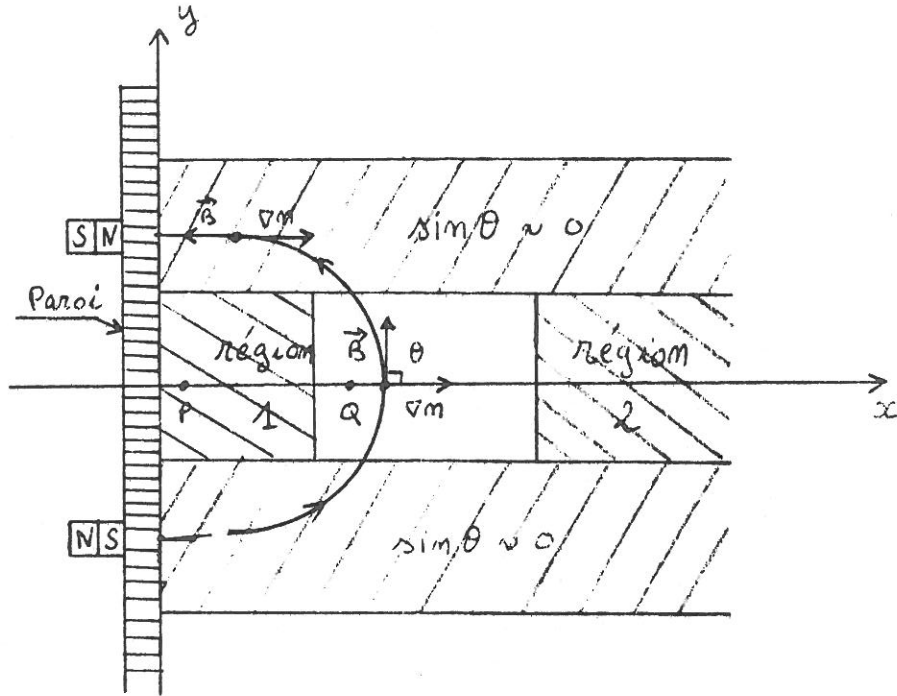


Figure VIII-11: Sens et direction des vecteurs \vec{B} et ∇m . L'instabilité est localisée dans la région non hachurée.

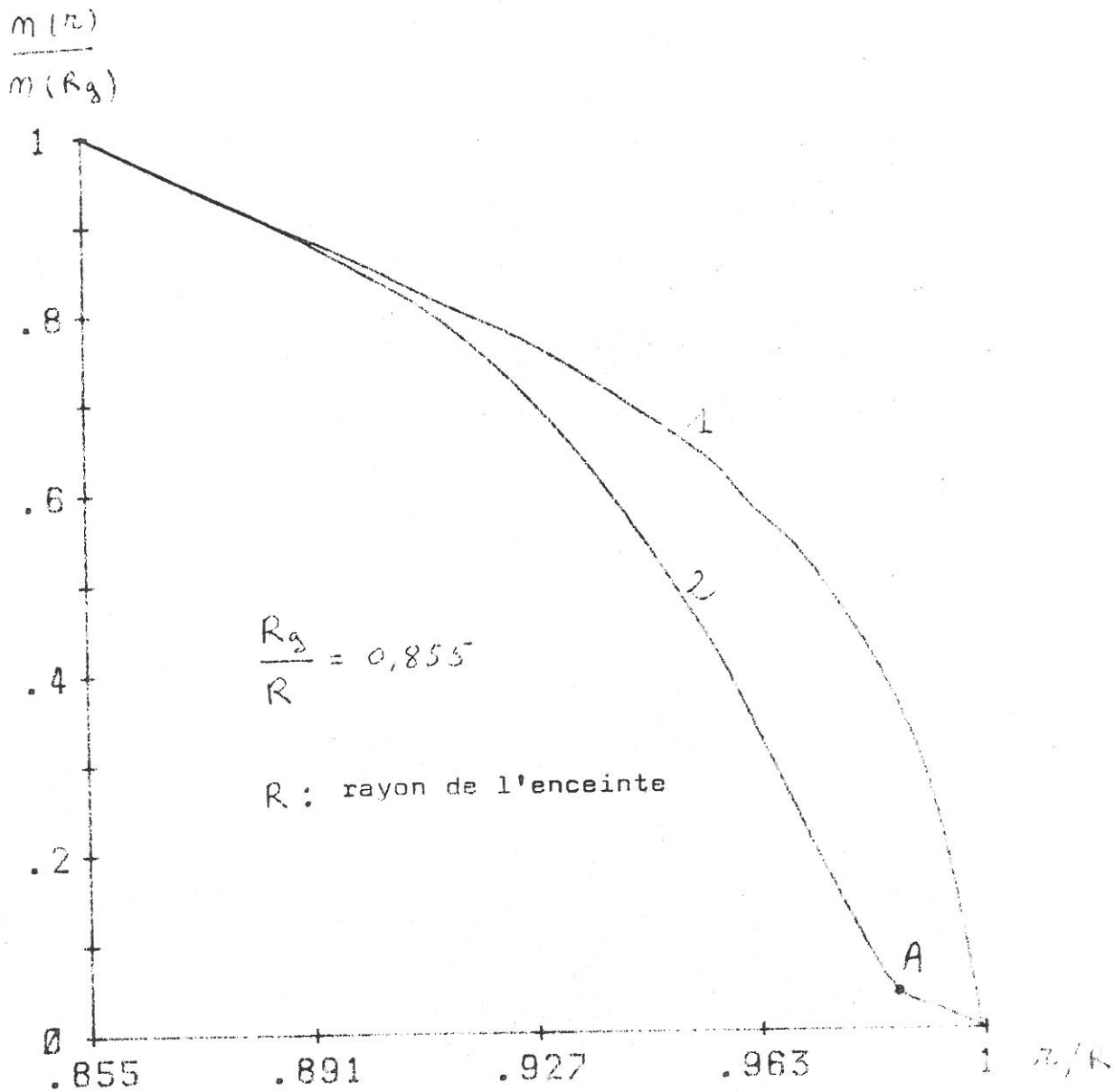
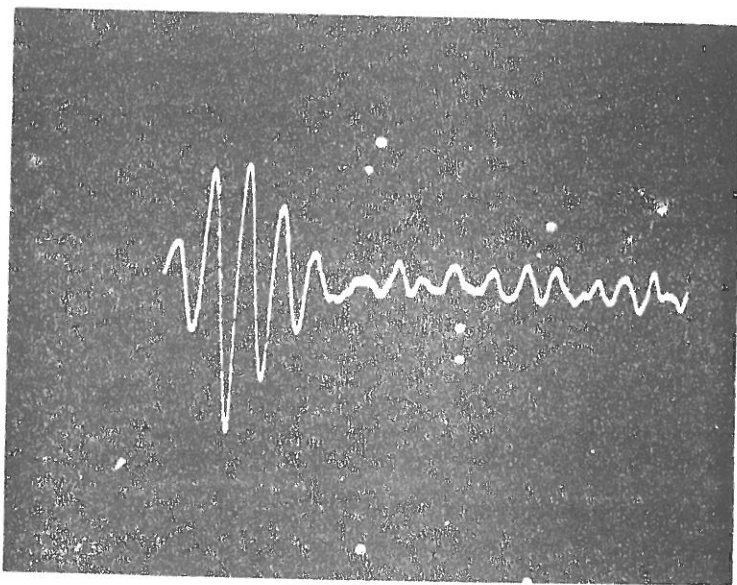


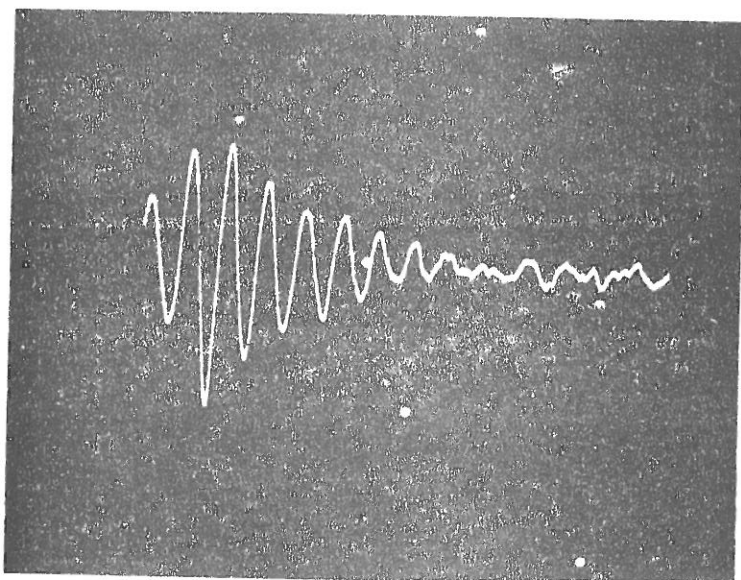
Figure VIII-12: Variation de la densité électronique le long d'un rayon passant par un cusp (courbe 1) et entre deux cusps (courbe 2). Ces courbes ont été calculées par la méthode expliquée au § II-2-C-c, avec un champ magnétique plus faible que le champ réel. Dans la pratique, le point d'inflexion A est situé plus loin de la paroi.

§ II.2.C.c. La figure VIII-12 montre la variation de la densité électronique dans la gaine magnétique, le long d'un rayon passant par un cusp et entre deux cusps. Dans ce dernier cas, on constate que la longueur de gradient passe par un minimum près des parois (point d'inflexion de la courbe).

Plaçons-nous près des parois, entre deux cusps. Quand on se déplace de P vers Q (figure VIII-11), le produit BL diminue. La vitesse de dérive diamagnétique est très faible près des parois et elle augmente lorsqu'on s'en éloigne. Il n'y a donc pas d'instabilité dans la région 1 de la figure VIII-11. Si l'on continue à s'éloigner, il arrive un moment où le plasma devient uniforme. Par conséquent, la vitesse de dérive diamagnétique s'annule et il n'y a plus d'instabilité (région 2 de la figure VIII-11).



(a) $l=6\text{cm}$



(b) $l=12\text{cm}$

FigureVIII-13: Le temps de cohérence de l'instabilité croît lorsque le champ magnétique devient plus uniforme; l représente l'écartement des aimants.

c) Temps de cohérence des signaux observés

La figure VIII-2 montre que nous avons affaire à un phénomène de relaxation. L'instabilité est donc gouvernée par deux mécanismes concurrents : le premier entraîne la croissance du champ électrique avec le taux initial [VII.60] de la théorie de Kadomtsev. Le second mécanisme entre en jeu lorsque l'amplitude du champ électrique est suffisamment grande. Il conduit à l'amortissement de l'instabilité et il est hors du domaine de validité de la théorie linéaire de Kadomtsev.

Le temps de cohérence des signaux est le temps au bout duquel le mécanisme de relaxation disperse les "paquets" d'énergie injectés de façon cohérente dans le plasma par la dérive diamagnétique des électrons. Le temps de cohérence est (figure VIII-2) :

$$\tau \approx 15 \mu\text{s}$$

Il est relié à la largeur du spectre (figure VIII-3) :

$$\tau \approx \frac{1}{\Delta\nu} \quad [\text{VIII.9}]$$

Soit ℓ l'extension dans le plan xOy de la zone instable ($\ell \approx 3$ cm), on remarque que τ est manifestement lié à l'inertie des ions :

$$\tau \approx \frac{\ell}{C_S} = 10 \mu\text{s} \quad [\text{VIII.10}]$$

Ceci suggère un mécanisme de relaxation : lorsque le champ électrique de l'instabilité devient suffisamment fort, des électrons sont éjectés, entraînant les ions à leur suite par diffusion ambipolaire. Le profil de densité se creuse, augmentant la longueur d'inhomogénéité. La condition $v_D > C_S$ cesse alors d'être remplie et le phénomène relaxe.

Nous avons cherché à observer un spectre aux alentours de $\frac{1}{\tau} \approx 70$ KHz mais notre tentative s'est soldée par un échec, le niveau de bruit étant très élevé dans les cusps.

VIII.3. ETABLISSEMENT D'UN GRADIENT DE DENSITE AJUSTABLE EN REGIME NON COLLISIONNEL

Nous avons expliqué au § I.1 que l'enceinte multipolaire du Laboratoire de Physique des Gaz et Plasmas d'Orsay a été construite pour étudier l'interaction d'une onde électromagnétique avec un plasma présentant un gradient de densité pour simuler la physique de l'interaction laser-matière.

Jusqu'à présent, dans les dispositifs analogues, le gradient de densité était obtenu par une répartition inhomogène des électrons primaires dans l'enceinte : si les filaments sont disposés à une extrémité et si le libre parcours moyen des électrons primaires est plus petit que la longueur de l'enceinte, le taux d'ionisation est supérieur du côté des filaments et l'on obtient un plasma inhomogène. L'inconvénient est que le régime n'est plus tout à fait non collisionnel et le plasma n'est pas uniforme radialement.

Pour éviter cet inconvénient, nous avons disposé une feuille de mica transversalement à l'axe du cylindre (figure I-2). Cette feuille permet d'obtenir un gradient de densité électronique même à basse pression de neutres. De plus, la longueur de gradient peut être ajustée en déplaçant la feuille de mica (figures VIII-14 et 15) et l'uniformité radiale est préservée.

L'hypothèse du piégeage des électrons primaires explique bien les profils de ces figures : lorsque la feuille est proche de la paroi, la population du piège multipolaire est élevée et le plasma est uniforme. Lorsque la feuille s'éloigne de la paroi, il y a de moins en moins de particules piégées et le plasma est de plus en plus inhomogène.

Lorsque la feuille de mica dépasse la zone où existe l'instabilité acoustique ionique ($x \approx 6$ cm), le profil cesse d'évoluer car il n'y a plus d'électrons primaires piégés.

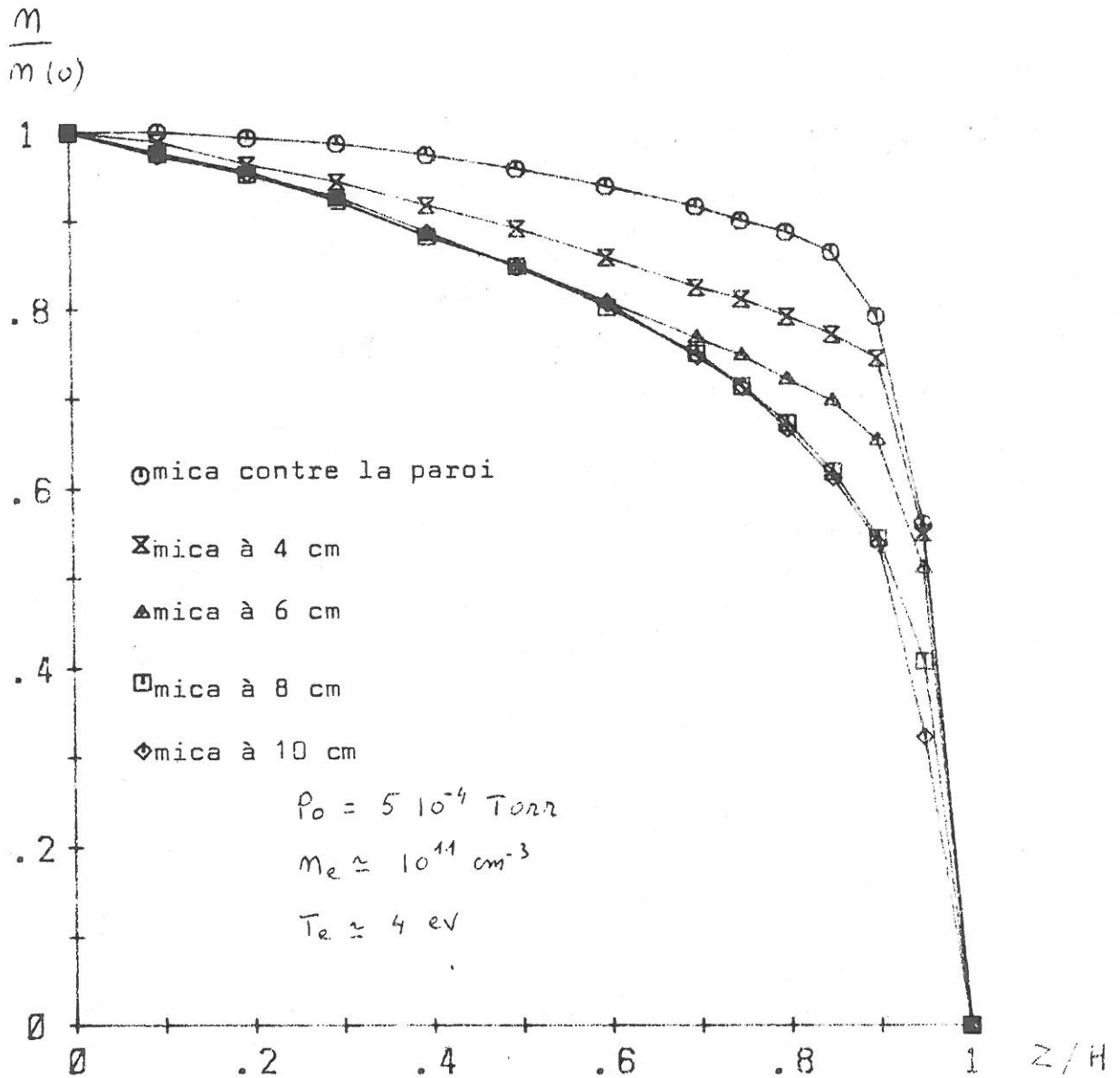


Figure VIII-14: Variation du profil de densité d'un plasma multipolaire non collisionnel avec la position d'une feuille de mica.

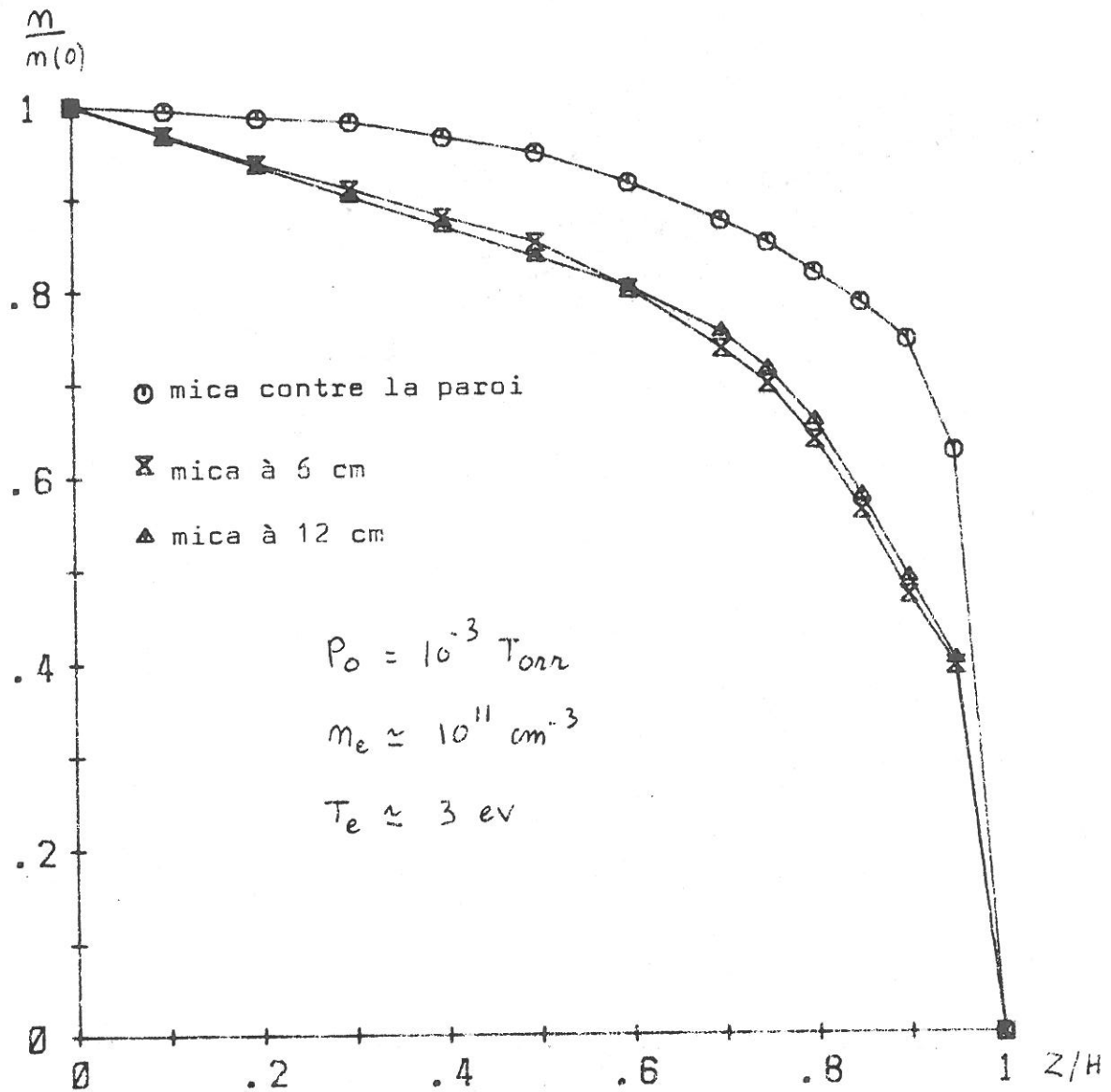


Figure VIII-15: Variation du profil de densité d'un plasma multipolaire non collisionnel avec la position d'une feuille de mica.

CONCLUSION

En commençant cette thèse, nous nous proposons d'étudier un problème très spécifique de physique des plasmas. L'uniformité des plasmas multipolaires, maintes fois constatée, n'avait jamais été sérieusement étudiée.

Il était couramment admis qu'elle était due à la présence des murs magnétiques qui, entraînant une restriction brutale de la diffusion du plasma, conduisaient à la localisation des variations de densité au voisinage des parois.

Au chapitre II, nous appuyant sur des résultats théoriques (8) et expérimentaux (6)(7), nous avons montré que cette hypothèse ne rendait pas compte des profils de densité observés ; il faut admettre que le terme d'ionisation, c'est-à-dire le nombre d'électrons primaires, augmente au voisinage des parois.

Cette augmentation ne pouvant être due qu'au champ magnétique, nous avons étudié de façon détaillée les trajectoires de ces électrons dans le champ multipolaire (chapitres III à VI) ; contrairement à notre attente, nous avons trouvé que le nombre des électrons primaires issus du plasma diminuait au voisinage des parois. Par conséquent, si l'uniformité des plasmas multipolaires s'explique par de fortes populations d'électrons primaires au voisinage des parois, ces populations doivent être identifiées avec les électrons piégés par le champ magnétique.

Cette hypothèse nous a permis d'interpréter la photographie de couverture du célèbre livre de Chen (25), mais nous nous sommes trouvés confrontés à un nouveau problème : comment expliquer la capture des électrons primaires par le champ multipolaire ?

Cette question se pose de la même façon dans un domaine tout à fait différent : les ceintures de Van Allen qui gênent tant les astronautes dans leurs périples autour de notre planète, sont constituées de particules chargées émises par le soleil et capturées par le champ du dipôle terrestre.

Une brève incursion dans la littérature géophysique nous a convaincu que ce problème n'a pas encore été résolu. Nous sommes donc retournés au champ multipolaire et, après avoir envisagé différents mécanismes, nous avons trouvé qu'un faible champ électrique parallèle à l'axe de symétrie du multipôle permettait de capturer une fraction des particules issues du plasma (chapitre VII).

L'exploration de la gaine magnétique nous a ensuite permis de mettre en évidence une instabilité de type acoustique ionique (chapitre VIII) dont le champ électrique pourrait être à l'origine des fortes populations d'électrons primaires piégés au voisinage des parois.

Une expérience qui permettra peut-être d'établir de façon certaine l'existence de ces électrons est actuellement en cours : nous allons mesurer, à l'aide d'une fibre optique et d'un spectromètre, les variations des intensités de raies excitées par les électrons primaires en fonction de la distance à la paroi.

* *
*

APPENDICE A : Paramètres d'une décharge multipolaire type

Nature du gaz	: argon
Pression résiduelle	: $P_o = 10^{-4}$ Torr
Densité des atomes neutres	: $n_o = 3,5 \cdot 10^{12}$ cm ⁻³
Densité électronique du plasma	: $n_e = 10^{11}$ cm ⁻³
taux d'ionisation	: $\beta \approx 3 \%$
fréquence plasma électronique	: $\nu_{Pe} = 3 \cdot 10^9$ s ⁻¹
fréquence plasma ionique	: $\nu_{Pi} \approx 10^7$ s ⁻¹
Température électronique	: $T_e = 3$ eV
Température ionique	: $T_i \approx 0,2$ eV
Energie des électrons primaires	: $E_c = 50$ eV
vitesse thermique électronique	: $v_{te} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{KT_e}{m_e}} = 1,2 \cdot 10^6$ m/s
vitesse thermique ionique	: $v_{ti} = 680$ m/s
vitesse acoustique ionique	: $C_S = \sqrt{\frac{KT_e}{M}} = 3000$ m/s
vitesse des primaires	: $v_o = \sqrt{\frac{2E_c}{m_e}} = 4 \cdot 10^6$ m/s
longueur de Debye électronique	: $\lambda_D = \left\{ \frac{\epsilon_o KT_e}{n_e e^2} \right\}^{1/2} = 4 \cdot 10^{-5}$ m
distance de Landau	: $r_o = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o KT_e} \approx 5 \cdot 10^{-10}$ m
logarithme coulombien (plasma)	: $\text{Log } \Lambda = \text{Log } \frac{\lambda_D}{r_o} = 11,3$
logarithme coulombien (primaires)	: $\text{Log } \Lambda \approx 15$
Collisions sur les neutres : transfert de quantité de mouvement :	
* électrons primaires	
section efficace σ_{50}^{Po}	: $8 \cdot 10^{-20}$ m ²

$$\left. \begin{array}{l} \text{fréquence des collisions} \quad \nu_{50}^{Po} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \\ \text{libre parcours moyen} \quad \lambda_{50}^{Po} = 3 \text{ m} \end{array} \right\} \text{ à } 10^{-4} \text{ Torr}$$

* électrons du plasma

$$\left. \begin{array}{l} \text{section efficace} \quad \sigma_1^{eo} = 1,4 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2 \\ \text{fréquences de collisions} \quad \nu_1^{eo} = 5,7 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1} \\ \text{libre parcours moyen} \quad \lambda_1^{eo} = 20 \text{ m} \end{array} \right\} T_e = 1 \text{ eV}$$

Collisions ion-neutre avec transfert de charge :

$$\left. \begin{array}{l} \text{fréquence de collision} \quad \nu_{io}^* = 1,6 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \\ \text{libre parcours moyen} \quad \lambda_{io}^* = 0,6 \text{ m} \end{array} \right\} \text{ à } 10^{-4} \text{ Torr}$$

Collisions ion-neutre sans transfert de charge :

On connaît la mobilité des ions Ar^+ :

$$\mu_i = 1,2 \cdot 10^3 \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ à } 10^{-4} \text{ Torr}$$

on peut en déduire une fréquence de collisions équivalente :

$$\nu_{io} = 2 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

et un libre parcours moyen : $\lambda_{io} \approx 0,4 \text{ m}$

Collisions ionisantes des primaires sur les neutres :

$$\begin{array}{l} \text{section efficace} \quad : \sigma_{50}^i = 2,5 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2 \\ \text{fréquence des collisions ionisantes} \quad : \nu_{50}^i = 3,7 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1} \\ \text{libre parcours moyen} \quad : \lambda_{50}^i = 11 \text{ m} \end{array}$$

Collisions coulombiennes :

* collisions électron-ion

$$\nu_{ei} = \pi r_o^2 n_i v_{te} \text{Log } \Lambda \approx 10^6 \text{ s}^{-1}$$

* collisions électron-électron

$$\nu_{ee} = 10^6 \text{ s}^{-1}$$

* collisions ion-ion

$$\nu_{ii} = \nu_{ee} \left(\frac{m_e}{M} \right)^{1/2} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} = 2 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$$

* collisions primaire-ion

$$\nu_{pi} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$$

* libre parcours moyen des électrons pour les collisions
coulombiennes : électrons du plasma : $\lambda_e \approx 1,2 \text{ m}$
 électrons primaires : $\lambda_p \approx 200 \text{ m}$

Grandeurs liées au champ magnétique :

écartement des aimants	: $l = 6 \text{ cm}$	
valeur du champ à 4 cm d'un aimant	: $B \approx 10^{-2} \text{ T} = 100 \text{ G}$	
valeur du champ à 8 cm d'un aimant	: $B \approx 4 \text{ G}$	
pulsation de Larmor électronique	: $\omega_{be} = 1,7 \cdot 10^9 \text{ rd/s}$	} $B = 100 \text{ G}$
pulsation de Larmor ionique	: $\Omega^i = 2,4 \cdot 10^4$	
rayon de Larmor d'un électron du plasma	: $r_L^e = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	
rayon de Larmor d'un électron primaire	: $r_L^p = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	
rayon de Larmor ionique	: $r_L^i = 0,04 \text{ m}$	

APPENDICE B : Ordinogramme du calcul des trajectoires.

L'ordinogramme est présenté au tableau B.1. On utilise trois indices :

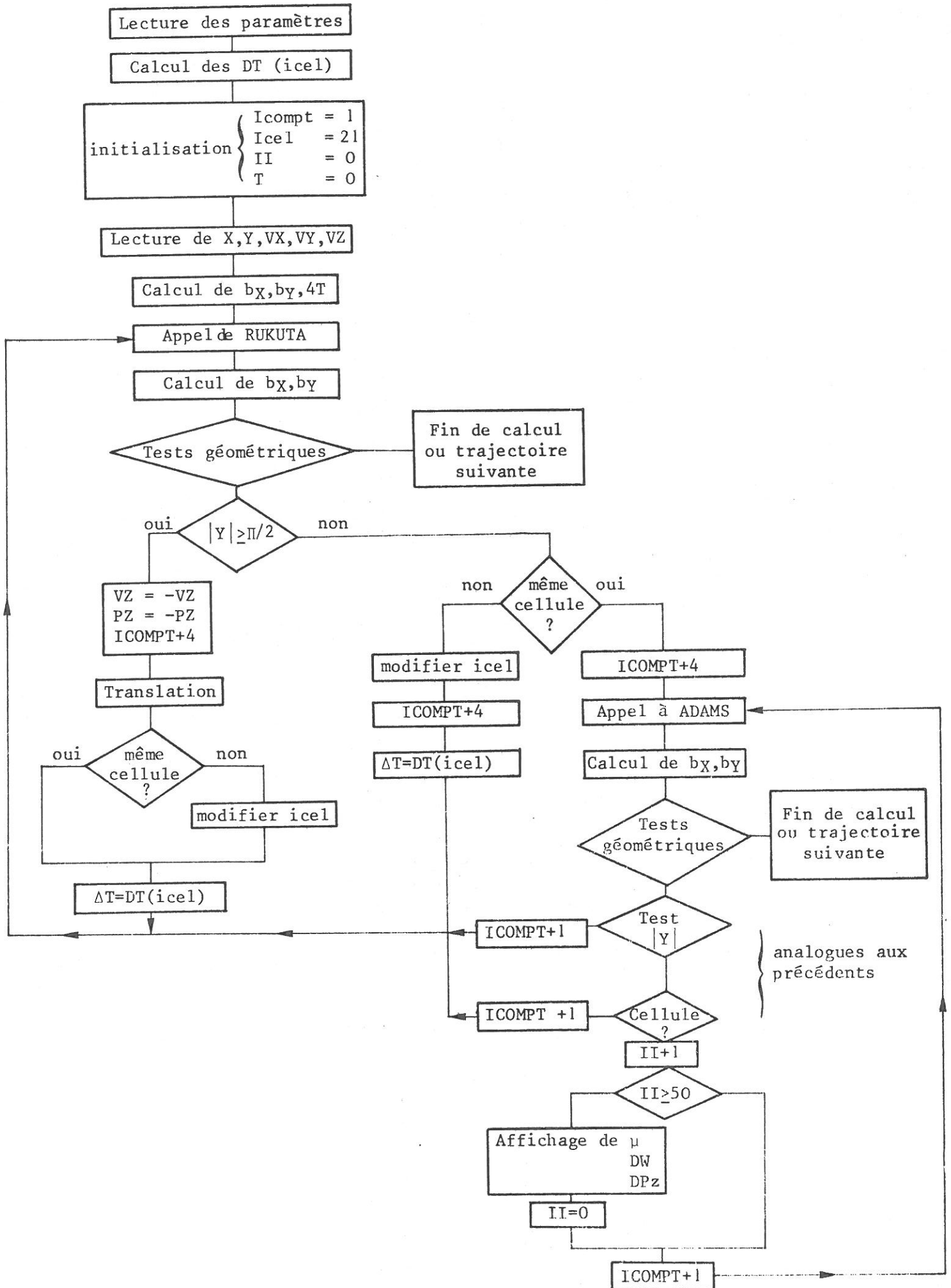
- I_{cel} varie de 0 à 21 et désigne le numéro des cellules du domaine de calcul
- I_{compt} désigne le nombre de points de la trajectoire qui ont été calculés. Chaque appel de RUKUTA (Runge Kutta) permet d'en calculer quatre qui sont utilisés comme points de départ par ADAMS (Adams-Moulton)
- II est un compteur qui permet de n'afficher les données que tous les 50 points (pour éviter de gâcher une montagne de papier !).

X, Y, V_X, V_Y, V_Z désignent la position et la vitesse de la particule à l'instant T . $DT(\text{icel})$ est un tableau qui contient le pas de temps choisi pour chaque cellule (une fraction de la période de Larmor au milieu de celle-ci). Chaque fois que l'on pénètre dans une cellule, on assigne au pas de temps ΔT la valeur de DT correspondante. b_X, b_Y désignent les composantes du champ magnétique, P_Z l'invariant du mouvement .

Les tests géométriques permettent de vérifier si l'on a traversé une frontière de cellule, si l'on est sorti du domaine de calcul ou si l'on doit cesser le calcul (après un libre parcours moyen ou après avoir rencontré la paroi).

Toutes les périodes de Larmor, on demande d'afficher le moment magnétique (μ), la variation de l'énergie (DW) et la variation de P_Z (DP_Z).

TABLEAU B.1 : Ordinogramme du calcul des trajectoires



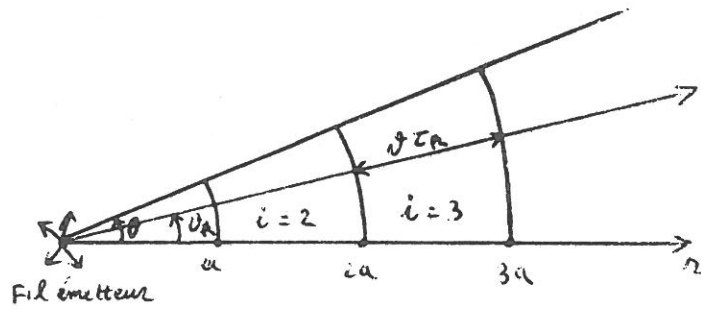
APPENDICE C : Expression des différents éléments d'angle solide.

i j	Cylindre	Couvercle inférieur	Couvercle supérieur
Cylindre	$d\omega_{ij} = dS_j \frac{1 - \cos(\phi_j - \phi_i)}{3 r_{ij}}$ $r_{ij}^2 = 2R^2 (1 - \cos(\phi_i - \phi_j) + (z_i - z_j)^2)$	$d\omega_{ij} = dS_j \frac{z_i}{3 r_{ij}}$ $r_{ij}^2 = r_j^2 + R^2 - 2Rr_j \cos(\phi_j - \phi_i) + z_i^2$	$d\omega_{ij} = dS_j \frac{z_i}{3 r_{ij}}$ $r_{ij}^2 = r_j^2 + R^2 - 2Rr_j \cos(\phi_j - \phi_i) + (h - z_i)^2$
Couvercle inférieur	$d\omega_{ij} = dS_j \frac{R - r_j \cos(\phi_i - \phi_j)}{3 r_{ij}}$ $r_{ij}^2 = r_i^2 + R^2 - 2Rr_i \cos(\phi_j - \phi_i) + z_i^2$	X	$d\omega_{ij} = dS_j \frac{h}{3 r_{ij}}$ $r_{ij}^2 = r_j^2 + r_i^2 - 2r_j r_i \cos(\phi_i - \phi_j) + h^2$
Couvercle supérieur	$d\omega_{ij} = dS_j \frac{R - r_j \cos(\phi_i - \phi_j)}{3 r_{ij}}$ $r_{ij}^2 = r_i^2 + R^2 - 2Rr_i \cos(\phi_j - \phi_i) + (h - z_i)^2$	X	X

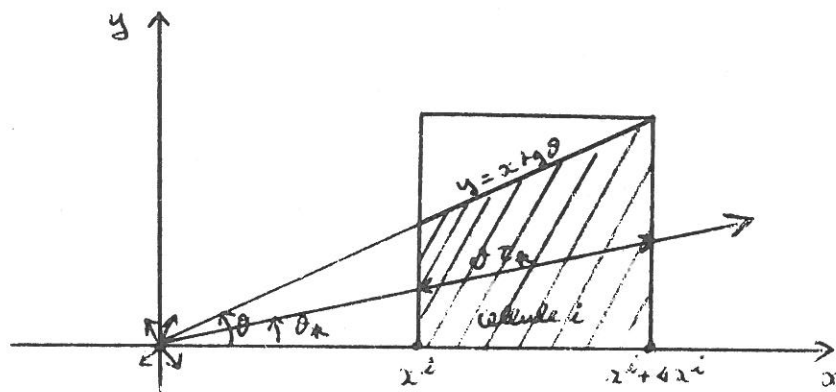
Si le point i est sur un couvercle, on a : (i) \equiv (r_i, φ_i, 0 ou h)

Si le point i est sur le cylindre : (i) \equiv (R, φ_i, z_i)

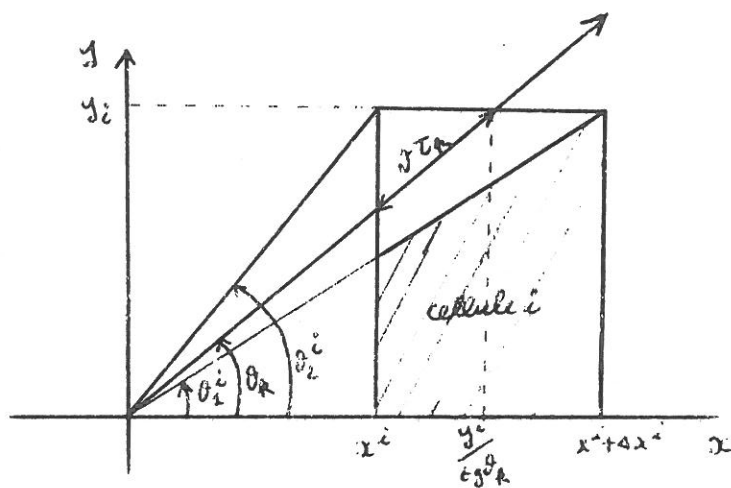
$$d\omega_{ij} = \frac{d\vec{S}_j \cdot \vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3}$$



FigureD-1:Secteurs circulaires.



FigureD-2:Cellule rectangulaire; trapèze du § D-1-B-a)



FigureD-3:Cellule rectangulaire; triangle du § D-1-B-b)

APPENDICE D : Calcul de la densité des particules émises par une grille en l'absence de champ magnétique

Dans cet appendice, nous nous proposons d'abord de démontrer l'équation [V.3] dans le cas où il n'y a pas de champ magnétique et ensuite de trouver l'expression analytique du nombre de particules présentes dans les cellules du chapitre V, toujours en l'absence de champ, pour tester le programme de calcul de la densité des électrons primaires.

D.1. DEMONSTRATION DE L'EQUATION [V.3] POUR $\vec{B} = \vec{0}$

D.1.A. Nombre de particules présentes dans un secteur circulaire au voisinage d'un fil émetteur

L'émission se fait dans un plan perpendiculaire au fil. De la conservation du flux on déduit :

$$n(r) = \frac{1}{2\pi r} \quad [D.1]$$

où $n(r)$ est la densité des particules à l'abscisse r lorsque le fil émet une particule par seconde et par unité de longueur.

Calculons le nombre de particules présentes dans le $i^{\text{ième}}$ secteur circulaire de la figure D.1 :

$$N_i = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \int_0^\theta n(r) r d\theta dr = \frac{\theta}{2\pi} a \quad [D.2]$$

où a désigne le rayon du premier secteur circulaire et θ son angle d'ouverture. $r_i = ia$.

Appelons N_i^S (S pour "stochastique") le nombre de particules obtenu avec la formule [V.3]. Soit v la vitesse des particules. Le

temps passé par une particule dans le secteur circulaire est donc a/v et l'équation [V.3] s'écrit :

$$N_i^S = A \sum_k \tau_k = \frac{A}{v} \sum_k a \quad [V.3]$$

où la sommation porte sur toutes les particules qui pénètrent dans le secteur circulaire.

On tire N particules au hasard. Il y en a m qui sont émises dans le cône d'ouverture θ . Si le tirage est vraiment aléatoire on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m}{N} = \frac{\theta}{2\pi} \quad [D.3]$$

Nous sommes libres de choisir la valeur de la constante de normalisation A . Posons :

$$A \equiv \frac{v}{N} \quad [D.4]$$

$$N_i^S = \frac{m}{N} a$$

et de [D.3] on déduit :

$$N_i = \lim_{N \rightarrow \infty} N_i^S$$

Nous avons donc démontré que dans le cas particulier de cellules constituées par des secteurs circulaires [V.3] conduit au bon résultat. Démontrons que ceci est indépendant de la forme des cellules.

D.1.B. Nombre de particules présentes dans une cellule rectangulaire au voisinage d'un fil émetteur

Décomposons la cellule en un trapèze (zone hachurée sur la figure D-2) et un triangle.

a) Trapèze

Le nombre de particules présentes dans le trapèze s'écrit :

$$N_i = \int_{\text{trapèze}} n(r) dx dy = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{x_i}^{x_i + \Delta x_i} dx \int_0^{x \operatorname{tg} \theta} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Et avec le changement de variables $W = y/x$, il vient :

$$N_i = \frac{\Delta x_i}{2\pi} \operatorname{argsh} \operatorname{tg} \theta \quad [\text{D.5}]$$

où Δx_i et θ sont définis sur la figure D.2.

Reprenons l'équation [V.3]. Le temps passé par chaque particule dans le trapèze est :

$$t_k = \frac{\Delta x_i}{v \cos \theta_k}$$

où θ_k est l'angle de la trajectoire de la particule (figure D-2). L'équation [V.3] s'écrit donc, compte tenu de [D.4] :

$$N_i^S = \Delta x_i \frac{1}{N} \sum_{k=1}^m \frac{1}{\cos \theta_k} = \Delta x \frac{m}{N} \sum_{k=1}^m \frac{1/m}{\cos \theta_k} \quad [\text{D.6}]$$

En utilisant [D.3] il vient :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N_i^S = \frac{\Delta x_i}{2\pi} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\cos \theta} = \frac{\Delta x_i}{2\pi} \operatorname{argsh} \operatorname{tg} \theta \quad [\text{D.7}]$$

On a donc bien :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N_i^S = N_i$$

b) Triangle

Il reste à calculer la contribution du triangle (zone non hachurée du rectangle de la figure D-2).

$$N_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{triangle}} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

avec le changement de variable :

$$\text{tg } \theta = y/x$$

on obtient :

$$N_i = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{y_i}{\sin \theta} - \frac{x_i}{\cos \theta} \right) \frac{d\theta}{2\pi} \quad [\text{D.8}]$$

Les grandeurs $\theta_1, \theta_2, x_i, y_i$ sont définies sur la figure D-3. Venons-en au calcul stochastique. De la figure D-3 on déduit :

$$v_{\tau k} = \frac{1}{\cos \theta_k} \left(\frac{y_i}{\text{tg } \theta_k} - x_i \right) = \frac{y_i}{\sin \theta_k} - \frac{x_i}{\cos \theta_k}$$

[V.3] s'écrit donc :

$$N_i^S = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^m \left(\frac{y_i}{\sin \theta_k} - \frac{x_k}{\cos \theta_k} \right)$$

De [D.3] on déduit :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m}{N} = \frac{\theta_2^i - \theta_1^i}{2\pi}$$

Et donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N_i^S = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^m \frac{\theta_2^i - \theta_1^i}{m} \left[\frac{y_i}{\sin \theta_k} - \frac{x_k}{\cos \theta_k} \right]$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N_i^S = \int_{\theta_1^i}^{\theta_2^i} \left(\frac{y_i}{\sin \theta} - \frac{x_i}{\cos \theta} \right) \frac{d\theta}{2\pi}$$

On reconnaît là l'équation [D.8].

Le calcul stochastique donne donc toujours le même résultat que le calcul analytique pour N suffisamment grand.

D.1.C. Cas d'une grille émettrice

Le résultat précédent reste valable. Il suffit de sommer les contributions des différents fils de la grille.

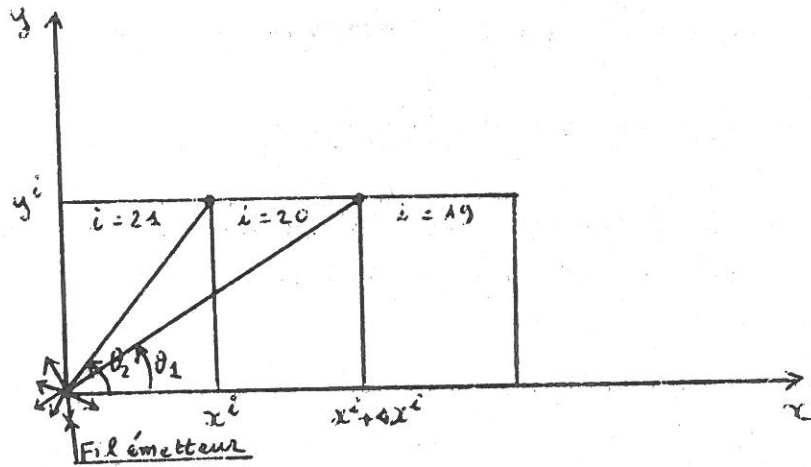


Figure D-4: géométrie du § D-2-A.

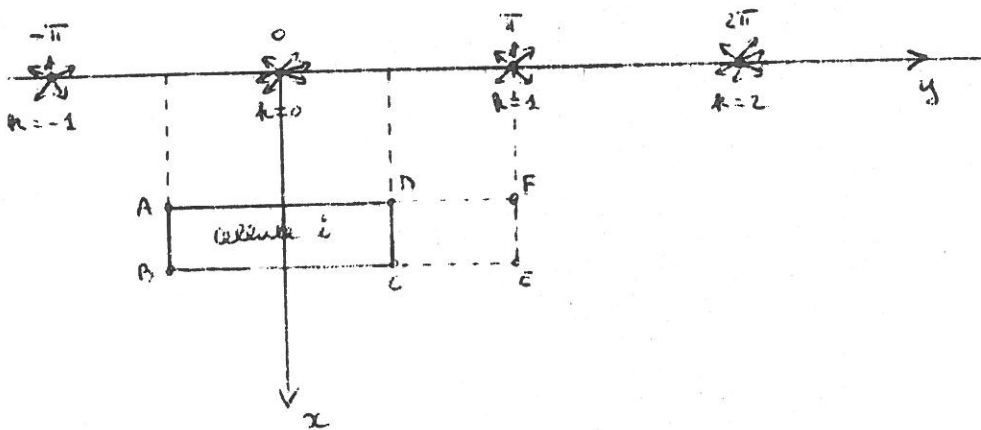


Figure D-5: Géométrie du § D-2-B.

D.2. CALCUL DU NOMBRE DE PARTICULES PRESENTES DANS LES CELLULES
DU CHAPITRE V EN CHAMP MAGNETIQUE NUL

On ne s'intéresse qu'aux cellules rectangulaires (cellules 16 à 21).

D.2.A. Contribution du fil situé en Y = 0

Reprenons [D.8] et [D.7] :

$$N^i = \frac{\Delta x^i}{2\pi} \int_0^{\theta_1^i} \frac{d\theta}{\cos \theta} + \int_{\theta_1^i}^{\theta_2^i} \left(\frac{y_i}{\sin \theta} - \frac{x_i}{\cos \theta} \right) d\theta .$$

Cette expression s'intègre sans difficulté (se reporter à la figure D-4 pour la géométrie du problème) :

$$2\pi N^i = \Delta x^i \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left| \frac{\theta_1^i}{2} + \frac{\pi}{4} \right| + y_i \operatorname{Log} \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_2^i}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1^i}{2}} - x^i \operatorname{Log} \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_2^i}{2} + \frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1^i}{2} + \frac{\pi}{2}} \quad [\text{D.9}]$$

Pour éviter de réécrire le deuxième membre de [D.9], posons :

$$2\pi N_i \equiv f(\theta_1^i, \theta_2^i) \quad [\text{D.10}]$$

D.2.B. Nombre de particules présentes au voisinage de la grille émettrice

On obtient ce nombre en sommant la contribution des différents fils. Le nombre de particules présentes dans le rectangle ABCD (figure D-5) et émises par le fil $k = l$ est égal au nombre de particules contenues dans le rectangle FABE moins celles qui se trouvent dans le rectangle FDCE et qui ont été émises par le même fil. Toutes ces expressions se calculent par la formule [D.9].

Posons :

$$\begin{aligned}
 I_0 &\equiv f \left[\operatorname{arctg} \frac{\frac{\pi}{2}}{x^i + \Delta x^i}, \operatorname{arctg} \frac{\frac{\pi}{2}}{x^i} \right] \\
 I_1 &\equiv f \left[\operatorname{arctg} \frac{\frac{\pi}{2} + \pi}{x^i + \Delta x^i}, \operatorname{arctg} \frac{\pi + \frac{\pi}{2}}{x^i} \right] - f \left(\operatorname{arctg} \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{x^i + x^i}, \operatorname{arctg} \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{x^i} \right) \\
 I_k &\equiv f \left[\operatorname{arctg} \left((k + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{x^i + \Delta x^i} \right), \operatorname{arctg} (k + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{x^i} \right] - f \left[k - \frac{1}{2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{D.11}$$

Le nombre de particules présentes dans les cellules au voisinage de la grille s'écrit alors :

$$2\pi N^i = 2I_0 + \sum_{k=1}^K 2I_k \tag{D.12}$$

où K désigne le dernier fil qui contribue (car dans le calcul numérique on suppose que les particules disparaissent après une distance λ) :

$$(K\pi)^2 + \left(x^i + \frac{\Delta x^i}{2} \right)^2 = \lambda^2 \tag{D.13}$$

Nous allons donc maintenant pouvoir comparer [D.12] avec le résultat du calcul numérique en champ magnétique nul (figure V-4).

APPENDICE E : Collisions élastiques et piégeage des électrons primaires

Dans cet appendice, nous nous proposons d'évaluer la proportion des chocs élastiques conduisant à la libération ou au piégeage d'une particule, moyennant quelques hypothèses.

Les collisions élastiques entraînent des variations aléatoires de la composante de la vitesse le long de Z, ΔV_Z et donc des variations de P. Par contre, l'énergie reste inchangée par définition.

E.1. CALCUL DES PROBABILITES DE PIEGEAGE ET DE DEPIEAGE

Reprenons les coordonnées réduites au § III.3 et posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} V \equiv V_Z \\ \Delta V \equiv \Delta V_Z \end{array} \right. \quad [E.1]$$

L'impulsion s'écrit alors :

$$P \equiv V - C\lambda(X,Y) \quad [E.2]$$

Soit $f(V,\Delta V)$ la densité de probabilité pour que la projection de la vitesse sur l'axe OZ passe de V à $V+\Delta V$ au cours d'un choc. Si après une collision V est distribué uniformément dans l'intervalle $-1,1$, $f(V,\Delta V)$ est constant. La figure E-1 montre son domaine de définition :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(V,\Delta V) = \frac{1}{4} \text{ dans } \mathcal{D} \\ f(V,\Delta V) = 0 \text{ ailleurs} \end{array} \right. \quad [E.3]$$

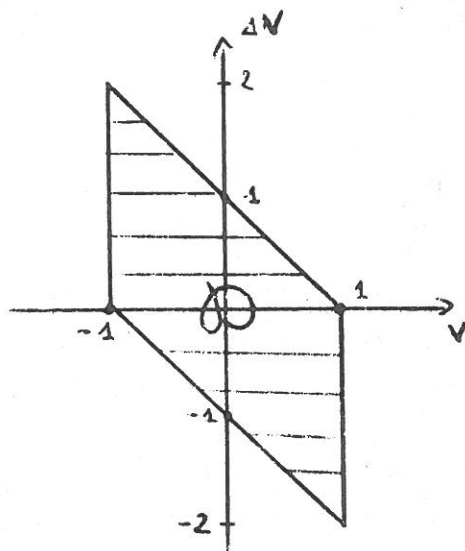


Figure E-1: Domaine de définition de $f(V, \Delta V)$ (zone hachurée).

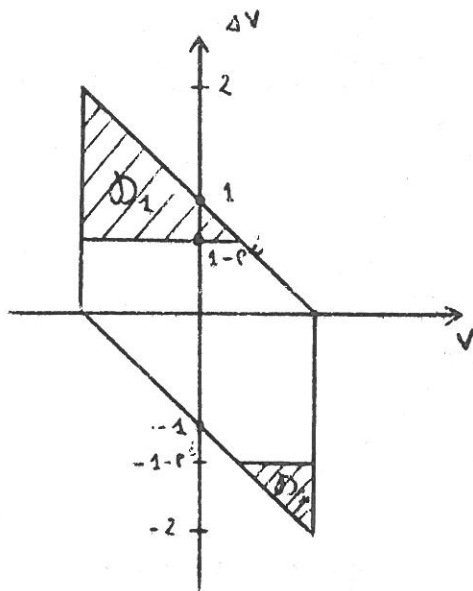


Figure E-2: Domaine d'intégration de l'équation [E-7] (partie hachurée).

Utilisons les indices "i" et "f" pour indiquer les valeurs antérieures et postérieures au choc. L'impulsion s'écrit :

$$p^f = p^i + \Delta V \quad [E.4]$$

Une particule sera piégée après un choc élastique si :

$$|p^i + \Delta V| > 1 \quad [E.5]$$

Elle sera libre si la condition inverse est vérifiée. Notons $W(p^i)$ la densité de probabilité pour qu'une particule d'impulsion initiale p^i soit piégée à la suite d'un choc élastique, et $\bar{W}(p^i)$ la densité de probabilité pour qu'elle soit, au contraire, libre. W et \bar{W} sont liées par la relation :

$$\bar{W}(p) = 1 - W(p) \quad [E.6]$$

Intéressons-nous aux particules d'impulsion positive. Il y a deux cas à considérer :

Premier cas : $0 < p^i < 1$

Il s'agit des particules initialement libres. $W(p)$ est donné par :

$$W(p^i) = \iint_{\mathcal{D}_1} f(V, \Delta V) dV d\Delta V \quad [E.7]$$

Le domaine d'intégration \mathcal{D}_1 est donné par (figure E-2) :

$$\left. \begin{array}{l} p^i + \Delta V < -1 \\ \text{ou} \\ p^i + \Delta V > 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta V < -1 - p^i \\ \text{ou} \\ \Delta V > 1 - p^i \end{array} \right. \quad [E.8]$$

et on obtient sans difficulté :

$$\left\{ \begin{array}{l} W(p^i) = \frac{1 + p^{i2}}{4} \\ \bar{W}(p^i) = \frac{3 - p^{i2}}{4} \end{array} \right. \quad [E.9]$$

Deuxième cas : $P^i > 1$

Il s'agit des particules piégées initialement. Comme $|\Delta V| \leq 2$ (figure E-1), un choc élastique ne peut pas libérer une particule piégée de P^i supérieur à 3. Par conséquent :

$$\bar{W}(P^i) = 0 \quad \text{si} \quad P^i \geq 3 \quad \text{[E.10]}$$

Pour les particules de P compris entre 1 et 3 :

$$\bar{W}(P^i) = \iint_{\mathcal{D}_2} f(V, \Delta V) dV d\Delta V \quad \text{[E.11]}$$

où \mathcal{D}_2 est défini par (figure E-3) :

$$\Delta V < 1 - P^i \quad \text{[E.12]}$$

L'intégration ne présente pas de difficulté et a pour résultat :

$$\bar{W}(P^i) = \frac{(3 - P^i)^2}{8} \quad \text{[E.13]}$$

$$1 \leq P \leq 3$$

Nous avons étudié le cas des particules de P positif. Les résultats sont exactement les mêmes pour les P négatifs. La figure E-4 montre les variations de W et \bar{W} en fonction de $|P|$.

E.2. EVALUATION DE LA FRACTION DES CHOCS ELASTIQUES QUI LIBERENT OU PIEGENT LES PARTICULES

Considérons d'abord les particules libres et supposons leur distribution uniforme en P (on pourrait utiliser la fonction de distribution [VI.11] mais les calculs seraient très laborieux

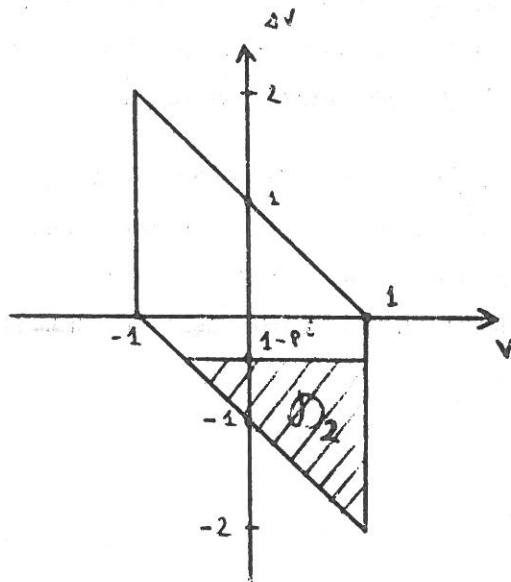


Figure E-3: Domaine d'intégration de [E-11] (zone hachurée).

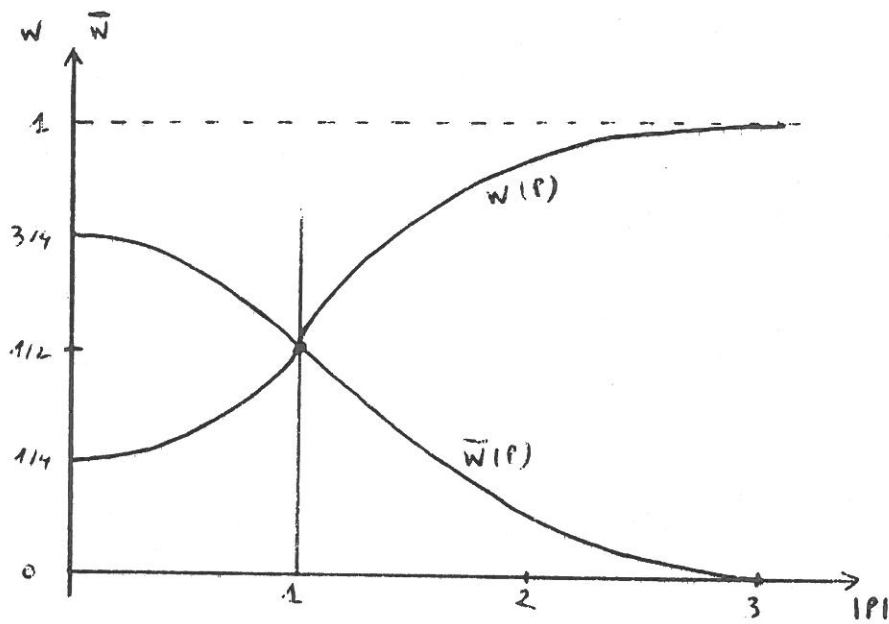


Figure E-4: Variation des densités de probabilité de piégeage ($w(P)$) et de libération des particules ($\bar{w}(P)$).

et le résultat très voisin). La fraction des chocs élastiques qui conduisent au piégeage de ces particules est alors la moyenne de $W(P)$ sur l'intervalle $[0,1]$. Cette moyenne vaut $\frac{1}{3}$.

De même, la moyenne de $\bar{W}(P)$ sur l'intervalle $[1,2]$ donne l'ordre de grandeur de la fraction des collisions élastiques qui libèrent les particules. Cette moyenne vaut $\frac{1}{6}$. Par conséquent, les collisions ionisantes sont le mécanisme de libération dominant (car $v_{in}/v_{el} \approx \frac{1}{3}$).

APPENDICE F : Fraction du flux incident piégé :
théorie adiabatique

Nous nous proposons d'exprimer la fraction du flux des particules incidentes sur la gaine magnétique qui est piégée par l'un des mécanismes décrits au § VII.6 et VII.7, à l'aide de la fonction de distribution [VI.12].

Supposons donc l'existence d'un mécanisme tel qu'aucune des particules qui arrivent à proximité des aimants avec une impulsion (réduite) comprise entre $1 - \Delta P$ et 1 , ne puisse regagner les régions de faible champ magnétique.

Dans le cas du freinage coulombien, $|\Delta P|$ vaut :

$$\Delta P \approx \frac{2}{3} \alpha \frac{T - T_0}{C} \quad [\text{VII.22}]$$

où $T - T_0$ représente la durée du séjour dans la gaine magnétique, et α , le pouvoir d'arrêt exprimé en coordonnées réduites ([VII.13]).

Pour le piégeage par un champ électrique E_z , nous avons trouvé :

$$\Delta P \approx \frac{eE_z \ell}{v} \quad [\text{VII.25}]$$

Rappelons l'expression de la fonction de distribution des électrons primaires dans les régions où la théorie adiabatique est valable :

$$F(M, P) \equiv \frac{b(X_G)}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - Mb(X_G)} \sqrt{Mb(X_G) - P^2}} \quad [\text{VI.12}]$$

X_G doit être suffisamment grand pour que $b(X_G)$ soit petit. Soit \mathcal{D} le domaine de définition de F (figure VI-2). Le flux des particules qui s'approchent de la paroi s'écrit :

$$\psi \equiv \int_{\mathcal{D}} F(M,P) V_{\parallel} dM dP \quad [F.1]$$

où V désigne la composante de la vitesse réduite parallèle au champ magnétique et ψ , le flux exprimé en variables réduites. V nous est donné par [III.45] :

$$V = \sqrt{1 - Mb(X)} \quad [III.45]$$

Posons :

$$u \equiv Mb(X_G) \quad [F.2]$$

Le flux des particules en un point s'écrit :

$$\psi(X,Y) = \frac{1}{4\pi} \int_{D(X,Y)} \left[\frac{1 - u \frac{b(X)}{b(X_G)}}{(1-u)(u-P^2)} \right]^{1/2} dudP \quad [F.3]$$

La figure F-1 montre le domaine d'intégration $D(X,Y)$. Celui-ci se rétrécit lorsque X diminue (réflexion des particules) et lorsque $|Y|$ (donc $|\lambda(X,Y)|$) augmente, c'est-à-dire lorsque l'on approche de la zone interdite.

Le flux des particules piégées s'écrit :

$$\psi'(X,Y) = \frac{1}{4\pi} \int_{D'(X,Y)} \left[\frac{1 - u \frac{b(X)}{b(X_G)}}{(1-u)(u-P^2)} \right]^{1/2} dudP \quad [F.4]$$

La figure F-2 montre $D'(X,Y)$ dans le cas du freinage coulombien, du côté du cusp où λ est positif. De l'autre côté du cusp, le domaine d'intégration est le symétrique de $D'(X,Y)$ par rapport à l'axe Ou .

Les figures F-3 montrent les domaines d'intégration dans le cas où le piégeage est dû à un champ électrique E_z . Selon le sens du champ électrique il y a piégeage des particules de P voisin de 1 ou de -1.

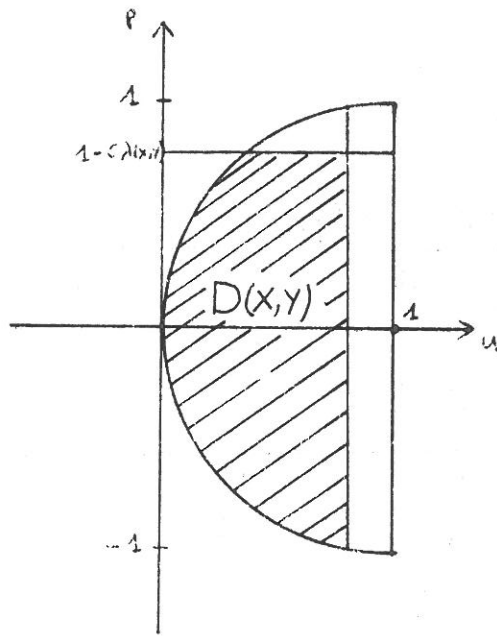


Figure F1: Domaine d'intégration $D(X, Y)$ du flux de particules libres (zone hachurée).

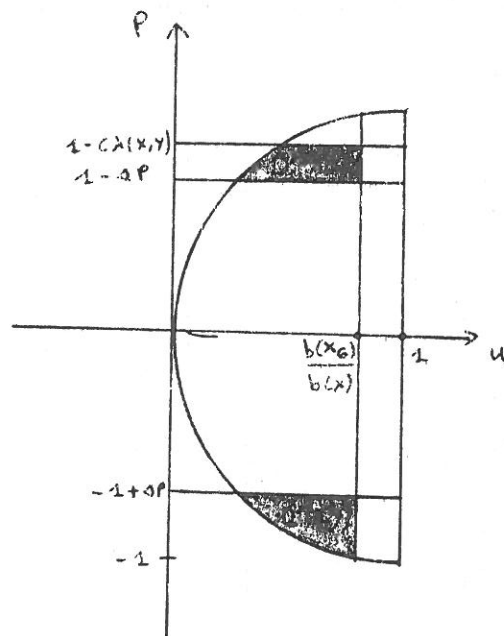


Figure F-2: Domaine d'intégration $D'(X, Y)$ du flux de particules piégées par freinage coulombien (zone en grisé); si $\Delta P < c\lambda(X, Y)$, la partie supérieure de $D'(X, Y)$ disparaît.

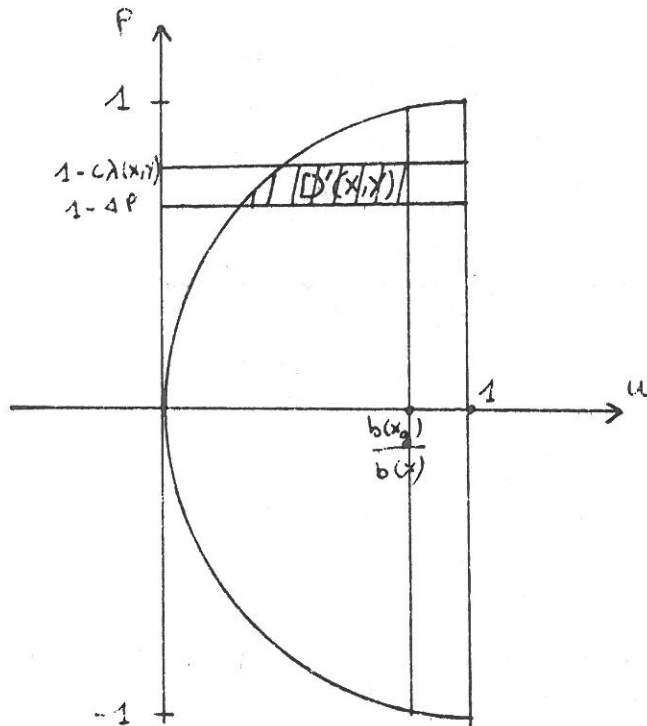


Figure F-3-a: Domaine d'intégration $D'(X, Y)$ des particules piégées par un champ $E_z > 0$ (zone hachurée). Si $\Delta P < c\lambda(X, Y)$, le domaine se réduit à l'ensemble vide.

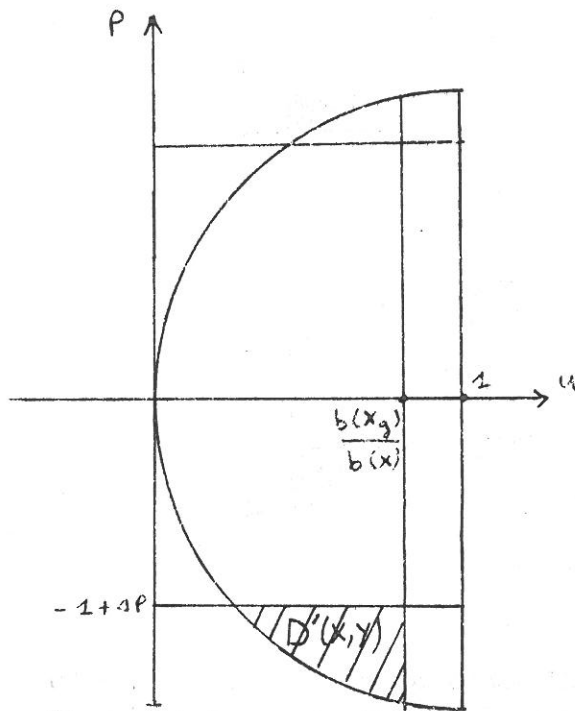


Figure F-3-b: Domaine d'intégration $D'(X, Y)$ des particules piégées par un champ $E_z < 0$ (zone hachurée). Il y a piégeage, quelle que soit la valeur de E_z .

La fraction du flux piégé, f , s'obtient en intégrant [F.3] et [F.4] par rapport à Y et en faisant le rapport des deux intégrales. Dans le cas du freinage coulombien, on doit intégrer [F.4] sur toute la section du cusp et dans le cas du champ E_z , il faut se limiter à la région où ce champ existe.

Nous n'avons pas effectué les calculs car, d'une part ils sont laborieux et d'autre part ils ne sont rigoureusement valables que si la théorie adiabatique est applicable, ce qui n'est pas vrai dans la majeure partie du cusp (figure III-8). Nous nous limiterons donc aux évaluations des § VII.6 et VII.7.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) R.L. STENZEL, A.Y. WONG, H.C. KIM, Phys. Rev. Lett. 32, 654 (1974)
T. MANTEI, G. MATTHIEUSSENT, Phys. Rev. Lett. 34, 727 (1975)
- (2) A.Y. WONG, R.L. STENZEL, Phys. Rev. Lett. 34, 727 (1975)
- (3) M. BACAL, G.W. HAMILTON, Phys. Rev. Lett. 42, 1538 (1979)
M. PEALAT, J.P. TARAN, J. TAILLET, M. BACAL, A.M. BRUNETEAU, J. Appl. Phys. 52 (4), 2687 (1981)
M. BACAL, A.M. BRUNETEAU, W.G. GRAHAM, G.W. HAMILTON, M. NACHMAN, J. Appl. Phys. 52 (3), 1247 (1981)
- (4) J.M. BUZZI, J. SNOW, J.L. HIRSHFIELD, Phys. Lett. 54A, 344 (1975)
- (5) SAMEC, Thesis, UCLA Report, PPG 281 (Nov. 1976)
- (6) R. LIMPAECHER, K.R. MACKENZIE, Rev. Sci. Inst. 44, 726 (1973)
- (7) K.N. LEUNG, N. HERSHKOWITZ, K.R. MACHKENZIE, Phys. Fluids 19, 1045 (1976)
- (8) C. KOCH, G. MATTHIEUSSENT, Phys. Fluids 26, 545 (1983)
- (9) J.L. DELCROIX, Physique des Plasmas, Dunod (1966)
- (10) L. TONKS, I. LANGMUIR, Phys. Rev. 34, 876 (1929)
- (11) J. PARKER, Phys. Fluids, 6, 1657 (1963)
- (12) C. KOCH, Thèse de troisième cycle, Orsay (1981)
- (13) T. NORTHROP, E. TELLER, Phys. Rev. 117, 215 (1960)
- (14) GERALD, Applied numerical analysis, Addison Wesley (1970)
- (15) L. LANDAU, E.M. LIFSHITZ, Statistical Physics, Pergamon Press (1960)
- (16) S.N. RODIONOV, J. Nucl. Energy, C, 1, 247 (1960)

- (17) W.F. DIVERGILIO, A.Y. WONG, H.C. KIM, Y.C. LEE, Phys. Rev. Lett. 38, 541 (1977)
- (18) S. ICHIMARU, Basic principles of Plasma Physics, Benjamin (1973)
- (19) G. MAYNARD, Thèse de troisième cycle, Orsay (1982)
- (20) R. MAY, N.F. CRAMER, Phys. Fluids 13, 1766 (1970)
- (21) B.B. KADOMTSEV, Plasma Turbulence, Academic Press, New York, p. 94 (1965)
- (22) B.D. FRIED, S.D. CONTE, The plasma dispersion function, Academic Press (1961)
- (23) D. GRESILLON, J. OLIVAIN, A. TRUC, T. LEHNER, C.M. SURKO, Phys. Fluids, à paraître.
R. JONES, Plasma Physics, 22, 355 (1980)
H. KOZIMA, Plasma Physics, 25, 287 (1983)
- (24) H.M. MOTT-SMITH, I. LANGMUIR, Phys. Rev. 28, 727 (1926)
- (25) F. CHEN, Introduction to plasma Physics, Plenum, New York (1974).

* *
*

